This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

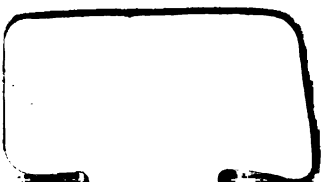
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library
of the
University of Wisconsin



Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Dritte (Schluß-) Abteilung

Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

In zwei Teilen

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Von

Dr. Alex. Wernicke

Direktor der Städtischen Oberrealschule und Professor an der Herzogl. Technischen Hochschule zu Braunschweig

---

Vierte völlig umgearbeitete Auflage

Dritte (Schluß-) Abteilung

Statik und Kinetik elastisch-fester Körper (Lehre von der Elasticität und Festigkeit)

Mit eingedruckten Abbildungen

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn

1903

Alle Rechte, namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

75417
DEC 22 1903

SD
.W49
1
3

Inhalt

für die

dritte Abteilung des ersten Bandes.

Vierter Abschnitt.

Dynamik elastisch-fester Körper.

Erstes Kapitel (S. 811 bis 858).

Begründung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit.

		Seite
§ 111.	Formänderungen (Deformationen) unter dem Einflusse von Kräften	811
§ 112.	Die Flächenkräfte und die entsprechenden Spannungen	813
§ 113.	Normalspannungen und Tangentialspannungen und die entsprechenden Formänderungen	817
§ 114.	Der Spannungszustand für einen Körperpunkt	820
§ 115.	Die beiden einfachen Spannungszustände für Zug oder Druck und für Schub	823
§ 116.	Einführung der Formänderungen als Dehnungen und Schiebungen	827
§ 117.	Die Formänderung für einen Körperpunkt	833
§ 118.	Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen	835
§ 119.	Die beiden Elasticitätskonstanten isotroper Körper, welche dem Gesetz von Hooke folgen	839
§ 120.	Die Elasticitätskonstanten für isotrope Stoffe, welche dem Gesetz von Hooke nicht folgen, und für heterotrope Stoffe	844
§ 121.	Die Anstrengung des Materials	846
§ 122.	Die vier Arten der einfachen Elasticität und Festigkeit	849
§ 123.	Bruchspannungen, Konstruktionsspannungen und Formänderungsarbeit	852
§ 124.	Die Gliederung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit	858

Zweites Kapitel (S. 859 bis 1307).

Statik isotroper elastisch-fester Körper, welche dem Gesetz von Hooke folgen.

Erste Abteilung (S. 859 bis 878).

Der gerade Stab unter der Einwirkung von Zug oder Druck.

§ 125.	Die Beanspruchung durch Zug oder Druck	859
§ 126.	Zug und Druck bei Vernachlässigung des Eigengewichtes	860
§ 127.	Zug und Druck bei Berücksichtigung des Eigengewichtes	861
§ 128.	Die Form gleicher Spannung für Zug und für Druck	862
§ 129.	Die Formänderungsarbeit für Zug und für Druck	865
§ 130.	Schwingungen bei Zug- oder Druckbelastung	869
§ 131.	Der Einfluß unstetiger Querschnittsunterbrechungen	871

Seite

§ 132. Die Arten der zulässigen Spannungen und der Bruchspannungen . 872
§ 133. Erweiterung der Betrachtungen bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkräften (Formänderungsarbeit und Volumendehnung) 874
§ 134. Materialkonstanten 877

Zweite Abteilung (S. 879 bis 889).
Der gerade Stab unter dem Einflusse von Schub.

§ 135. Beanspruchung durch Schub 879
§ 136. Die Verteilung der Schubkraft auf die angegriffene Fläche in Beziehung zur zulässigen Spannung 880
§ 137. Die Schubspannungen am Rande eines Querschnittes 881
§ 138. Die Formänderungsarbeit des Schubes 883
§ 139. Durch Schub bewirkte Schwingungen 885
§ 140. Die Arten der zulässigen Spannungen und der Bruchspannungen . 885
§ 141. Die Schubspannungen der verschiedenen Spannungszustände und deren Formänderungsarbeit 885
§ 142. Die Formänderungsarbeit für ein beliebiges Volumenelement von allgemeinem Spannungszustande 888
§ 143. Materialkonstanten 889

Dritte Abteilung (S. 890 bis 1091).
Die Biegung des geraden Stabes.

§ 144. Beanspruchung durch Biegung 890
§ 145. Formänderungsgleichung und Festigkeitsgleichung für den Normalfall der Praxis (Gerade Belastung) 890
§ 146. Das Trägheitsmoment und die Querschnittszahl für den Normalfall der Praxis 901
§ 147. Das Moment der äußeren Kräfte und die Vertikalkraft für den Normalfall der Praxis 919
§ 148. Die Verwertung der Festigkeitsgleichung und der Formänderungsgleichung für den Normalfall der Praxis 926
§ 149. Der prismatische Freiträger (Erster Fall u. s. w.) 939
§ 150. Der prismatische Balken auf zwei Stützen (Zweiter Fall u. s. w.) . 948
§ 151. Der einerseits eingespannte und anderseits gestützte prismatische Balken (Dritter Fall u. s. w.) 955
§ 152. Der beiderseits eingespannte prismatische Balken (Vierter Fall u. s. w.) 964
§ 153. Die Berechnung der Abmessungen nach der Festigkeitsgleichung und nach der Formänderungsgleichung 969
§ 154. Die verjüngten Formen, welche den Beispielen der §§ 149 bis 152 entsprechen (Trägerformen gleicher Spannung oder gleichen Widerstandes) 971
§ 155. Graphostatische Behandlung der Aufgaben der §§ 149 bis 154 . . . 981
§ 156. Weitere Bemerkungen zu den einfachen Fällen der Befestigung . . . 1001
§ 157. Der Dreistützenträger 1018
§ 158. Durchgehende Träger 1021
§ 159. Bewegliche Belastungen 1032
§ 160. Schubspannungen im gebogenen Balken 1041
§ 161. Die größten Anstrengungen in einem Punkte des gebogenen Stabes bei Berücksichtigung des Schubes 1052
§ 162. Der Einfluß des Schubes auf die Biegungslinie und die experimentelle Bestimmung von G 1056
§ 163. Die sogenannte schiefe Belastung des Balkens 1060
§ 164. Die Formänderungsarbeit für Biegung und die Biegungsschwingungen 1071

Seite
§ 165. Die Sätze von Castigliano und von Maxwell 1076
§ 166. Die Einflüsse der Ungenauigkeiten der Theorie des gebogenen Balkens 1086
§ 167. Materialkonstanten 1091

Vierte Abteilung (S. 1092 bis 1110).
Die Verdrehung des geraden Stabes.

§ 168. Beanspruchung auf Verdrehung (Torsion) 1092
§ 169. Verdrehung eines geraden Cylinders, dessen Querschnitt ein Kreis ist 1092
§ 170. Verdrehung eines geraden Cylinders, dessen Querschnitt eine Ellipse ist 1097
§ 171. Verdrehung eines geraden Stabes, dessen Querschnitt ein Rechteck ist 1100
§ 172. Vergleichung der Ergebnisse der §§ 169, 170 und 171 1106
§ 173. Die Arbeit der Formänderung bei Verdrehungen und die Bestimmung von *arc ε* 1107
§ 174. Drehungsschwingungen 1109
§ 175. Materialkonstanten 1110

Fünfte Abteilung (S. 1111 bis 1134).
Knickung gerader Stäbe und Biegung bei excentrischer Belastung, sowie Biegung gespannter Balken.

§ 176. Die Knickung 1111
§ 177. Excentrischer Druck 1120
§ 178. Excentrischer Zug 1122
§ 179. Gespannte Balken 1125
§ 180. Gespannter Freiträger mit Endbelastung bei Druckspannungen . . . 1126
§ 181. Gespannter Freiträger mit Endbelastung bei Zugspannungen . . . 1128
§ 182. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Druckspannungen 1130
§ 183. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Zugspannungen 1131
§ 184 und § 185. Der gespannte Zweistützenträger bei Mittelbelastung . . 1131
§ 186. Der gespannte Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung bei Druckspannungen 1132
§ 187. Der gespannte Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung bei Zugspannungen 1133
§ 188. Die Behandlung schiefer Belastung 1134

Sechste Abteilung (S. 1135 bis 1161).
Die Anstrengung gerader Stäbe bei Fällen zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.

§ 189. Die Einteilung der Fälle zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit 1135
§ 190. Beanspruchung durch Normalspannungen (Kern des Querschnitts usw.) 1135
§ 191. Beanspruchung durch Schubspannungen 1155
§ 192. Beanspruchung durch Normalspannungen und Schubspannungen . . 1156

Siebente Abteilung (S. 1162 bis 1193).
Das Fachwerk aus geraden Stäben.

§ 193. Einfache Fachwerke und die aus ihnen abgeleiteten Fachwerke . . . 1162
§ 194. Einschränkung der Betrachtung des vorigen Paragraphen mit Rücksicht auf das elastische Verhalten des Materials der Stäbe (Nachgiebige Fachwerke) 1165
§ 195. Die statisch-bestimmten Fachwerke und die Berechnung ihrer Stabkräfte 1168
§ 196. Das statisch-bestimmte ebene Fachwerk als statisch-bestimmter und als statisch-unbestimmter Träger 1172

Seite

§ 197. Die Formänderung eines ebenen statisch-bestimmten Fachwerks . . 1173
§ 198. Behandlung ebener statisch-unbestimmter Fachwerkträger 1176
§ 199. Die nachgiebigen Fachwerke 1179
§ 200. Ebene Fachwerkträger unter dem Einfluß beweglicher Belastungen . 1181
§ 201. Vollwandige Träger als Grenzgestalten von ebenen Fachwerkträgern 1188
§ 202. Die Behandlung räumlicher Fachwerke 1193

Achte Abteilung (S. 1194 bis 1240).
Die Biegung krummer Stäbe.

§ 203. Allgemeines 1194
§ 204. Der Normalfall der Praxis bei Stäben mit gekrümmter Mittellinie 1194
§ 205. Bestimmung der Hülfsgrößen A und B für den Normalfall der Praxis 1203
§ 206. Die Bestimmung der Formänderung bei Stäben von geringer Krümmung für den Normalfall der Praxis 1207
§ 207. Der flache prismatische Bogenträger, der in einer Vertikalebene in zwei Gelenken von gleicher Höhenlage ruht 1213
§ 208. Der flache prismatische Bogenträger ohne Gelenke, der in einer Vertikalebene eingespannt ist, bei gleicher Höhe der Einspannungspunkte 1217
§ 209. Das Gewölbe als System von Balken mit krummer Mittellinie . . 1222
§ 210. Der Ring als Balken mit krummer Mittellinie und Röhren als Systeme von Ringen 1226
§ 211. Federn mit krummer Mittellinie 1232

Neunte Abteilung (S. 1241 bis 1256).
Plattenförmige Körper.

§ 212. Allgemeines 1241
§ 213. Ebene Platten 1241
§ 214. Kreisförmige Hohlcylinder und Hohlkugeln mit dünnen Wandungen 1247
§ 215. Kreisförmige Hohlcylinder mit dicken Wandungen 1248
§ 216. Hohlkugeln mit dicken Wandungen 1254

Zehnte Abteilung (S. 1257 bis 1285).
System fester Körper von lockerem Gefüge (Schüttmassen).

§ 217. Natürliche und künstliche Böschung 1257
§ 218. Der Angriffspunkt des Erddruckes 1261
§ 219. Folgerungen aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen 1262
§ 220. Der thätige und der ruhende Erddruck bei wagerechter Oberfläche und senkrechter Stützfläche 1263
§ 221. Ausdehnung der Betrachtung des vorigen Paragraphen 1268
§ 222. Die graphische Behandlung des Erddruckes 1272
§ 223. Weitere Ausdehnung des v. Rebhannschen Verfahrens 1276
§ 224. Der Einfluß von Oberflächenbelastungen der Schüttmassen 1277
§ 225. Schüttmassen als elastische Körper 1278
§ 226. Anwendung der Betrachtungen der vorigen Paragraphen 1281
§ 227. Schlußbemerkungen 1285

Elfte Abteilung (S. 1286 bis 1303).
Die elastischen Grundgleichungen und die Arbeit der Formänderung.

§ 228. Die allgemeine Bedeutung der elastischen Grundgleichungen 1286
§ 229. Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht eines materiellen Körpers 1287

Seite

§ 230. Bedingungen für die Formänderung in der Umgebung eines materiellen Punktes innerhalb eines isotropen Körpers, der dem Gesetze von Hooke folgt 1289
§ 231. Die elastischen Grundgleichungen für isotrope Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen 1291
§ 232. Die Rechtfertigung der bisher benutzten theoretischen Annahmen durch die elastischen Grundgleichungen 1293
§ 233. Die Arbeit der den Spannungen entsprechenden Kräfte bei Formänderungen 1294
§ 234. Der Satz von Clapeyron 1297
§ 235. Der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit 1298
§ 236. Die elastischen Grundgleichungen und die ihnen entsprechenden einfachen Wellenbewegungen 1300

Zwölfte Abteilung (S. 1304 bis 1307).
Der Einfluß von Temperaturschwankungen.

§ 237. Die Formänderungen bei Temperaturschwankungen und die entsprechenden Spannungen 1304
§ 238. Die Berücksichtigung der betrachteten Spannungen 1306

Drittes Kapitel (S. 1308 bis 1314).
Statik isotroper elastisch-fester Körper, welche dem Gesetz von Hooke nicht folgen, und Statik entsprechender heterotroper Körper.

§ 239. Die Aufgabe 1308
§ 240. Die Formeln für Gußeisen 1309
§ 241. Formeln für Bausteine, Beton u. s. w. 1310
§ 242. Formeln für Leder, Fäden u. s. w. 1310
§ 243. Beurteilung der Formeln der §§ 240, 241 und 242 1310
§ 244. Verwendung der Formeln der §§ 240, 241 und 242 1312
§ 245. Schlußbemerkungen 1313

Viertes Kapitel (S. 1315 bis 1377).
Kinetik elastisch-fester Körper.

Erste Abteilung (S. 1315 bis 1322).
Die Spannungen bewegter elastisch-fester Körper.

§ 246. Allgemeines 1315
§ 247. Die Spannungen bei Verschiebungen 1316
§ 248. Die Spannungen bei Drehungen 1319
§ 249. Die Spannungen bei Verschiebungen und Drehungen 1322

Zweite Abteilung (S. 1323 bis 1360).
Der Stoß elastisch-fester Körper.

§ 250. Der Vorgang des Stoßes 1323
§ 251. Der centrale und der excentrische Stoß 1324
§ 252. Stöße bei Verschiebungen 1324
§ 253. Der gerade centrale Stoß bei gleichförmigen Verschiebungen freier Körper 1325
§ 254. Der gerade excentrische Stoß bei gleichförmiger Verschiebung freier Körper 1331
§ 255. Weitere Bedeutung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen . . 1334
§ 256. Der Mittelpunkt des Stoßes 1334

Seite
§ 257. Der Stoß von Körpern, welche um feste Achsen drehbar sind 1340
§ 258. Schiefe Stöße 1343
§ 259. Beanspruchung auf Zug und Druck infolge von Stößen 1350
§ 260. Beanspruchung auf Schub infolge von Stößen 1354
§ 261. Beanspruchung auf Biegung infolge von Stößen 1354
§ 262. Beanspruchung auf Verdrehung infolge von Stößen 1358
§ 263. Schlußbemerkungen 1360

Dritte Abteilung (S. 1361 bis 1377).

Das Princip der Erhaltung der Energie.

§ 264. Der Satz von der Erhaltung der Energie als Princip für die Auffassung der Bewegungen der Außenwelt 1361
§ 265. Die Deutung der potentiellen Energie auf Grund einer kinetischen Theorie der Körper 1364

Fünftes Kapitel (S. 1378 bis 1427).

Allgemeine Bemerkungen über Maschinen und über statische Konstruktionen.

§ 266. Die Maschine als Leitung für einen Energiestrom 1378
§ 267. Die Maschine als Getriebe bezw. Systeme von Getrieben 1380
§ 268. Die Maschine als energiedurchströmtes Getriebe bezw. System von Getrieben 1394
§ 269. Die Arbeitsleistung einer Maschine in Bezug auf ihren Zweck (Rohleistung, Nutzleistung, Nebenleistung) 1398
§ 270. Die Arten der Rohenergie bezw. Roharbeit 1404
§ 271. Messungen an Maschinen, im besondern in Bezug auf die Bestimmung von Roharbeit, Nutzarbeit und Nebenarbeit 1408
§ 272. Der Gang der Maschine 1413
§ 273. Die Widerstandsfähigkeit der Maschinenglieder; theoretische und empirische Abmessungen 1417
§ 274. Statische Konstruktionen als Grenzfälle kinetischer Konstruktionen . . 1419
§ 275. Statische und kinetische Konstruktionen in Beziehung zu entsprechenden Modellen 1420
§ 276. Die im Gange befindliche Maschine als Modell des Naturganzen . . 1424

Anwendungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit.
(S. 1428 bis 1544.)

Erste Gruppe: Bauteile, welche hauptsächlich zur Verbindung anderer Bauteile dienen 1429
1. Unterlagsplatten u. s. w. 1429
2. Keile und Platten 1432
3. Niete und Bolzen 1434
4. Schrauben 1440
5. Haken und Ösen 1443

Zweite Gruppe: Teile von Hochbauten und Ingenieurbauten 1447
6. Gemeinsam tragende Balken 1447
7. Armierte Träger bezw. Hängewerke und Sprengwerke 1450
8. Dachkonstruktionen 1457
9. Mauern, im besonderen Futtermauern 1466
10. Gewölbe 1473
11. Die Hauptformen der Brückenträger 1476
12. Durchgehende Gelenkträger (Gerbersche Träger) 1477

Seite

Dritte Gruppe: Maschinenteile 1487
13. Zähne an Zahnrädern und Zahnstangen 1487
14. Scheiben und Räder 1491
15. Achsen und Wellen 1494
16. Zapfen 1499
17. Lager 1503
18. Riemen- und Seilbetriebe 1504
19. Riemen (Gurte), Seile und Ketten zum Heben von Lasten u. s. w. . . . 1511
20. Kolben und deren Stangen 1512
21. Das Kurbelgetriebe 1513
22. Cylinder und Röhren 1522
23. Gerade Biegungsfedern 1522
24. Gerade Drehungsfedern 1527
25. Federschwingungen 1528
26. Stöße innerhalb einer Maschine 1528
27. Das ballistische Pendel 1530
28. Das Einrammen von Pfählen 1531
29. Der Betrieb von Pochstempeln 1533
30. Hammerbetriebe 1535

* * *

31. Bestimmung der Dichtigkeit der Erde bezw. der Gravitationskonstante k durch Drehungsschwingungen 1540

Übungen zur Lehre von der Elasticität und Festigkeit.
(S. 1545 bis 1618.)

Nr. 1 bis 354 1545
Erste Gruppe: Grundanschauungen und Grundbegriffe 1545
Zweite Gruppe: Beanspruchung durch Zug und Druck 1548
Dritte Gruppe: Beanspruchung durch Schub 1555
Vierte Gruppe: Beanspruchung durch Biegung 1556
a) Balkenquerschnitte 1556, b) Freiträger (Fall I) 1560, c) Zweistützenträger (Fall II) 1562, d) Einseitig eingespannter Träger (Fall III) 1565, e) Beiderseits eingespannter Träger (Fall IV) 1566, f) Graphostatische Behandlung gemäß § 155 1567, g) Weitere Fälle der Belastung u. s. w. 1570, h) Dreistützenträger u. s. w. 1571, i) Bewegliche Belastungen 1572, k) Schubspannungen im gebogenen Balken 1573, l) Schiefe Belastung 1578, m) Formänderungsarbeit bei Biegungen u. s. w. 1580.
Fünfte Gruppe: Beanspruchung auf Verdrehung 1581
Sechste Gruppe: Beanspruchung auf Knickung u. s. w. 1583
Siebente Gruppe: Anstrengung bei Fällen zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit 1587
Achte Gruppe: Fachwerke 1589
Neunte Gruppe: Krumme Stäbe 1594
Zehnte Gruppe: Plattenförmige Körper 1598
Elfte Gruppe: Erddruck 1599
Zwölfte Gruppe: Temperaturspannungen 1602
Dreizehnte Gruppe: Bewegungsspannungen 1605
Vierzehnte Gruppe: Stöße von Körpern 1608

Schlußbemerkung 1619
Zusammenstellung einiger häufig vorkommender Bezeichnungen 1620
Sachregister 1624

Vierter Abschnitt.

Dynamik elastisch-fester Körper.

Erstes Kapitel.

Begründung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit.

111. Formänderungen (Deformationen) unter dem Einflusse von Kräften. Bisher wurde im allgemeinen vorausgesetzt, daß die Körper der Außenwelt mit hinreichender Genauigkeit durch das Bild des starren Körpers dargestellt werden können. Thatsächlich erleiden aber die Körper der Außenwelt unter dem Einflusse angreifender Kräfte stets mehr oder minder erhebliche Formänderungen (Deformationen), auf welche bisher nur gelegentlich durch die eine oder die andere vorgreifende Bemerkung hingewiesen wurde.

Die Kenntnis dieser Formänderungen ist erforderlich, um beurteilen zu können, mit welcher Annäherung überhaupt Körper der Außenwelt von Fall zu Fall als starre Körper angesehen werden dürfen.

Wir werden diese Formänderungen in ihren Beziehungen zu den Kräften, welche ihnen entsprechen, im folgenden für die festen Körper der Außenwelt darstellen und zwar mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Technik.

Später (im zweiten Bande) wird die Untersuchung auch auf Flüssigkeiten und Gase ausgedehnt werden.

Schon bei einfachen Aufgaben über Reaktionen (vergl. S. 472 und S. 638) zeigte es sich, daß es in gewissen Fällen für deren Bestimmung nicht ausreicht, die festen Körper der Außenwelt als starre Körper anzusehen. Außerdem ist aber bisher überhaupt noch nicht in Betracht gezogen worden, daß alle Körper der Außenwelt erfahrungsmäßig unter der Einwirkung relativ großer Kräfte Formänderungen unterliegen, welche als Zerstörungen der Körper bezeichnet werden müssen, und daß infolgedessen die Verwendung der Statik und Kinetik des starren Körpers stets an die Voraussetzung gebunden ist, daß die eingeführten Kräfte bestimmte Größen nicht überschreiten.

Erfahrungsmäßig treten mit den Formänderungen, welche durch äußere Kräfte an einem festen Körper hervorgerufen werden, zugleich innerhalb des

Vierter Abschnitt.

Dynamik elastisch-fester Körper.

Erstes Kapitel.

Begründung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit.

111. Formänderungen (Deformationen) unter dem Einflusse von Kräften. Bisher wurde im allgemeinen vorausgesetzt, daß die Körper der Außenwelt mit hinreichender Genauigkeit durch das Bild des starren Körpers dargestellt werden können. Thatsächlich erleiden aber die Körper der Außenwelt unter dem Einflusse angreifender Kräfte stets mehr oder minder erhebliche Formänderungen (Deformationen), auf welche bisher nur gelegentlich durch die eine oder die andere vorgreifende Bemerkung hingewiesen wurde.

Die Kenntnis dieser Formänderungen ist erforderlich, um beurteilen zu können, mit welcher Annäherung überhaupt Körper der Außenwelt von Fall zu Fall als starre Körper angesehen werden dürfen.

Wir werden diese Formänderungen in ihren Beziehungen zu den Kräften, welche ihnen entsprechen, im folgenden für die festen Körper der Außenwelt darstellen und zwar mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Technik.

Später (im zweiten Bande) wird die Untersuchung auch auf Flüssigkeiten und Gase ausgedehnt werden.

Schon bei einfachen Aufgaben über Reaktionen (vergl. S. 472 und S. 638) zeigte es sich, daß es in gewissen Fällen für deren Bestimmung nicht ausreicht, die festen Körper der Außenwelt als starre Körper anzusehen. Außerdem ist aber bisher überhaupt noch nicht in Betracht gezogen worden, daß alle Körper der Außenwelt erfahrungsmäßig unter der Einwirkung relativ großer Kräfte Formänderungen unterliegen, welche als Zerstörungen der Körper bezeichnet werden müssen, und daß infolgedessen die Verwendung der Statik und Kinetik des starren Körpers stets an die Voraussetzung gebunden ist, daß die eingeführten Kräfte bestimmte Größen nicht überschreiten.

Erfahrungsmäßig treten mit den Formänderungen, welche durch äußere Kräfte an einem festen Körper hervorgerufen werden, zugleich innerhalb des

Körpers Kräfte auf, welche als Änderungen der, bereits vor der Deformation vorhandenen, den Zusammenhang der materiellen Punkte des Körpers bedingenden Kräfte angesehen werden können.

Diese neu auftretenden inneren Kräfte wirken stets auf eine Beseitigung der Formänderung hin, welche unter dem Einflusse der äußeren Kräfte eintritt.

Infolgedessen nimmt ein deformierter Körper, solange die äußeren Kräfte gewisse Werte nicht überschreiten, wieder nahezu seine ursprüngliche Gestalt und überhaupt seinen ursprünglichen Zustand an, wenn er der Einwirkung dieser Kräfte entzogen wird. Man bezeichnet die Eigenschaft der Körper, welche sich in diesem Verhalten äußert, als *Elasticität*, und sagt von den *äußeren Kräften* und auch von den, ihnen *entsprechenden Formänderungen*, daß sie *unterhalb der Elasticitätsgrenze* liegen, wenn die bei der Beseitigung der äußeren Kräfte zurückbleibenden Formänderungen so klein sind, daß man sie innerhalb der Grenzen der gewählten Genauigkeit vernachlässigen kann.

Erscheint diese Vernachlässigung der bleibenden Formänderungen nicht mehr als zulässig, so sagt man, daß die *äußeren Kräfte* und die, ihnen *entsprechenden Formänderungen oberhalb der Elasticitätsgrenze* liegen. Dies ist natürlich bei jeder *thatsächlichen Zerstörung* des Materiales der Fall, z. B. bei dem Zerreißen einer Eisenstange durch in der Achse wirkende Zugkräfte, bei dem Zerquetschen eines Steinwürfels durch Druckkräfte auf gegenüberliegenden Flächen u. s. w.

Mit Rücksicht auf diese Verhältnisse bezeichnet man die *festen Körper der Außenwelt* im Gegensatz zu den, als starr vorausgesetzten Körpern auch als *elastisch-feste Körper*; man will damit ausdrücken, daß sie unter dem Einfluß äußerer Kräfte zwar Formänderungen zeigen, bei Beseitigung dieser Kräfte aber infolge innerer Kräfte ihre ursprüngliche Gestalt nahezu wieder annehmen, solange sich der ganze Vorgang unterhalb der Elasticitätsgrenze abspielt.

Für die Praxis ist es außerdem von größter Wichtigkeit, festzustellen, welche *Formänderungen* oder welche *Kräfte* bei einer bestimmten Konstruktion als *zulässig* zu bezeichnen sind, ohne daß man eine Gefährdung derselben zu befürchten hat. Man bezeichnet derartige Untersuchungen, bei welchen man auf eine mehr oder minder deutlich auftretende *Zerstörung des Materiales durch äußere Kräfte* Rücksicht zu nehmen hat, als Untersuchungen über die *Festigkeit* der Materialien.

Im Hinblick auf alle diese Beziehungen ist es in der Praxis üblich, die *Dynamik elastisch-fester Körper*, soweit sie für die Technik in Frage kommt, als *Lehre von der Elasticität und Festigkeit* zu bezeichnen.

Die Bestimmung der inneren Kräfte, welche infolge der Beanspruchung des Körpers durch äußere Kräfte auftreten, ist bereits in §§ 65 und 66 insofern vorbereitet, als dort durch die Methode der Schnitte festgestellt wurde, welcher Kraft und welchem Kräftepaar ein System solcher innerer Kräfte gleichwertig ist.

Diese Bestimmung muß nun ergänzt werden, indem man die *erfahrungsmäßig vorhandenen Beziehungen* zwischen diesen *inneren*

Kräften und den Formänderungen und zwischen den Formänderungen und den äußeren Kräften aufsucht.

Dabei hat man den zu untersuchenden Körper bei statischen Konstruktionen im allgemeinen nur in zwei Zuständen zu betrachten, nämlich einmal, bevor die Formänderung eingetreten ist, und dann, nachdem diese Formänderung vollendet ist, während man die Zwischenzustände der sich bildenden Formänderung meist nicht zu berücksichtigen braucht.

Jedem dieser beiden Grenzzustände entspricht Gleichgewicht, dem ersten Gleichgewicht der äußeren Kräfte für den ganzen Körper, dem zweiten Gleichgewicht der äußeren und inneren Kräfte bezw. auch nur der inneren Kräfte und zwar für jeden Teilkörper, den man durch Schnitte bilden kann.

Bei kinetischen Konstruktionen tritt ein entsprechendes Verfahren ein, unter Berücksichtigung der Effektivkräfte gemäß dem Principe von d'Alembert, wobei natürlich der Ansatz des Gleichgewichtes im allgemeinen immer nur für einen bestimmten Zeitpunkt in Geltung ist. Bei der Schwierigkeit der Untersuchungen letzterer Art pflegt man für die Praxis in den meisten Fällen kinetische Konstruktionen so zu berechnen, als wenn es sich um statische Konstruktionen handelte, und dann die dabei erhaltenen Grenzwerte für die wirkenden Kräfte bezw. für die zugehörigen Formänderungen, der Erfahrung gemäß, entsprechend zu verändern.

112. Die Flächenkräfte und die entsprechenden Spannungen. Sieht man von den Effektivkräften der Bewegung ab, deren Berücksichtigung stets gemäß dem Principe von d'Alembert (vergl. § 66) geschieht, so sind innerhalb der technischen Mechanik (vergl. S. 15) nur solche Massenkräfte (vergl. S. 272 u. f.) zu berücksichtigen, welche der gegenseitigen Massenanziehung je zweier Atome entsprechen.

Von den äußeren Kräften, welche als Massenkräfte unmittelbar auf die einzelnen materiellen Punkte eines Körpers wirken, kommen demnach hier nur solche in Frage, welche der gegenseitigen Anziehung der Körper untereinander und der Körper und der Erde entsprechen. Erstere ist meist [1]) zu vernachlässigen, während letztere stets durch Einführung des im Schwerpunkte haftenden Gewichtes berücksichtigt wird.

Alle anderen äußeren Kräfte, welche innerhalb der technischen Mechanik in Frage kommen, treten nur bei Berührung des betrachteten Körpers mit anderen Körpern auf, d. h. sie wirken durch Vermittelung einer Berührungsfläche von einem Körper auf den anderen.

Bisher war es meist zulässig, statt der Berührungsfläche einen Punkt in dieser als dynamisches Centrum zu betrachten und in einer Geraden durch dieses Centrum die wirkende Kraft gewissermaßen verdichtet zu denken. In diesem Sinne haben wir bisher (vergl. S. 272) stets von der Einwirkung einer Kraft auf einen Punkt eines Körpers gesprochen, falls es sich nicht um

[1]) Zu berücksichtigen ist sie z. B. bei der Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde durch die Torsionswage.

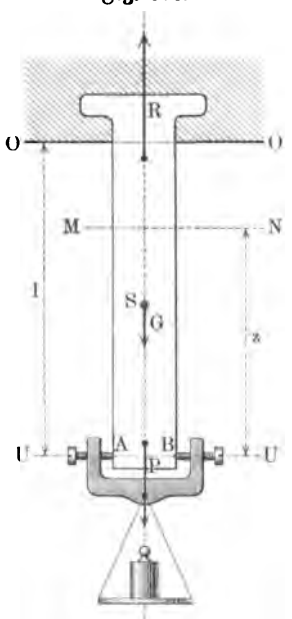
das Eigengewicht des Körpers handelte, welches ja als Resultante eines unendlichen Systemes von Massenkräften erschien.

Diese einfache Veranschaulichung ist auch bei Berücksichtigung der Formänderungen der Körper weiter erlaubt, sie reicht aber dabei nicht mehr aus.

Abgesehen von dem Eigengewicht des ganzen Körpers, müssen wir uns jetzt jede äußere, auf den Körper wirkende Kraft in Beziehung denken zu einer Fläche (Teil der Oberfläche), durch deren Vermittelung sie zur Wirkung kommt.

Entsprechendes gilt auch für die inneren Kräfte eines Körpers, welche den, durch die äußeren Kräfte bewirkten Formänderungen entsprechen, d. h. für jede beliebige Fläche im Innern eines Körpers sind jetzt Kräfte einzuführen, welche durch Vermittelung jener Fläche zur Wirkung kommen. Dabei ist besonders zu bemerken, daß unter diesen Kräften auch die Gewichte von Teilen des Körpers auftreten, da das Gewicht eines solchen Teiles für andere solche Teile als eine äußere Belastung aufzufassen ist.

Fig. 573.



Will man z. B. die Formänderung eines senkrecht befestigten prismatischen Stabes, wie sie Fig. 573 entspricht, zwischen O und U berücksichtigen, so würde die Gesamtbelastung $[P]$ im Verein mit dem Eigengewichte $[G]$ und der Reaktion $[R]$, deren Wert $P + G$ ist, falls diese Kräfte sämtlich in die Vertikale des Schwerpunktes S fallen, lediglich auf eine Verlängerung des Körpers innerhalb dieser Geraden schließen lassen, und allenfalls auf weitere, nach außen zu abnehmende Verlängerungen. Thatsächlich dehnen sich z. B. bei einem Stabe aus Schmiedeeisen alle Vertikalen des Körpers nahezu in gleichem Maße, während sich außerdem die Flächengröße für alle Horizontalschnitte (Querschnitte) des Körpers nahezu in gleichem Maße verringert. Der Widerspruch verschwindet, wenn man bedenkt, daß P thatsächlich durch Vermittelung der Querschnittsfläche AB wirkt und daß die vorausgesetzte Verdichtung dieser Wirkung in der Vertikalen durch S nur eine Veranschaulichung ist, welche sich bisher für die Darstellung der Verhältnisse, z. B. für die Bestimmung der Reaktion $[R]$, als ausreichend erwiesen hat.

Dabei ist aber ferner auch zu beachten, daß für jeden Schnitt MN das Gewicht des unteren Teiles des Körpers für den oberen Teil als äußere Kraft wirkt und zwar durch Vermittelung der Fläche MN.

Ist f der Querschnitt des Balkens, dessen Material das specifische Gewicht γ haben mag, so ist die Belastung für MN durch $[P]$ und durch das Prisma zwischen MN und AB vom Gewichte $(z \,.\, f) \,.\, \gamma$ gegeben, d. h. sie beträgt $P + zf\gamma$. Bei einer genaueren Betrachtung hat man also darauf

Rücksicht zu nehmen, daß auf den Querschnitt bei O die Belastung $P + lf\gamma = P + G$ wirkt, auf den Querschnitt bei U aber nur die Belastung P und daß für die Querschnitte zwischen O und U für diese Belastung $P + zf\gamma$ in Ansatz zu bringen ist.

Denkt man sich den Stab durch Horizontalschnitte in gleiche, beliebig kleine Teile (Platten) von der Höhe l' zerlegt, so gelangt man unter der Voraussetzung, daß gleiche Teile eines Querschnittes durch die Belastung in gleicher Weise beansprucht werden, nunmehr hier zu folgendem Schlusse: Alle Vertikalen des Stabes zeigen dieselbe Verlängerung, aber die einzelnen Strecken einer Vertikalen von der Größe l' zeigen verschiedene Verlängerungen und zwar nehmen diese Verlängerungen (für l') ab in der Richtung OU. Nur wenn $[P]$ gegenüber $[G]$ sehr groß ist, sind die Verlängerungen der einzelnen Strecken l' angenähert einander gleich, weil dann $P + zf\gamma \sim P$ ist.

Diese Schlüsse werden durch die Erfahrung bestätigt, welche außerdem auch noch darauf hinweist, daß sich die Flächen der einzelnen Horizontalschnitte nahezu in gleichem Maße verringern.

Entsprechendes gilt für den Fall, daß der Stab in seiner Achsenrichtung durch $[P]$ gedrückt wird, wobei sich die Horizontalschnitte vergrößern.

Betrachtungen, wie sie unser Beispiel erläutert, haben nun zu den folgenden Festsetzungen[1]) geführt, bei denen das Wort „Kraft" in dem bisher verwandten Sinne (Darstellung durch einen Vektor) benutzt wird, während die Fläche, durch deren Vermittelung die Kraft wirkt, ein- für allemal als ebene Fläche vorausgesetzt wird.

Wirkt eine Kraft $[P]$ durch Vermittelung der (ebenen) Fläche f, so bezeichnet man

$$\frac{P}{f} = \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 252)$$

als die mittlere Spannung der Kraft P für die Fläche f.

Zerlegt man f in die Teile $f_1, f_2, \ldots f_n$, so kommen für diese Teile bezw. die Teilkräfte $[P_1], [P_2], \ldots [P_n]$, welche mit $[P]$ gleichsinnig-parallel sind, zur Geltung, und demgemäß lassen sich die Spannungen

$$\frac{P_1}{f_1} = \sigma_1, \qquad \frac{P_2}{f_2} = \sigma_2 \cdots \frac{P_n}{f_n} = \sigma_n$$

bilden.

Über eine solche „Verteilung" von $[P]$ auf die Fläche f läßt sich in theoretischer Hinsicht nichts aussagen, abgesehen davon, daß

$$P_1 + P_2 + \ldots P_n = P$$

oder

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + \ldots f_n\sigma_n = f\sigma$$

ist.

Unter der Richtung der Spannung versteht man die Richtung der entsprechenden Kraft.

---

[1]) Diese sind bereits früher, soweit sie den Erklärungen in einem ersten Lehrgange der Physik entsprechen, gelegentlich (vergl. S. 546 u. f.) verwendet worden.

Kommen auf gleiche noch so kleine Teile von f gleiche Teilkräfte, so ist die Spannung für jeden Teil der Fläche der mittleren Spannung für die ganze Fläche gleich. In diesem Falle, den man als gleichmäßige Verteilung der Kraft P auf die Fläche f bezeichnet, kann man kurz von der Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ sprechen. Hier ist, wie der Satz von den Massenmomenten lehrt, der Schwerpunkt der Fläche dynamisches Centrum, d. h. für eine Verdichtung der gesamten Kraftwirkung hat man die Gerade der Kraft durch diesen Punkt zu legen. Bei ungleichmäßiger Verteilung der Kraft P auf die Fläche f muß man die Spannung für Flächenelemente einführen, d. h. den Grenzwert der mittleren Spannung für eine beliebig-kleine Fläche.

Fig. 574 a.

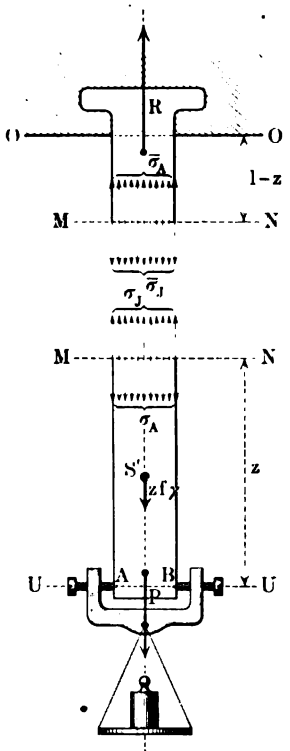


Fig. 574 b.

Ist σ die Spannung für das Flächenelement φ, so ist $\varphi \cdot \sigma$ die Kraft, welche auf dieses Flächenelement wirkt; diese Kraft hat man sich stets gleichmäßig auf das Flächenelement verteilt zu denken, so daß sie sich also auch stets in dessen Schwerpunkte (als Angriffspunkt) verdichtet.

Aus den Spannungen für Flächenelemente und diesen Elementen selbst kann man dann für eine Fläche, die aus diesen Elementen erwächst, die Kraft oder die Kräfte bestimmen, welche durch deren Vermittelung zur Wirkung kommen, wobei die Betrachtung auch leicht auf krumme Flächen ausgedehnt werden kann.

Reicht es nicht aus, mit mittleren Spannungen zu arbeiten, so hat man stets auf die Spannungen für Flächenelemente zurückzugreifen und aus diesen weitere Schlüsse zu machen. Die Spannungen für Flächenelemente sind im allgemeinen endliche Größen, während die entsprechenden Kräfte ($\varphi \cdot \sigma$) für eine endliche Spannung (σ) natürlich unendlich klein sind.

Denkt man sich nämlich irgend eine Spannung (σ) für jedes Element der Flächeneinheit gegeben, so stellt $\sigma \cdot 1 = \sigma$ die Kraft dar, welche auf die Flächeneinheit gleichmäßig verteilt werden muß, um für jedes ihrer Elemente die Spannung σ zu geben, d. h. die Spannung stimmt überein mit der Kraft, welche bei gleichmäßiger Verteilung entweder thatsächlich auf die Flächeneinheit wirkt oder bei einer solchen auf diese wirken würde.

Als Einheit für die Messung von Spannungen dient in der technischen Mechanik meist die (technische) Atmosphäre, d. h. der Zug oder Druck von 1 kg für den Quadratcentimeter.

Die Dimension der Spannung[1]) (vergl. S. 271) ist im technischen Systeme Kl^{-2} und im physikalischen Systeme $ml^{-1}t^{-2}$.

Vorstehende Betrachtung mag noch durch das Beispiel der Fig. 573 veranschaulicht werden. Durch die äußere Kraft $[P]$ und durch $[\varepsilon f\gamma]$ in S' wird für den Schnitt MN in Fig. 574 b ein System von Spannungen $[\sigma_A]$ hervorgerufen, welchem ein System von Spannungen $[\sigma_J]$ im Hinblick auf das Gleichgewicht der Kräfte entspricht. Bei gleichmäßiger Verteilung der Kräfte $[P]$ und $[\varepsilon f\gamma]$ auf die Fläche f des Schnittes MN ist $\frac{P+\varepsilon f\gamma}{f}=\sigma$ die Spannung für jedes Flächenelement φ von f, so daß einem Elemente φ die Kraft $\frac{\varphi}{f}(P+\varepsilon f\gamma)$ entspricht. Dem Systeme der Gegenspannungen $[\sigma_{\bar{J}}]$ entspricht (vergl. Fig. 574 a) ein System von Spannungen $[\sigma_{\bar{A}}]$, welches durch die entgegengesetzt wirkenden Kräfte $[R]$ und $[(l-\varepsilon)f\gamma]$ hervorgerufen wird.

113. Normalspannungen und Tangentialspannungen und die entsprechenden Formänderungen. Für die inneren Kräfte ist nun eine Kraftzerlegung von grundlegender Bedeutung, welche auch schon bei den äußeren, auf die Oberfläche des Körpers wirkenden Kräften gelegentlich (Normaldruck und Reibung) zur Verwendung gekommen ist, nämlich die Zerlegung in zwei Komponenten, von denen die eine senkrecht steht zu dem Flächenelemente, durch dessen Vermittelung die Kraft wirkt, während die andere in diesem Flächenelemente selbst liegt.

Fig. 575 a.

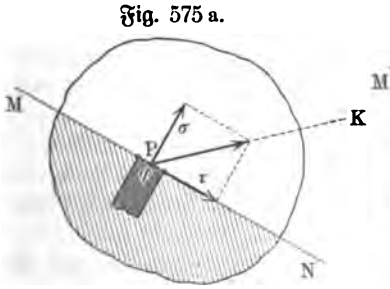
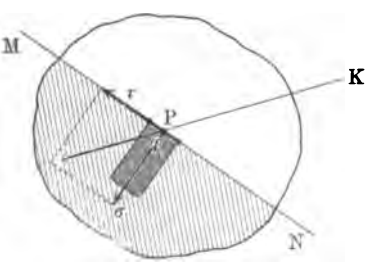


Fig. 575 b.



Man bildet aus diesen beiden Komponenten die entsprechenden Spannungen und unterscheidet diese als Normalspannung (σ) und Tangentialspannung (τ).

Stellt MN in Fig. 575 a und Fig. 575 b einen Schnitt durch einen Körper dar und ist P der Schwerpunkt eines in der Schnittfläche gelegenen Flächenelementes φ, so ist durch die Kraftrichtung PK bezw. KP und die Normale des Elementes eine Ebene gegeben, in welcher die Normalspannung (σ) und die Tangentialspannung $[\tau]$ liegt.

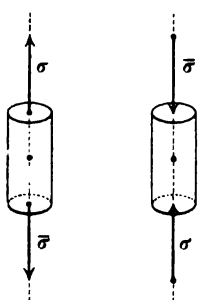
[1]) Statt „Spannung" ist vielfach der Ausdruck „Specifische Spannung" üblich. Da „specifisch" stets auf bestimmte Materialien (species) hinweist, so ist diese Bezeichnung durchaus irreleitend.

Durch die $[\sigma]$ entsprechende Kraft vom Werte $\sigma . \varphi$ wird das Element φ in Fig. 575a von dem schraffierten Teile des Körpers fortgezogen, in Fig. 575b wird es ebenso an diesen angedrückt, während durch $[\tau]$ in beiden Figuren eine Einwirkung auf φ innerhalb der Schnittfläche ausgeübt wird, deren Ursache $\varphi . \tau$ man als „Schub" bezeichnet.

Man unterscheidet die Normalspannungen infolgedessen in Zugspannungen und Druckspannungen, während man die Tangentialspannungen auch als Schubspannungen bezeichnet.

Denkt man sich φ als Grundfläche eines geraden Cylinders, so sucht $[\sigma]$ diesen in Fig. 575a zu verlängern und in Fig. 575b zu verkürzen, während $[\tau]$ in beiden Figuren die Grundfläche dieses Cylinders gegen einen benachbarten Querschnitt desselben zu verschieben bestrebt ist.

Fig. 576a.



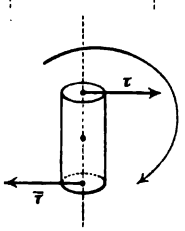


Fig. 576b.

Als Formänderungen entsprechen demnach den Normalspannungen Änderungen der Länge und zwar den Zugspannungen Verlängerungen, den Druckspannungen Verkürzungen, während den Tangentialspannungen eigentümliche, als Verschiebungen zu bezeichnende, Formänderungen entsprechen.

Dazu ist noch zu bemerken, daß der Verlängerung des Cylinders über φ durch die Zugspannung $[\sigma]$ eine Verkleinerung seines Querschnittes φ und daß der Verkürzung des Cylinders über φ durch die Druckspannung $[\sigma]$ eine Vergrößerung seines Querschnittes φ entspricht, wie bereits bei dem Beispiele der Fig. 573 hervorgehoben wurde.

Man nennt diese Vergrößerung bezw. Verkleinerung, welche senkrecht zu $[\sigma]$ beobachtet wird, die entsprechende Queränderung.

Den Gegenkräften, welche für den Schnitt MN in Fig. 575a und 575b das thatsächlich vorhandene Gleichgewicht herstellen, entsprechen natürlich auch Gegenspannungen $[\sigma]$ und $[\tau]$.

Grenzt man im Innern eines, im Gleichgewicht befindlichen Körpers einen Teilkörper ab, so ist auch das System der Kräfte, welches auf den Teilkörper wirkt, im Gleichgewichte. Dieses besteht, von Massenkräften abgesehen, aus den Kräften, welche durch Vermittelung der Oberfläche des Teilkörpers auf diesen übertragen werden.

Wird der Teilkörper durch ebene Flächen begrenzt, auf welche sich die entsprechenden Oberflächenkräfte gleichmäßig verteilen, so lassen sich für die zugehörigen Spannungen leicht bestimmte Beziehungen ableiten aus den sechs Bedingungen des Gleichgewichts für die, auf den Teilkörper einwirkenden Kräfte.

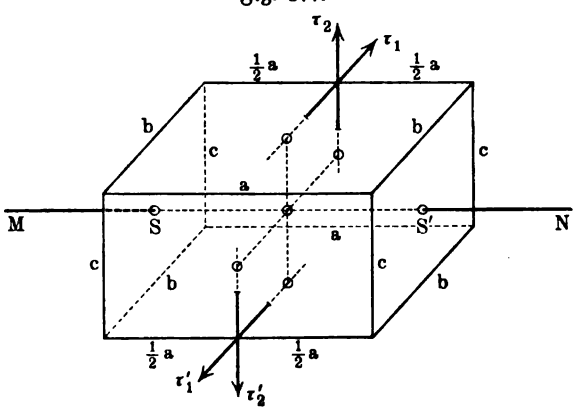
Eine gleichmäßige Verteilung der Oberflächenkräfte ist stets vorhanden, wenn man die Abmessungen des Teilkörpers von ebener Begrenzung unendlich klein wählt, so daß dieser von ebenen Flächenelementen begrenzt wird.

Unter den Beziehungen, welche auf diese Weise für Spannungen ge-

wonnen werden können, fällt eine, welche zugleich von grundlegender Bedeutung ist, fast unmittelbar auf. Während man nämlich das Gleichgewicht eines, in seiner Achsenrichtung von Zug oder Druck ergriffenen elementaren Cylinders mit Rücksicht auf das Princip der Paarwirkung leicht veranschaulichen kann, wie es Fig. 576 a zeigt, führt der Versuch, sich Entsprechendes für den Schub vorzustellen, wie Fig. 576 b darthut, zur Feststellung einer Drehung, welche erst im Verein mit einer Gegendrehung Gleichgewicht geben kann.

Um die Bedingungen eines solchen Gleichgewichtes festzustellen, grenzen wir innerhalb des Materiales ein unendlich-kleines Rechtkant ab, das Fig. 577 darstellen mag. Alle inneren Kräfte, welche auf die, das Prisma begrenzenden Schnittflächen wirken, sind als äußere Kräfte darzustellen, und diese äußeren Kräfte müssen im Verein mit den auf die Masse wirkenden Kräften im Gleichgewicht stehen, so daß auch unter anderem das Moment für eine Symmetrale MN des Prismas verschwinden muß. Da die Begrenzungen Flächenelemente sind, so verdichten sich alle auf sie wirkenden Kräfte in deren Schwerpunkten. Die Kräfte, senkrecht zu den Flächenelementen, welche Normalspannungen entsprechen, tragen nichts zu dem Momente bei, da sie entweder die Achse MN schneiden oder in ihr liegen. Von den Kräften innerhalb der Flächenelemente tragen die, in den (von der Achse durchschnittenen) Flächen S und S' gelegenen Kräfte gleichfalls nichts zu jenen Momenten bei, weil sie die Achse schneiden. Da auch der Schwerpunkt der Masse auf der Achse liegt, so beeinflussen auch die Massenkräfte den Wert des Momentes für MN nicht.

Fig. 577.



Für die Bildung des Momentes sind demnach nur die Kräfte heranzuziehen, welche innerhalb der vier Flächen liegen, welche nach Ausscheidung von S und S' übrig bleiben. Zerlegt man diese Kräfte parallel und senkrecht zur Achse MN, so tragen auch die Komponenten, parallel zur Achse, nichts zum Momente bei, so daß dieses nur durch Kräfte gebildet wird, welche den in Fig. 577 eingezeichneten Spannungen $[\tau_1]$ und $[\tau_1']$, $[\tau_2]$ und $[\tau_2']$ entsprechen.

Da $[\tau_1]$ und $[\tau_1']$ zu Flächen ab gehören und da $[\tau_2]$ und $[\tau_2']$ zu Flächen ac gehören, so handelt es sich um vier Kräfte von den Werten $\tau_1 ab$, $\tau_1' ab$, $\tau_2 ac$, $\tau_2' ac$ bezw. mit den Armen $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}b$.

Da $[\tau_1]$ und $[\tau_1']$ für $\lim c = 0$ und da $[\tau_2]$ und $[\tau_2']$ für $\lim b = 0$ Kraft und Gegenkraft in derselben Fläche darstellen, so sind die Momente von $[\tau_1]$ und $[\tau_1']$ unter sich von gleichem Sinne, ebenso die Momente

von $[\tau_2]$ und $[\tau_2']$; außerdem hat, unter Voraussetzung einer stetigen Änderung von $[\tau_1]$ und $[\tau_2]$, der Unterschied δ_1 von τ_1 und τ_1' für $\lim c = 0$, und ebenso der Unterschied δ_2 von τ_2 und τ_2' für $\lim b = 0$ den Wert Null.

Man hat also bei Gleichgewicht für das Moment den Ansatz:

$$(\tau_1 ab)\frac{c}{2} + (\tau_1' ab)\frac{c}{2} = (\tau_2 ac)\frac{b}{2} + (\tau_2' ac)\frac{b}{2},$$

woraus folgt

$$\tau_1 + \tau_1' = \tau_2 + \tau_2'$$

oder

$$2\tau_1 + \delta_1 = 2\tau_2 + \delta_2.$$

Für $\lim c = 0$ und $\lim b = 0$ ergiebt sich demnach

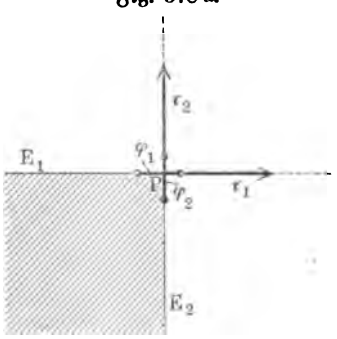
$$\tau_1 = \tau_2.$$

Daraus folgt, daß $\tau_2 = 0$ ist, falls $\tau_1 = 0$ ist, und umgekehrt.

Man gelangt also zu dem Ergebnisse, daß die Schubspannungen stets paarweise auftreten und zwar gemäß folgendem Lehrsatze:

Legt man innerhalb eines Körpers zwei einander senkrecht schneidende Ebenen, so sind die Schubspannungen für zwei Flächenelemente der beiden Ebenen, welche zu einem Punkte ihrer Schnittgeraden gehören, senkrecht zu dieser, einander gleich und entweder beide nach der Schnittgeraden hin gerichtet oder beide von ihr abgewandt.

Fig. 578 a.



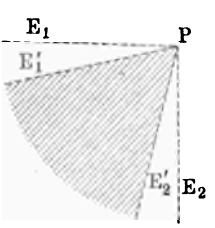


Fig. 578 b.

Weil die Schubspannungen demnach stets paarweise auftreten als $[\tau_1]$ und $[\tau_2]$, so pflegt man von einer, zum Paare $[\tau_1]$ und $[\tau_2]$ vom Werte τ gehörigen Verschiebung zu sprechen.

Stehen in Fig. 578 a die beiden Ebenen, deren Spuren E_1 und E_2 sind, senkrecht auf der Ebene der Zeichnung und tritt demnach ihre Schnittgerade in P senkrecht zu dieser hindurch, so haben die bei P gelegenen Elemente φ_1 in E_1 und φ_2 in E_2 Schubspannungen τ_1 und τ_2 von gleicher Größe innerhalb der Ebene der Zeichnung. Ihnen entspricht eine Formänderung, wie sie in Fig. 578 b dargestellt ist, wobei der rechte Winkel $E_1 P E_2$ in den spitzen Winkel $E_1' P E_2'$ übergeht.

Besonders hervorgehoben werden mag noch, daß die Elemente außerdem noch in anderen Richtungen Schubspannungen zeigen können, daß also die gesamten Schubspannungen für beide Elemente durchaus nicht einander gleich zu sein brauchen.

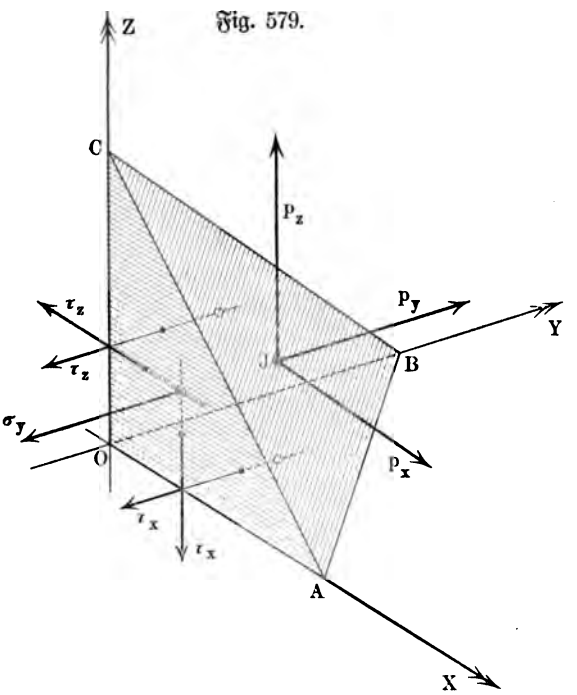
114. Der Spannungszustand für einen Körperpunkt. Unter dem Spannungszustande eines Punktes J im Innern eines Körpers versteht

man die Gesamtheit der Spannungen, welche für alle durch J gelegten Flächenelemente auftreten.

Um den Spannungszustand für J zu bestimmen, macht man irgend ein Flächenelement von J zum Teile der Oberfläche eines möglichst einfachen Körpers von unendlich-kleinen Abmessungen und wendet auf die, ihn angreifenden Kräfte die Regeln des Gleichgewichtes an. Da zur Abgrenzung eines Körpers mindestens vier Ebenen nötig sind, so bietet ein Tetraeder die einfachsten Bedingungen dar.

Macht man demgemäß das Flächenelement durch J, wie es Fig. 579 zeigt, zur Grundfläche ABC eines Tetraeders und zwar, mit Rücksicht auf den oben bewiesenen Satz über die Schubspannungen, zur Grundfläche eines Tetraeders, das an der Spitze O lauter rechte Winkel enthält, so läßt sich die Spannung für $\triangle ABC = \varphi$ ausdrücken durch die Spannungen für $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ und $\triangle OCA$. Wählt man die von O ausgehenden Kanten als Achsen eines rechtwinkeligen Kreuzes und zerlegt man die Spannung p von J für die Fläche φ nach diesen Achsen in die Komponenten p_x, p_y, p_z, so entsprechen diesen Spannungen bezw. Kräfte von den Werten $\varphi \cdot p_x$, $\varphi \cdot p_y$, $\varphi \cdot p_z$.

Fig. 579.



Wir zerlegen nun auch die Spannungen für die anderen Flächen des Tetraeders nach den Achsen, wobei jede Fläche im allgemeinen eine Normalspannung und zwei Schubspannungen zeigt; die sechs Schubspannungen schneiden paarweise die Achsen OX, OY, OZ, so daß für jedes Paar der Satz auf S. 820 gilt. Wir bezeichnen die, zu den Achsen parallelen Normalspannungen durch σ_x, σ_y, σ_z und die beiden Schubspannungen des Paares, welche die X-Achse schneiden, durch τ_x und führen ebenso bezw. τ_y und τ_z ein.

Bezeichnen wir noch die Winkel, welche die Normale aus O auf die Ebene ABC mit den Achsen bildet, bezw. durch α, β, γ, so sind diese Winkel zugleich die Neigungswinkel von $\triangle ACB$ bezw. gegen $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$, so daß diese Dreiecke als Projektionen von $\triangle ACB$, dessen Fläche als φ eingeführt wurde, bezw. die Flächen $\varphi \cdot \cos\alpha$, $\varphi \cdot \cos\beta$, $\varphi \cdot \cos\gamma$ haben.

Für die in Fig. 579 angedeuteten Richtungen der Spannungen gilt dann folgendes:

$\triangle OBC$, dessen Fläche $\varphi \cdot \cos\alpha$ ist, liefert in den Achsenrichtungen bezw. Spannungen von den Werten σ_x, τ_z, τ_y, denen die Kraftwerte $\sigma_x \cdot \varphi \cdot \cos\alpha$, $\tau_z \cdot \varphi \cdot \cos\alpha$, $\tau_y \cdot \varphi \cdot \cos\alpha$ entsprechen.

$\triangle OCA$, dessen Fläche $\varphi \cdot \cos\beta$ ist, liefert in den Achsenrichtungen bezw. Spannungen von den Werten τ_z, σ_y, τ_x, denen die Kraftwerte $\tau_z \cdot \varphi \cdot \cos\beta$, $\sigma_y \cdot \varphi \cdot \cos\beta$, $\tau_x \cdot \varphi \cdot \cos\beta$ entsprechen.

$\triangle OAB$, dessen Fläche $\varphi \cdot \cos\gamma$ ist, liefert in den Achsenrichtungen bezw. Spannungen von den Werten τ_y, τ_x, σ_z, denen die Kraftwerte $\tau_y \cdot \varphi \cdot \cos\gamma$, $\tau_x \cdot \varphi \cdot \cos\gamma$, $\sigma_z \cdot \varphi \cdot \cos\gamma$ entsprechen.

Wirken nun auf die Masse des Tetraeders die Kräfte X, Y, Z, deren Vorzeichen mit denen der Komponenten $[p_x]$, $[p_y]$, $[p_z]$ in Übereinstimmung sein mögen, so ist eine Verschiebung des Tetraeders ausgeschlossen, wenn sich die Komponenten in Richtung der Achsen zerstören, d. h. wenn gilt

$$1)\quad X + \varphi \cdot p_x = \sigma_x \cdot \varphi \cdot \cos\alpha + \tau_z \cdot \varphi \cdot \cos\beta + \tau_y \cdot \varphi \cdot \cos\gamma,$$
$$2)\quad Y + \varphi \cdot p_y = \tau_z \cdot \varphi \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \varphi \cdot \cos\beta + \tau_x \cdot \varphi \cdot \cos\gamma,$$
$$3)\quad Z + \varphi \cdot p_z = \tau_y \cdot \varphi \cdot \cos\alpha + \tau_x \cdot \varphi \cdot \cos\beta + \sigma_z \cdot \varphi \cdot \cos\gamma.$$

Läßt man nun O mit J zusammenfallen, so erhält das Tetraeder das Volumen Null und es verschwinden nach Division durch φ die Größen $\frac{X}{\varphi}, \frac{Y}{\varphi}, \frac{Z}{\varphi}$. Für die vier, durch O oder J gehenden Ebenen gilt also,

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad p_x &= \sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_z \cdot \cos\beta + \tau_y \cdot \cos\gamma \\ 2)\quad p_y &= \tau_z \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \cos\beta + \tau_x \cdot \cos\gamma \\ 3)\quad p_z &= \tau_y \cdot \cos\alpha + \tau_x \cdot \cos\beta + \sigma_z \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 253)$$

Kennt man also die Spannungen für drei Ebenen durch O oder J, welche ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bilden, so liefern die Gleichungen Nr. 253) die Komponenten der Spannung p für irgend eine (vierte) Ebene, deren Normale mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet.

Da die Auflösung des Gleichungssystemes der Nr. 253) nach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ diese Größen linear durch p_x, p_y, p_z bestimmt, so liefert die bekannte Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ eine quadratische Gleichung für p_x, p_y, p_z.

Faßt man p_x, p_y, p_z als Koordinaten auf in dem System OX, OY, OZ, so bestimmen sie also Punkte einer Oberfläche zweiten Grades.

Da $[p_x]$, $[p_y]$, $[p_z]$ die Komponenten von $[p]$ sind, so hat man also das Ergebnis: Stellt man für jedes Flächenelement, welches durch einen Punkt J eines Körpers gelegt werden kann, die entsprechende Spannung als Vektor mit dem Ursprunge J dar, so liegen die Endpunkte aller dieser Vektoren auf einer Fläche zweiten Grades.

Da alle Spannungen endliche Werte haben, so ist diese Fläche ein Ellipsoid, welches das zu J gehörige Spannungsellipsoid heißt.

Für den Sonderfall, daß für Fig. 579 die Schubspannungen τ_x, τ_y, τ_z den Wert Null haben, gehen die Gleichungen Nr. 253) über in

$$p_x = \sigma_x \cdot \cos\alpha$$
$$p_y = \sigma_y \cdot \cos\beta$$
$$p_z = \sigma_z \cdot \cos\gamma,$$

so daß die Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ zu dem Ellipsoide

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_z}\right)^2 = 1$$

führt, welches auf seine Hauptachsen bezogen ist.

Haben τ_x, τ_y, τ_z nicht den Wert Null, so fällt das Kreuz der Hauptachsen des Spannungsellipsoides nicht mit den gewählten Koordinatenachsen zusammen.

Nimmt man in diesem Falle die Hauptachsen des Spannungsellipsoides, welche bezw. die Längen $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$ haben mögen, als Achsen eines neuen Koordinatenkreuzes, so entspricht dieses Kreuz der Fig. 579, falls man $\sigma_x = p_1$, $\sigma_y = p_2$, $\sigma_z = p_3$ und $\tau_x = 0$, $\tau_y = 0$, $\tau_z = 0$ setzt, d. h. p_1, p_2, p_3 sind Normalspannungen, sie stehen auf ihren Flächenelementen, welche frei von Schubspannungen sind, senkrecht.

Demgemäß bezeichnen wir die Spannungen p_1, p_2, p_3, welche Hauptspannungen heißen, bezw. durch σ_1, σ_2, σ_3.

Das Spannungsellipsoid vom Mittelpunkte J mit seinen drei Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3, welche zu schubfreien Flächenelementen gehören, veranschaulicht den Spannungszustand des Punktes J, den wir bestimmen wollten: da das Ellipsoid durch seine drei Halbachsen völlig bestimmt ist, so ist jeder beliebige Spannungszustand durch drei Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 völlig bestimmt.

Zugleich geht aus der Betrachtung hervor, daß man durch drei zu einander senkrechte Normalspannungen σ_1, σ_2, σ_3 einen ganz beliebigen Spannungszustand von den Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 erzeugen kann.

Besonders bemerkt werden mag noch, daß vorstehende Betrachtung für ganz beliebige Körper gilt, also auch für Flüssigkeiten und Gase, da bei ihr keine Voraussetzungen über den inneren Bau des betrachteten Körpers gemacht wurden.

115. Die beiden einfachen Spannungszustände für Zug oder Druck und für Schub. Da ein beliebiger Spannungszustand durch drei zu einander senkrechte Normalspannungen erzeugt werden kann, so ist die Untersuchung eines Spannungszustandes, der nur durch eine Normalspannung bestimmt wird, von besonderer Bedeutung. Wir bezeichnen ihn als einen einfachen Spannungszustand für Zug oder Druck.

Ein solcher entspricht für Zug der Anordnung der Fig. 573, falls das Gewicht des Stabes der Belastung gegenüber vernachlässigt werden kann, er entspricht auch unter derselben Voraussetzung der Anordnung der Fig. 580 (a. f. S.), welche einen, an den Enden mit Köpfen versehenen und mit diesen eingespannten Stab unter dem Einfluß von Zugkräften $[P]$ darstellt; man betrachtet dabei eine Strecke AB (Maßstrecke) in der Mitte des Stabes. Für Druckkräfte gilt Entsprechendes.

Bei einem solchen einfachen Spannungszustande hat (vergl. Fig. 581) jedes Flächenelement φ, welches senkrecht zur Richtung der Spannung liegt, den Zug oder Druck $\varphi \cdot \sigma$ auszuhalten, ist aber schubfrei. Ein Flächenelement φ', welches die Richtung der Spannung unter dem spitzen Winkel δ schneidet, zeigt dagegen eine Normalspannung und eine Schubspannung. Ist φ die Projektion von φ' auf einer Ebene, senkrecht zur Richtung der Spannung, so bestimmen φ und φ' einen schief abgeschnittenen Cylinder, dessen Seiten in die Spannungsrichtung fallen. Da dessen Mantel frei von Spannungen ist, so sind für das Gleichgewicht nur die Spannungen der beiden Grundflächen φ und φ' zu berücksichtigen. Setzt man für φ', welches dem schraffierten Teile des Körpers angehören mag, die Normalspannung $[\sigma']$ und die Tangentialspannung $[\tau']$ an, so entsprechen diesen bezw. die Kräfte $[\varphi'\sigma']$ und $[\varphi'\tau']$.

Fig. 580.

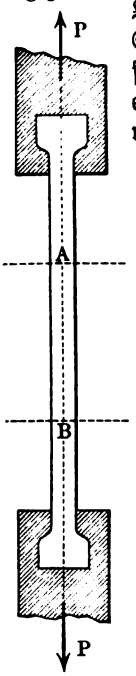
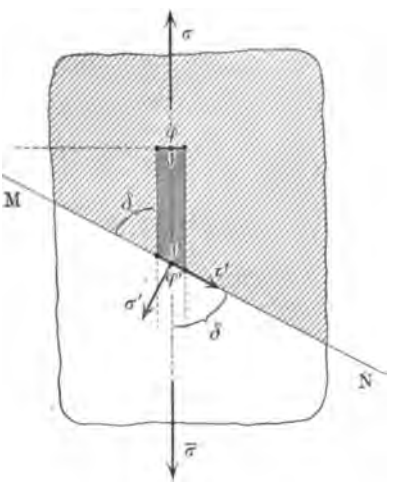


Fig. 581.



Für die Spannungsrichtung $[\sigma]$ geben beide Kräfte bezw. Komponenten vom Werte $\varphi'\sigma' \sin\delta$ und $\varphi'\tau' \cos\delta$, während φ für diese Richtung eine Komponente vom Werte $\varphi\sigma$ liefert. Man hat also für das Gleichgewicht

$$\varphi'\sigma' \sin\delta + \varphi'\tau' \cos\delta = \varphi\sigma$$

oder, da $\varphi' \cdot \sin\delta = \varphi$ ist, auch

$$1) \quad \sigma' \sin\delta + \tau' \cos\delta = \sigma \sin\delta.$$

Senkrecht zur Spannungsrichtung geben $[\sigma']$ und $[\tau']$ Kraftkomponenten, welche sich bei Gleichgewicht aufheben müssen, d. h. man hat

$$2) \quad \sigma' \cos\delta = \tau' \sin\delta.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$\sigma' = \sigma \cdot \sin^2\delta \quad \text{und} \quad \tau' = \tfrac{1}{2}\sigma \cdot \sin 2\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 254)$$

Es ist also $\sigma' = 0$ für $\delta = 0^0$, d. h. für Flächenelemente, welche der Spannungsrichtung parallel sind, während σ' für $\delta = 90^0$ sein Maximum σ hat.

Es ist ferner $\tau' = 0$ für $\delta = 0^0$ und für $\delta = 90^0$, d. h. also für Flächenelemente, welche der Spannungsrichtung parallel sind, und auch für solche, die zu dieser senkrecht sind, während τ' für $\delta = 45^0$ sein Maximum $\frac{1}{2}\sigma$ hat.

Bildet man aus σ' und τ' die resultierende Spannung p, welche in die Spannungsrichtung fällt, so erhält man

$$p = \sqrt{\sigma^2 . sin^4\delta + \tfrac{1}{4}\sigma^2 sin^2 2\delta} = \sigma \, . \, sin\,\delta,$$

wie auch schon Gleichung 1) zeigte.

Ordnet man das betrachtete Flächenelement φ' dem nicht schraffierten Teile des Körpers zu, so treten statt der betrachteten Spannungen deren Gegenspannungen auf.

Dreht man die Ebene MN der Fig. 581, welche senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, um eine Gerade, welche im Schwerpunkt J von φ' zur Ebene der Zeichnung senkrecht steht, so entspricht dem Übergange $\delta = 0^0 \ldots 90^0$ der Übergang $p = 0 \ldots \sigma$. Dreht man die Gerade durch J um die Spannungsrichtung, so entspricht jede ihrer Lagen demselben Übergange $p = 0 \ldots \sigma$.

Fig. 582.

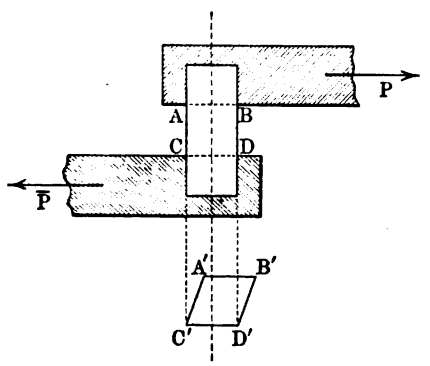
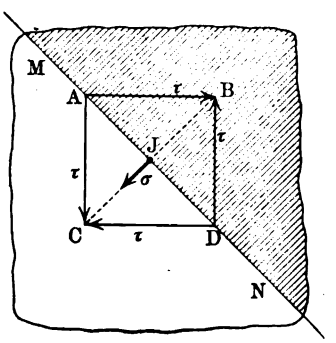


Fig. 583.



Demnach ist das Spannungsellipsoid für J hier eine Doppelstrecke, die man erhält, wenn man von J in der Spannungsrichtung des schraffierten und in der Spannungsrichtung des nicht schraffierten Teiles des Körpers der Fig. 581 einen Vektor vom Werte σ abträgt.

Wir betrachten nun im Gegensatze zu dem behandelten einfachen Spannungszustande für Zug oder Druck einen zweiten solchen, bei dem in Bezug auf Schubspannungen möglichst einfache Beziehungen vorhanden sind.

Die angenäherte Herstellung dieses Spannungszustandes zeigt die Anordnung der Fig. 582, in der ein Rechtkant, von dem eine Kantenrichtung vertikal ist, durch zwei horizontale Backen so gefaßt wird, daß zwischen diesen ein Rechtkant vom quadratischen Vertikalschnitt $ABCD$ frei bleibt. Die Zugkräfte vom Werte P an den Backen sind für die, AB und CD entsprechenden Flächen Schubkräfte, welche den Querschnitt $ABCD$ in den darunter gezeichneten Querschnitt $A'B'C'D'$ überzuführen suchen.

Wir betrachten nun mit Rücksicht auf den Satz über die Schubspannungspaare (vergl. S. 820) einen Spannungszustand, wie ihn Fig. 583 andeutet.

$ABCD$ bezeichne den quadratischen Mittelschnitt eines im Materiale gelegenen unendlich kleinen Rechtkants, dessen Kanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung vor und hinter dieser die Länge $\frac{1}{2}b$ haben, während $AB = a$ ist, unter dem Einflusse der eingezeichneten Schubspannungen. Für den Diagonalschnitt MN, der dem schraffierten Teile des Körpers zugerechnet werden mag, fordert das Gleichgewicht der Kräfte eine bestimmte Spannung.

Da die Schubspannungen τ zu Flächen von der Größe $a \,.\, b$ gehören, so sind die entsprechenden Kräfte $\tau \,.\, (ab)$. Die Vereinigung der Kräfte, welche in AB und in BD wirken, liefert eine Mittelkraft in der Richtung CB vom Werte $2\tau(ab)\cos 45^0$. Diese muß mit der Kraft, welche dem Diagonalschnitte MN angehört, im Gleichgewichte sein, d. h. diese Kraft hat die Richtung BC und ist also eine Normalspannung.

Hat diese Spannung den Wert σ, so hat die entsprechende Kraft, da die Fläche des Diagonalschnittes $AD \,.\, b = \frac{a}{\cos 45^0} \cdot b$ ist, den Wert $\sigma\left(\frac{ab}{\cos 45^0}\right)$ und es ist

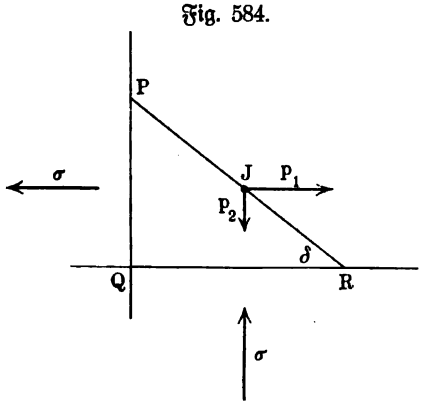
$$\sigma\left(\frac{ab}{\cos 45^0}\right) = 2\tau(ab)\cos 45^0,$$

d. h.

$$\sigma = 2\tau \,.\, \cos^2 45^0 = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 255)$$

Es entspricht also dem Schnitt MN für den schraffierten Teil des Körpers eine Zugspannung $[\sigma]$ in der Richtung BC, deren Wert τ ist; ebenso entspricht dem Schnitte MN für den anderen Teil des Körpers eine Zugspannung $[\sigma]$ in der Richtung CB.

Fig. 584.



Für den Diagonalschnitt durch B und C ergeben sich ebenso Druckspannungen vom Werte τ.

Für den Mittelpunkt J der Diagonale AD sind also zwei sich senkrecht durchkreuzende Normalspannungen vorhanden, deren eine, eine in BC gelegene Zugspannung und deren andere eine in AD gelegene Druckspannung ist.

Der einfache Spannungszustand für Schub (τ) entspricht also der senkrechten Übereinanderlagerung zweier einfacher Normalspannungszustände, deren einer durch eine Zugspannung und deren anderer durch eine Druckspannung vom Werte τ gegeben ist.

Wir betrachten diesen Fall noch etwas näher gemäß Fig. 584, welche den Mittelschnitt PQR eines unendlich-kleinen dreiseitigen Prismas darstellt, dessen Kanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung vor und hinter dieser wieder $\frac{1}{2}b$ sein mögen. Hat die Spannung $[p]$ in J für die Fläche durch PR, den Richtungen der beiden Spannungen vom Werte σ entsprechend, Komponenten vom Werte p_1 und p_2, so ist

$$\sigma(b \,.\, PQ) = p_1(b \,.\, PR) \quad \text{und} \quad \sigma(b \,.\, QR) = p_2(b \,.\, PR),$$

d. h. es ist

$$p_1 = \sigma \cdot \frac{PQ}{PR} = \sigma \,.\, \sin\delta \quad \text{und} \quad p_2 = \sigma \cdot \frac{QR}{PR} = \sigma \,.\, \cos\delta.$$

Man hat also $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sigma$, d. h. die Spannung $[p]$ in J hat für jeden Wert von δ den Wert σ. Dreht man also die Ebene, deren Spur PR ist, um eine Gerade, die in J auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, so beschreibt der Endpunkt des in J haftenden Vektors $[p]$ einen Kreis vom Radius σ.

Um den Spannungszustand von J vollständig zu untersuchen, muß man auch andere Ebenen durch J heranziehen, wobei man am besten auf das Tetraeder der Fig. 579 zurückgreift. Alle Schubspannungen der in O zusammentretenden Flächen haben hier den Wert Null, während von den Spannungen σ_x, σ_y, σ_z zwei den Wert σ und eine den Wert Null hat. Infolgedessen wird das Spannungsellipsoid hier eine Spannungsellipse und zwar ist diese der vorher bestimmte Kreis.

Die senkrechte Übereinanderlegung zweier einfacher Normalspannungszustände von beliebigen Spannungswerten σ_1 und σ_2 führt gemäß Fig. 584 ebenso zu

$$p_1 = \sigma_1 \,.\, \sin\delta \quad \text{und} \quad p_2 = \sigma_2 \,.\, \cos\delta,$$

so daß $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ hier die Spannungsellipse

$$\left(\frac{p_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{\sigma_2}\right)^2 = 1$$

liefert.

Man nennt den einfachen Spannungszustand für Zug oder Druck auch einen linearen Spannungszustand, den Spannungszustand, welcher durch senkrechte Übereinanderlegung zweier linearer Spannungszustände entsteht, einen ebenen Spannungszustand und den allgemeinen Spannungszustand, welcher durch drei sich im Raume senkrecht durchkreuzende lineare Spannungszustände gebildet wird, einen räumlichen Spannungszustand.

Der einfache Spannungszustand für Schub ist also ein besonderer ebener Spannungszustand.

116. Einführung der Formänderungen als Dehnungen und Schiebungen. Die Formänderungen der Körper lassen sich, so verwickelt sie auch von Fall zu Fall erscheinen, vollständig durch die Längenänderungen von Strecken darstellen.

Um dies einzusehen, braucht man sich nur jeden Punkt des materiellen Körpers, vor und nach dessen Formänderung, etwa auf ein festes Kreuz von Parallelkoordinaten bezogen zu denken und deren Änderungen zu betrachten. Es hat sich aber als zweckmäßig erwiesen, mit Rücksicht auf den Unterschied der Normal- und Tangentialspannungen, neben den Änderungen der Längen von Strecken (Verlängerungen und Verkürzungen) noch eine bestimmte Art von Winkeländerungen einzuführen und zwar, mit Rücksicht auf den Satz über die Paare von Schubspannungen, von Änderungen rechter Winkel.

Mit dieser Einführung gewinnt man den Vorteil, die Schubkräfte ebenso mit bestimmten Änderungen rechter Winkel in Beziehung zu setzen, wie Zug und Druck mit bestimmten Längenänderungen.

Geht eine Strecke von der Länge l in eine Strecke von der Länge l' über, so wird $(l' - l) : l = \varepsilon$ als mittlere Dehnung der Strecke bezeichnet, wobei man die Dehnungen für Verlängerungen $(l' - l > 0)$ als positiv und für Verkürzungen $(l' - l < 0)$ als negativ einführt. Es gilt also, wenn man den Unterschied von l und l' zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen durch λ bezeichnet,

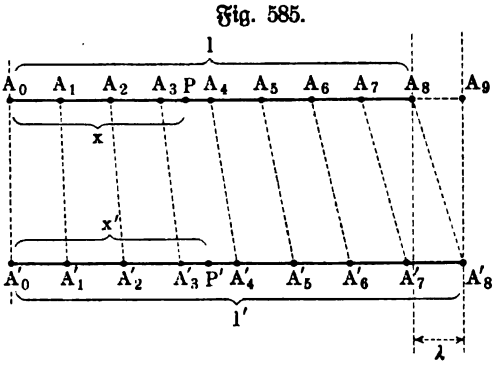
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \frac{+\lambda}{l} &= \frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \text{Mittlere Dehnung (positiv)} \\ \varepsilon = \frac{-\lambda}{l} &= \frac{\text{Verkürzung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \text{Mittlere Dehnung (negativ)} \end{aligned}\right\} \quad 256)$$

Die Dehnung ε ist als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl, und zwar erfahrungsmäßig ein echter Bruch. Man hat ferner

$$l' = l(1 + \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 257)$$

und zwar ist $l' > l$ für $\varepsilon > 0$ und $l' < l$ für $\varepsilon < 0$. Wenn für jeden noch so kleinen Teil der Strecke die mittlere Dehnung denselben Wert hat, d. h. eine Konstante ist, so darf man kurz von einer bestimmten Dehnung der ganzen Strecke sprechen, andernfalls ist die Dehnung für Elemente der Strecke von der mittleren Dehnung der ganzen Strecke zu unterscheiden.

Fig. 585.



Der für Strecken aufgestellte Begriff der Dehnung läßt sich ohne weiteres auf beliebige Linien übertragen, indem man die Dehnungen für deren Elemente betrachtet.

In Fig. 585 ist die Verlängerung einer Strecke l für $\lambda = +\frac{1}{8} l$ bei konstanter Dehnung $\varepsilon = +\frac{1}{8}$ dargestellt; dieselbe Figur zeigt die Verkürzung einer Strecke l' für $\lambda = -\frac{1}{9} l'$ bei konstanter Dehnung $\varepsilon = -\frac{1}{9}$. Beiden Fällen entsprechen bezw. die Ansätze $l' = l(1 + \frac{1}{8})$ und $l = l'(1 - \frac{1}{9})$ und auch für je zwei entsprechende Teile $A_0 P = x$ und $A'_0 P' = x'$ der beiden Strecken gilt stets $x' = x(1 + \frac{1}{8})$ und $x = x'(1 - \frac{1}{9})$. Solche Dehnungen zeigen in großer Annäherung die Vertikalen eines senkrecht gelagerten prismatischen Stahlstabes, der in seiner Achsenrichtung gezogen oder gedrückt wird, falls dieser Zug oder Druck relativ groß ist gegenüber dem Eigengewichte des Stabes (vergl. S. 815). Solche Dehnungen zeigen ferner in großer Annäherung die, ursprünglich parallel zur Achse eines prismatischen Stahlstabes gelegenen Geraden, bei einer Biegung des Stabes, falls die Achse dabei die Gestalt eines Kreisbogens annimmt.

Fig. 586 stellt eine veränderliche Dehnung dar, für welche $x' = x + \frac{1}{8}x^2$ gilt. Für $A_0P = x$ und $A_0Q = x + d$ sind die entsprechenden Längen $A_0'P' = x + \frac{1}{8}x^2$ und $A_0'Q' = (x + d) + \frac{1}{8}(x + d)^2$, so daß der Strecke $PQ = d$ die Strecke $P'Q' = d + \frac{1}{8}(2xd + d^2)$ entspricht.

Man hat also

$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = (1 + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}d) - 1 = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}d$$

als mittlere Dehnung für $P'Q'$ und PQ.

Für $\lim d = 0$ ist die Dehnung an der Stelle x demnach gegeben als $\varepsilon_x = \frac{1}{4}x$. Aus $\varepsilon_x = \frac{1}{4}x$ folgt umgekehrt an der Grenze $P'Q' = PQ(1 + \frac{1}{4}x)$ für $PQ = d$. Teilt man $A_0P = x$ in n gleiche Teile d, so gehen diese der Reihe nach über in $d(1 + \frac{1}{4}d)$, $d(1 + \frac{1}{4} \cdot 2d) \ldots d(1 + \frac{1}{4}nd)$, so daß

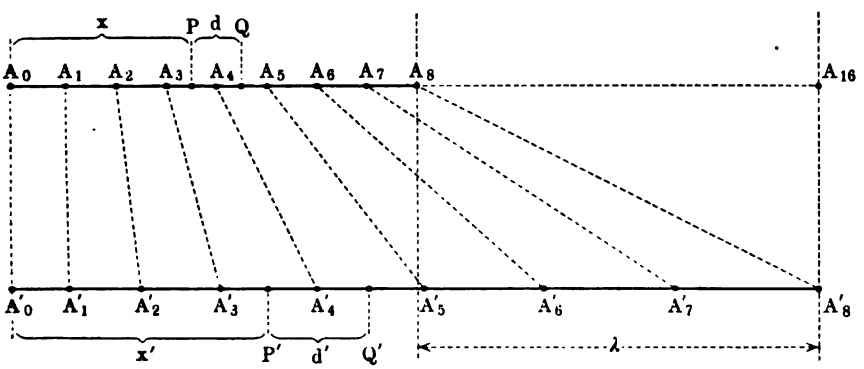
$$A_0P' = nd + \tfrac{1}{4}d^2(1 + 2 + \cdots n) = nd + \tfrac{1}{4}d^2\frac{n(n + 1)}{2}$$

$$= x + \tfrac{1}{8}x^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ist, wobei für $\lim n = \infty$ wieder $A_0P' = x' = x + \frac{1}{8}x^2$ erhalten wird.

Solche veränderliche Dehnungen zeigen die Fasern eines senkrecht gelagerten prismatischen Stahlstabes, der nur durch sein Eigengewicht (vergl.

Fig. 586.



S. 815) belastet ist. Tritt zu dem Eigengewichte $[G]$ die Belastung $[P]$, so ist Fig. 585 mit Fig. 586 zu verbinden, um die Dehnungen darzustellen.

Auch die, ursprünglich parallel zur Achse eines prismatischen Stabes gelegenen Geraden zeigen bei einer Biegung desselben veränderliche Dehnungen, falls die Achse nicht die Gestalt eines Kreisbogens annimmt.

Vorstehende Betrachtung gilt ganz allgemein für irgendwelche beobachtete Dehnungen.

Im besonderen gilt sie für die positiven oder negativen Dehnungen, welche einer Normalspannung in ihrer Richtung entsprechen, und für die zugleich, senkrecht zu dieser auftretenden negativen oder positiven Dehnungen (vergl. S. 818), welche man als Querdehnungen bezeichnet.

Wir veranschaulichen diesen besonders wichtigen Fall noch durch Fig. 587 a und Fig. 587 b. In beiden Figuren ist ein gerader Cylinder vom quadratischen Achsenschnitt $ABCD$ dargestellt, das eine Mal (a) durch Kräfte vom Werte P gezogen, das andre Mal (b) gedrückt.

Fig. 587 a.

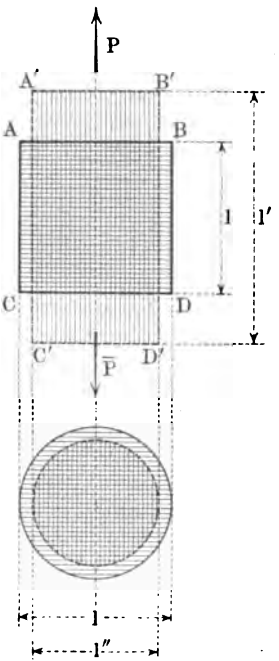
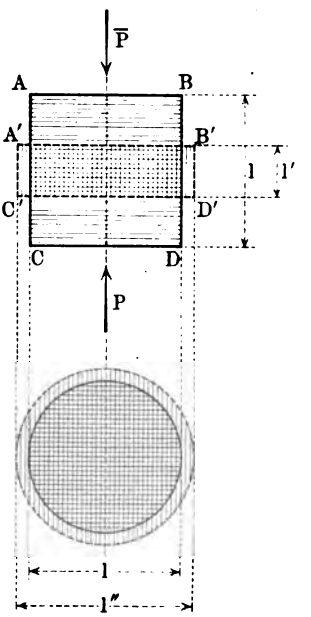


Fig. 587 b.



In Fig. 587 a bewirkt der, in der Achsenrichtung gleichmäßig auf die Grundflächen f verteilte Zug $[P]$ nicht bloß eine, der Zugspannung vom Werte $\sigma = \frac{P}{f}$ entsprechende Verlängerung $l' - l$, der die mittlere positive Längsdehnung $\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{l'}{l} - 1$ entspricht, sondern auch eine Verkürzung, senkrecht zu dieser, bei welcher der Durchmesser l sich auf l'' verkleinert, so daß also die mittlere negative Querdrehung $\varepsilon_q = \frac{l'' - l}{l} = \frac{l''}{l} - 1$ auftritt.

In Fig. 587 a bewirkt der, in der Achsenrichtung gleichmäßig auf die Grundflächen f verteilte Druck $[P]$ nicht bloß eine, der Druckspannung vom Werte $\sigma = \frac{P}{f}$ entsprechende Verkürzung $l' - l$, der die mittlere negative Längsdehnung $\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{l'}{l} - 1$ entspricht, sondern auch eine Verlängerung, senkrecht zu dieser, bei welcher der Durchmesser l sich auf l'' vergrößert, so daß also die mittlere positive Querdrehung $\varepsilon_q = \frac{l'' - l}{l} = \frac{l''}{l} - 1$ auftritt.

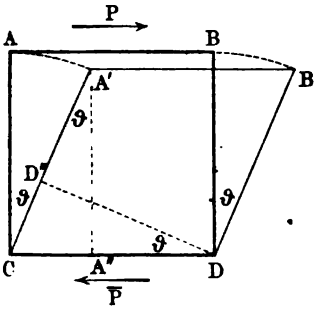
Dabei ist zu bemerken, daß für die in der Technik verwandten Stoffe die Querdehnung stets erheblich kleiner ist, als die Längsdehnung.

Man pflegt $\varepsilon_q = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon$ zu setzen; dabei liegt m für die in der Technik verwandten Stoffe zwischen 3 und 4 und ist für Metalle im Mittel $\frac{10}{3}$.

Früher nahm man (nach dem Vorgange von Poisson) mit Rücksicht auf gewisse Voraussetzungen in Bezug auf den inneren Bau (Struktur) der Körper an, daß m für alle Stoffe eine Konstante sei und bezeichnete m deshalb als die Poissonsche Konstante.

Die Winkeländerungen, welche man mit Rücksicht auf die Paare von Schubspannungen neben den Längenänderungen betrachtet, mögen zunächst durch Fig. 582 veranschaulicht werden, welcher Fig. 588 entspricht.

Fig. 588.



Bei dieser Formänderung bleiben die Kanten, welche in A, B, C, D senkrecht auf der Ebene der Zeichnung standen, senkrecht zu dieser, während das Quadrat $ABCD$ ohne Veränderung der Seitenlängen in einen Rhombus $A'B'C'D'$ übergeht. Es liegt nun nahe, hier die Änderung ϑ des ursprünglich rechten Winkels ACD, welcher in den Winkel $A'C'D'$ übergegangen ist, als Maß der betrachteten Formänderung einzuführen.

Um diese Formänderung auf Längenänderungen von Strecken zurückzuführen, mag folgende Festsetzung dienen:

Gehen ein Punkt P und eine Ebene E aus einer Lage P_1 und E_1 in eine Lage P_2 und E_2 über und sind P_1' und P_2' die senkrechten Projektionen von P auf E bezw. für die beiden Lagen, so heißt $P_1'P_2'$ die Verschiebungsstrecke von P gegen E für die betrachtete Lagenänderung, während das Verhältnis $\frac{P_1'P_2'}{P_1P_1'}$ als entsprechende Schiebung bezeichnet wird. Für den Übergang aus der Lage P_2 und E_2 in die Lage P_1 und E_1 ist ebenso $P_2'P_1'$ die Verschiebungsstrecke von P gegen E, während $\frac{P_2'P_1'}{P_2P_2'}$ die entsprechende Schiebung darstellt. Für den Sonderfall $P_1P_1' = P_2P_2'$, d. h. für den Fall, daß der Punkt P am Anfange und am Ende der betrachteten Lagenänderung denselben Abstand von E hat, sind die beiden Schiebungen einander gleich.

Projiziert man in Fig. 588 demgemäß A und A' auf die (hier unbewegliche) Ebene durch CD, so stellt CA'' die Verschiebungsstrecke von A gegen die Ebene durch CD dar, und es sind

$$\frac{CA''}{CA} = \frac{CA''}{CA'} = \sin\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{A''C}{A'A''} = \operatorname{tng}\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad 258)$$

die beiden Schiebungen von A gegen CD, dargestellt in ihrer Beziehung zu der Winkeländerung ϑ.

Ist ϑ so klein, daß innerhalb der Grenzen der gewählten Genauigkeit

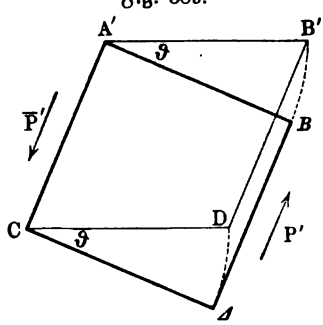
$sin\,\vartheta$ mit $tng\,\vartheta$ und demnach auch mit $arc\,\vartheta$ vertauscht werden darf, so stellt $arc\,\vartheta$, wofür man kurz ϑ schreiben kann, sowohl die Änderung des ursprünglichen rechten Winkels dar, als auch die beiden Schiebungen von A gegen CD.

Diese Grenzbestimmung für ϑ sagt aus ($sin\,\vartheta \sim tng\,\vartheta$ oder $CA' \sim A''A'$), daß man von der Senkung der Oberfläche AB, durch welche der Unterschied von $CA = CA'$ und $A''A'$ bedingt ist, absehen und daß man die Strecke AA' als den zu $\measuredangle ACA'$ gehörigen Bogen vom Kreise vom Radius CA ansehen darf. Da $A''A' = AC \,.\, cos\,\vartheta = AC(1 - \frac{1}{2} arc^2\,\vartheta + \cdots)$ ist, so handelt es sich hierbei um eine erste Annäherung.

Unter dieser Voraussetzung über die Größe von ϑ, welche bei technischen Konstruktionen stets erfüllt ist, bezeichnet man ϑ, gemessen als Arcus, als die Schiebung oder als Gleitung der Ebene durch CA gegen die Ebene durch CD in Fig. 588.

Diese Schiebung ist einerseits die Änderung des ursprünglich einen Rechten betragenden Neigungswinkels der Ebene durch CA gegen die Ebene durch CD, und anderseits die Verschiebungsstrecke für einen Punkt A der Ebene durch CA gegen die Ebene durch CD, falls die Entfernung dieses Punktes A von der Ebene durch CD als Einheit der Längenmessung ($CA = 1$) genommen wird.

Fig. 589.



Da der Neigungswinkel der Ebene durch CA gegen die Ebene durch CD zugleich der Neigungswinkel der Ebene durch CD gegen die Ebene durch CA ist, so muß sich ϑ, lediglich in geometrischer Hinsicht betrachtet, auch als Verschiebungsstrecke eines Punktes D der Ebene durch CD gegen die Ebene durch CA darstellen, falls die Entfernung dieses Punktes D von der Ebene durch CA als Einheit der Längenmessung ($CD = 1$) genommen wird.

Projiziert man den Punkt D, der sich auf der Ebene durch CA in C projiziert, auf die Ebene durch CA', so ist CD'' die entsprechende Verschiebungsstrecke für D, für welche wieder gilt

$$\frac{CD''}{CD} = sin\,\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{D''C}{D''D} = tng\,\vartheta.$$

Dreht man $ABCD$ in Fig. 588 um C so, daß CA mit CA' zusammenfällt, wobei B und D bezw. in die Lagen B und Δ gelangen (vgl. Fig. 589), so sieht man, daß die durch $A'B'CD$ dargestellte Formänderung (ϑ) auch aus der, durch $A'BC\Delta$ dargestellten Lage von $ABCD$ gewonnen werden könnte, wobei $[P']$ in ΔB im Verein mit einer Reaktion $[\overline{P}']$ in $A'C$ eingeführt werden müßte.

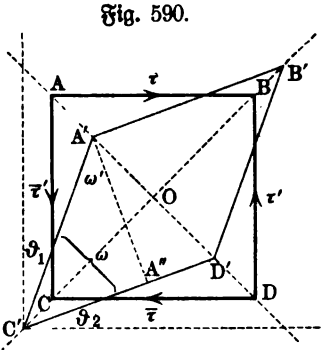
Daraus folgt, daß ein Rechtkant vom quadratischen Querschnitte $ABCD$ auch in ein gerades Prisma vom rhombischen Querschnitt $A'B'C'D'$ übergeführt werden kann, wenn die Kräfte $[P]$ und $[\overline{P}]$ der Fig. 588 zugleich mit den Kräften $[P']$ und $[\overline{P}']$ der Fig. 589 in Wirkung sind.

Thatsächlich ruft auch die Kraft $[P]$ in Fig. 588 nicht bloß die Reaktion $[\overline{P}]$ hervor, sondern auch die Reaktionen $[P']$ und $[\overline{P}']$, da sonst eine Drehung von $ABCD$ durch das aus $[P]$ und $[\overline{P}]$ gebildete Kräftepaar erfolgen würde.

Damit stimmt auch, gemäß dem oben gegebenen Satze (vergl. S. 820) über die Paare von Schubspannungen, das Verhalten der Körper im Innern überein, und zwar für den Schnitt je zweier, sich senkrecht durchsetzender Ebenen.

Stellt das Quadrat $ABCD$ in Fig. 590 den Schnitt eines geraden Prismas im Materiale dar, dessen Kanten in A, B, C, D senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, so entspricht den Schubspannungen $[\tau]$ und $[\overline{\tau}]$ im Verein mit den Schubspannungen $[\tau']$ und $[\overline{\tau}']$ für $\tau = \tau'$, die durch $A'B'C'D'$ dargestellte Formänderung, für welche die Ebenen durch AD und BC, senkrecht zur Ebene der Zeichnung Symmetrieebenen sind.

Fig. 590.



Die Änderung ϑ des rechten Winkels ACD ist hier im Arcusmaß $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \omega$.

Projiziert man A, dessen Projektion auf CD in C liegt, als A' auf $C'D'$, so ist die Schiebung von A gegen CD gegeben durch

$$\frac{C'A''}{C'A'} = \sin\omega' \text{ bezw. durch } \frac{A''C'}{A''A'} = tng\,\omega'.$$

Dabei ist $\omega' + \omega = \frac{\pi}{2}$ und $\omega + (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\pi}{2}$, d. h. man hat $\omega' = \vartheta_1 + \vartheta_2$.

Entsprechendes gilt für die Schiebung von D gegen AC.

Unter der Voraussetzung, daß wieder $\omega' = \vartheta_1 + \vartheta_2$ so klein ist, daß innerhalb der Grenzen der gewählten Genauigkeit $\sin\omega'$ mit $tng\,\omega'$ und demnach auch mit $arc\,\omega'$ vertauscht werden darf, gelten also auch in diesem Falle die oben abgeleiteten Beziehungen.

117. Die Formänderung für einen Körperpunkt. Wenn man für jedes Linienelement, welches man durch einen Punkt J eines Körpers legen kann, die Dehnung bestimmt, welche unter dem Einflusse äußerer Kräfte eintritt, so stellt die Gesamtheit der so bestimmten Dehnungen die entsprechende Formänderung für den Punkt J dar.

Giebt man den, vom Punkte J ausgehenden Linienelementen dieselbe Länge, so liegen ihre Endpunkte ursprünglich auf einer Kugel vom Mittelpunkte J.

Bei der Formänderung des ganzen Körpers gelangt J im allgemeinen in eine neue Lage J', während sich die bezeichnete Kugel zugleich um J dreht und außerdem in eine andere Fläche übergeht.

Legt man durch J und J' zwei parallel gelagerte Koordinatenkreuze, so kann man einen bestimmten Körperpunkt, welcher ursprünglich der Kugeloberfläche vom Mittelpunkte J angehörte und nach vollendeter Formänderung

auf der Fläche liegt, in welche diese übergegangen ist, in seiner ersten Lage auf das Kreuz durch J und in seiner zweiten Lage auf das Kreuz durch J' beziehen. Sind diese Koordinaten bezw. ξ, η, ζ und ξ', η', ζ', so bestimmt der Zusammenhang von ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' die Art der Formänderung im Punkt J.

Eine weitere Bestimmung dieser Formänderung ist erst möglich, wenn man über den inneren Bau (Struktur) des betrachteten Körpers gewisse, wenn auch sehr allgemeine Voraussetzungen macht.

Die einfachste dieser Voraussetzungen, durch welche man eine genügende Übereinstimmung mit der Erfahrung erreicht, besteht in der Annahme, daß die Größen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' stets durch Gleichungen ersten Grades zusammenhängen und zwar so, daß

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta\\ \eta' &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta\\ \zeta' &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta\end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned}\xi &= b_{11}\xi' + b_{12}\eta' + b_{13}\xi'\\ \eta &= b_{21}\xi' + b_{22}\eta' + b_{23}\xi'\\ \zeta &= b_{31}\xi' + b_{32}\eta' + b_{33}\xi'\end{aligned}\right\} \qquad 259)$$

gesetzt werden darf, wobei a_{11}, a_{12} u. s. w. und b_{11}, b_{12} u. s. w. für ein gegebenes System angreifender Kräfte in der Umgebung von J bezw. J' Konstanten sind. Natürlich ist das erste Gleichungssystem eine Umkehrung des zweiten und umgekehrt, wobei die Determinante der a und die Determinante der b nicht verschwindet.

Diese Gleichungen bestimmen sowohl die Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt als auch ihre Formänderung. Da die Gleichung der Kugel für einen Radius ϱ die Gestalt

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2$$

hat, so erhält man bei Ersatz von ξ, η, ζ durch ξ', η', ζ' gemäß den Gleichungen Nr. 259) für ξ', η', ζ' eine Gleichung zweiten Grades. Diese stellt ein Ellipsoid dar, da keine der Größen ξ', η', ζ' unendlich werden kann.

Die gesuchte Formänderung in einem Körperpunkte J wird demnach durch das Ellipsoid veranschaulicht, in welches eine unendlich-kleine Kugel vom Mittelpunkt J übergeht, man nennt dieses Ellipsoid das Formänderungsellipsoid für den Punkt J.

In dem Sonderfalle, daß die Größen a der Gleichungen Nr. 259) bis auf a_{11}, a_{22}, a_{33} den Wert Null haben, geht die Kugel in das Ellipsoid

$$\left(\frac{\xi'}{\varrho\, a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\eta'}{\varrho\, a_{22}}\right)^2 + \left(\frac{\zeta'}{\varrho\, a_{33}}\right)^2 = 1$$

über, dessen Achsen mit den Koordinatenachsen für ξ', η', ζ' übereinstimmen.

Da hier $\xi' = a_{11}\xi$, $\eta' = a_{22}\eta$, $\zeta' = a_{33}\zeta$ ist, so hat ein Punkt, welcher vor der Formänderung die Koordinaten $(\xi; 0; 0)$ hatte, nach der Formänderung die Koordinaten $(a_{11}\xi; 0; 0)$, d. h. er liegt vor und nach der Formänderung auf der X-Achse; der Durchmesser der Kugel, der mit der X-Achse zusammenfällt, behält also seine Richtung im Raume bei, wobei aber seine Länge 2ϱ in die Länge $2\varrho \,.\, a_{11}$ übergeht, so daß die entsprechende Dehnung $\frac{2\varrho \,.\, a_{11} - 2\varrho}{2\varrho} = a_{11} - 1$ beträgt. Entsprechendes gilt für die Durchmesser

der Kugel, welche mit der Y-Achse und mit der Z-Achse zusammenfallen, für welche bezw. $a_{22} - 1$ und $a_{33} - 1$ die Dehnungen sind.

In dem betrachteten Sonderfalle bleiben also die materiellen Punkte der Achsenebenen des Koordinatenkreuzes bei der Formänderung in ihren Ebenen, welche also keine Schiebungen erleiden, während parallel zu den Achsen bezw. die Dehnungen $a_{11} - 1$, $a_{22} - 1$, $a_{33} - 1$ auftreten.

Liegt dieser Sonderfall nicht vor, so fällt das Kreuz der Hauptachsen des Formänderungsellipsoides nicht mit den gewählten Koordinatenachsen zusammen.

Nimmt man in dem allgemeinen Falle die Hauptachsen des Formänderungsellipsoides, welche bezw. die Längen $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$ haben mögen, als Achsen eines neuen Koordinatenkreuzes, so entsprechen l_1, l_2, l_3 bezw. den Größen ϱa_{11}, ϱa_{22}, ϱa_{33} des Sonderfalles, in welchem a_{12}, a_{23} u. s. w. den Wert Null haben. Demnach kann man den allgemeinen Fall gewinnen, indem man für die Hauptachsen des Ellipsoides $a_{11} = \frac{l_1}{\varrho}$, $a_{22} = \frac{l_2}{\varrho}$, $a_{33} = \frac{l_3}{\varrho}$ setzt, d. h. indem man für diese Richtungen bezw. die Dehnungen $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{l_1}{\varrho} - 1$, $\bar{\varepsilon}_2 = \frac{l_2}{\varrho} - 1$, $\bar{\varepsilon}_3 = \frac{l_3}{\varrho} - 1$ einführt, welche man **Hauptdehnungen** nennt.

Das **Formänderungsellipsoid** vom Mittelpunkte J' mit seinen drei Hauptdehnungen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, durch welche drei Ebenen ohne Schiebung bestimmt werden, veranschaulicht uns die **Formänderung** des Punktes J: da das Ellipsoid durch seine drei Hauptdehnungen völlig bestimmt ist, so ist **jede beliebige Formänderung durch drei Hauptdehnungen** $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ völlig bestimmt.

Durch drei Dehnungen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, deren Richtungen sich senkrecht in J durchkreuzen, kann man also **jede beliebige Formänderung** für J mit den Hauptdehnungen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ erzeugen.

Die Gleichungen Nr. 259) reichen auch aus, um die Drehung zu bestimmen, welche die Kugel vom Mittelpunkte J bei ihrem Übergange zum Ellipsoide vom Mittelpunkte J' vollführt, während zugleich Punkt J die Lage J' annimmt.

118. Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen. Die **grundlegenden Versuche** für den Aufbau der **Dynamik elastisch-fester Körper** haben nun die Aufgabe, die **Beziehungen zwischen Spannungen und entsprechenden Formänderungen** und umgekehrt für die verschiedenen Materialien festzustellen.

Dabei hat man die Werte der äußeren Kräfte, welche auf Formänderung wirken, unterhalb der Elasticitätsgrenze zu halten, solange es sich darum handelt, den ursprünglichen Zustand des Materiales zu untersuchen.

Die in der Technik verwandten **Materialien** dürfen im allgemeinen als **homogen** (S. 412) vorausgesetzt werden, des weiteren sind aber die homogenen Materialien in zwei Klassen zu teilen.

Der Unterschied dieser beiden Klassen entspricht dem bekannten Unterschiede **krystallisierter** (oder wenigstens krystallinischer) und **amorpher**

Stoffe. Bei der einen Klasse ist der innere Aufbau (Struktur) der Körper so beschaffen, daß eine äußere Kraft vom Werte P unter übrigens gleichen Umständen verschiedene Formänderungen hervorruft, wenn sie ihre Richtung gegen den angegriffenen Körper ändert; man nennt diese Körper heterotrop, d. h. verschiedenartig gebaut für verschiedene Richtungen innerhalb des Stoffes. Bei der anderen Klasse ist die Formänderung, welche einer äußeren Kraft vom Werte P entspricht, unter übrigens gleichen Umständen für alle Richtungen innerhalb der Körper dieselbe, man nennt diese Körper isotrop, d. h. gleichartig gebaut für verschiedene Richtungen innerhalb des Stoffes.

Von den in der Technik verwandten Materialien sind gegossene Metallstücke, Betonmassen u. s. w. im allgemeinen als isotrop anzusehen und gewalzte Metallstücke wenigstens in großer Annäherung als isotrop zu betrachten, während Holz innerhalb der Richtung der gewachsenen Fasern jedenfalls andere Beziehungen zeigt, als senkrecht dazu, und darum als heterotrop zu gelten hat.

Es hat sich bisher innerhalb der technischen Mechanik im allgemeinen als ausreichend erwiesen, bei theoretischen Untersuchungen alle verwandten Materialien als isotrop anzusehen, falls man nur schließlich für die Praxis bei heterotropen Stoffen die Materialkonstanten der verschiedenen Richtungen berücksichtigt.

Um die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen zu gewinnen, sind nun zwei Wege eingeschlagen worden. Entweder hat man unter möglichst einfachen Voraussetzungen über den inneren Aufbau (Struktur) der Körper die Beziehungen zwischen den Spannungen und Formänderungen im Innern eines, durch äußere Kräfte angegriffenen Körpers, ganz allgemein festzustellen gesucht und die, durch jene Voraussetzungen bedingten Ergebnisse der Untersuchung von Fall zu Fall in ihrer Übereinstimmung mit der Erfahrung geprüft — oder man ist von einfachen, experimentell zu prüfenden, Fällen der Beanspruchung eines Körpers Schritt für Schritt zu verwickelteren Fällen aufgestiegen.

In letzterem Falle hat man ein Princip [1]) eingeführt, welches als Princip der Übereinanderlagerung (Superposition) der Spannungen und Formänderungen bezeichnet werden kann. Dieses lautet folgendermaßen: Wenn ein Körper unter dem Einflusse einer, durch äußere Kräfte bewirkten Spannung eine bestimmte Formänderung zeigt, während er unter dem Einflusse einer anderen, durch äußere Kräfte bewirkten Spannung eine bestimmte andere Formänderung zeigt, so erleidet er unter dem Einflusse beider Spannungen zusammen eine Formänderung, welche durch Vereinigung, d. h. im allgemeinen durch geometrische Addition der beiden vorher bezeichneten Formänderungen bestimmt werden kann.

Nach diesem Principe ist z. B. die Senkung des freien Endes eines am anderen Ende eingemauerten Balkens unter dem Einflusse der Belastungen $[P_1]$ und $[P_2]$ durch $s_1 + s_2$ gegeben, wenn $[P_1]$ für sich die Senkung s_1 und $[P_2]$ für sich die Senkung s_2 hervorruft.

[1]) Vergl. S. 14.

Die Berechtigung dieses Principes kann im allgemeinen nur durch die Übereinstimmung zwischen den Folgerungen, welche es nach sich zieht, und der Erfahrung dargethan werden, in besonderen Fällen läßt sich die Richtigkeit des darauf gegründeten Verfahrens auch wirklich beweisen.

Daß der allgemeine Spannungszustand in einem Punkte J durch Übereinanderlagerung dreier einfacher Normalspannungszustände gewonnen werden kann und daß die allgemeine Formänderung für einen Punkt J durch Übereinanderlagerung dreier Dehnungen darstellbar ist, giebt dem Principe von vornherein eine gewisse Rechtfertigung.

Die technische Mechanik hat bei ihrer Entwickelung zunächst den zweiten Weg eingeschlagen, später aber auch die Betrachtungen des ersten zur Kontrolle ihrer Ergebnisse herangezogen.

Auf dem ersten Wege gelangt man zu den Beziehungen, welche wir durch das Spannungsellipsoid und durch das Formänderungsellipsoid für einen Punkt J veranschaulicht haben. Weitere Untersuchungen in Bezug auf die beiden Ellipsoide für einen Punkt J, deren gegenseitige Lage auch von dem inneren Aufbau (Struktur) des betrachteten Stoffes abhängig ist, liefern für alle Untersuchungen auf dem Gebiete elastischer Körper von vornherein bestimmte allgemeine Bedingungen, deren Erfüllung bei Anwendungen von Fall zu Fall nachzuweisen ist: man nennt diese Bedingungen, dargestellt in der Form von Gleichungen, die „Elastischen Grundgleichungen".

Die Aufgabe der grundlegenden Versuche über die Beziehungen zwischen Spannung und Formänderung läßt sich nun in folgender Weise darstellen: für jedes bestimmte Material muß bei einem gegebenen System angreifender Kräfte einerseits die gegenseitige Lage der beiden Ellipsoide festgestellt werden und anderseits die Beziehungen zwischen den Längen ihrer Hauptachsen, d. h. die Beziehungen zwischen den drei Hauptspannungen und den drei Hauptdehnungen.

Für isotrope Stoffe, bei welchen die Hauptkreuze der beiden Ellipsoide zusammenfallen, so daß also die Hauptdehnungen stets in den Richtungen der Hauptspannungen liegen, handelt es sich nur darum, die Beziehungen zwischen den drei Hauptspannungen und den drei Hauptdehnungen durch Versuche festzustellen.

Bezeichnet man bei isotropen Stoffen die Hauptspannungen durch σ_1, σ_2, σ_3 und die entsprechenden (in ihre Richtungen fallenden) Hauptdehnungen bezw. durch $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, so giebt das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \alpha \,.\, \sigma_1 - \alpha'(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \alpha \,.\, \sigma_2 - \alpha'(\sigma_3 + \sigma_1) \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \alpha \,.\, \sigma_3 - \alpha'(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 260)$$

die einfachsten Beziehungen zwischen σ_1, σ_2, σ_3 und $\bar{\varepsilon}_1$, ε_2, $\bar{\varepsilon}_3$ an, welche darauf Rücksicht nehmen, daß jeder Längsdehnung zugleich eine Querdehnung (vergl. S. 829) entspricht.

Für $\bar{\varepsilon}_1$ liefert die Spannung $[\sigma_1]$ den Teil $\alpha\sigma_1$, während die senkrecht dazu wirkenden Spannungen $[\sigma_2]$ und $[\sigma_3]$ dazu die Teile $-\alpha'\sigma_2$ und $-\alpha'\sigma_3$ beitragen, wobei positive Werte von σ Zugspannungen entsprechen.

Man war früher der Ansicht, daß diese einfachsten, der Erfahrung angepaßten Beziehungen, bei welchen man mit der Bestimmung von zwei Materialkonstanten α und α' auskommt, für alle isotropen Stoffe thatsächlich beständen, genauere Untersuchungen haben aber gezeigt, daß dies für einzelne Stoffe, wie Schmiedeeisen und Stahl, zwar der Fall ist, für andere, wie Gußeisen, aber nicht zutrifft.

Diese einfachste Annahme lautet für den Fall des einfachen Normalspannungszustandes, in welchem nur eine der Spannungen $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$ vorhanden ist (vergl. S. 823), für $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= +\alpha \,.\, \sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= -\alpha' \,.\, \sigma_1 \\ \varepsilon_3 &= -\alpha' \,.\, \sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 261)$$

d. h. die Dehnung ε_1, welche eine Spannung $[\sigma_1]$ in ihrer Richtung erzeugt, ist dieser Spannung proportional (α), ebenso wie die zugehörigen Querdehnungen (α').

Versuche, welche der Anordnung der Fig. 580 entsprechen, gestatten, die erste der Gleichungen Nr. 261) zu prüfen. Diese Prüfung und die entsprechende experimentelle Untersuchung in Bezug auf die beiden anderen Gleichungen Nr. 261) ergeben, daß innerhalb gewisser Spannungsgrenzen für bestimmte Stoffe das System der Gleichungen Nr. 261) mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung ist, bei anderen aber nicht.

Man bezeichnet jene Gleichungen, im besondern die erste, als das Gesetz von Hooke, weil jene erste Gleichung von diesem Physiker (1678) zum erstenmal aufgestellt worden ist.

Macht man für heterotrope Stoffe entsprechend einfache Annahmen, so hat man im allgemeinsten Falle statt der beiden Materialkonstanten isotroper Stoffe 21 Materialkonstanten zu bestimmen. Diese Zahl verringert sich auf 13, wenn für die Umgebung jedes Punktes J im Innern der Körper eine Symmetrieebene vorhanden ist und die Symmetrieebenen aller Punkte einander parallel sind. Die Zahl dieser Konstanten geht weiter auf neun zurück, wenn zwei derartige Symmetrieebenen, senkrecht zu einander, vorhanden sind, wobei auch stets noch eine dritte, zu den beiden anderen senkrecht verlaufende Symmetrieebene auftritt.

Sind diese drei Symmetrieebenen, welche ein rechtwinkliges Kreuz in J bilden, einander gleichwertig, d. h. ist eine Drehung des Körpers um J, bei welcher eine dieser Ebenen die Stelle einer anderen dieser Ebenen einnimmt, ohne Einfluß auf das, einem äußeren Kraftsystem entsprechende System der Spannungen und Dehnungen, so sinkt die Zahl der Konstanten auf drei; solche Verhältnisse zeigt z. B. das Steinsalz, welches dem regulären Krystallsystem angehört.

Kommt endlich noch eine vierte Symmetrieebene hinzu, welche den drei bereits vorhandenen Symmetrieebenen gleichwertig ist, so sind alle Ebenen durch J gleichwertige Symmetrieebenen, d. h. in diesem Falle geht die Heterotropie in Isotropie über: hier ist nur die Bestimmung von zwei Materialkonstanten (α und α') nötig.

Für isotrope Stoffe, welche nicht dem Gesetze von Hooke gehorchen, hat man unter anderem durch Versuche, welche der Anordnung der Fig. 580 entsprechen, zunächst die dem Stoffe entsprechende Beziehung zwischen σ_1 und $\bar{\varepsilon}_1$ festzustellen, und dann ebenso die entsprechenden Querdehnungen zu bestimmen. Schon Bülfinger (1729) hat hierfür die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_1 = \alpha \,.\, \sigma_1^n$$

als Erweiterung des Hookeschen Gesetzes ($n = 1$) eingeführt, welche jetzt in technischen Kreisen als das Bach-Schüleſche Gesetz (für Gußeisen) bekannt ist.

Neben dieser Formel, welche α und n als Materialkonstanten enthält, sind noch mehrere andere empirische Formeln in Gebrauch.

Für heterotrope Stoffe hat man entsprechend zu verfahren, nur hängt hier die gesuchte Beziehung auch ab von der Richtung innerhalb des Körpers, mit welcher man die äußere Kraft gemäß Fig. 580 zusammenfallen läßt.

119. Die beiden Elasticitätskonstanten isotroper Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen. Wird ein prismatischer Stab in seiner Achse beiderseits durch Kräfte $[P]$ beansprucht, welche bei gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt f die Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ hervorrufen, so gilt für die entsprechende Dehnung $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ bei einer bestimmten Gruppe von isotropen Stoffen die Gleichung

$$\varepsilon = \alpha \,.\, \sigma \quad \text{oder} \quad \lambda = \alpha \cdot \frac{P}{f} \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 262)$$

während die entsprechende Querdehnung in jeder Richtung, senkrecht zur Achse des Stabes, den Wert $\frac{\varepsilon}{m} = \frac{\alpha}{m} \cdot \sigma = \alpha' \,.\, \sigma$ hat, beides, solange P eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

Der Gleichung Nr. 262), welche das Hookeſche Gesetz (vergl. S. 838) darstellt, entspricht für diese Materialien mit Rücksicht auf den Wert der Querdehnung eine zweite Gleichung [1])

$$\vartheta = \beta \,.\, \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 263)$$

in welcher ϑ die zu einem Paare von Schubspannungen vom Werte τ gehörige Schiebung (vergl. S. 825) bezeichnet, während β eine Materialkonstante ist, ebenso wie α und m bezw. $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$.

Für diese Materialien ist also einerseits die Dehnung ε, welche durch eine Normalspannung $[\sigma]$ in deren Richtung hervorgerufen wird, dieser Spannung σ proportional (α) und anderseits die Schiebung ϑ, welche einem Schubspannungspaare vom Werte τ entspricht, dieser Spannung τ proportional (β). Früher nahm man meist an, daß die Gleichungen Nr. 262) und

[1]) Deren Ableitung folgt auf S. 841.

263), welche man wohl auch beide als Gesetz von Hooke bezeichnete, für alle isotropen Materialien und wohl auch für jede bestimmte Richtung innerhalb heterotroper Stoffe innerhalb gewisser Grenzen von σ und τ gültig seien, und bezeichnete demnach das Hookesche Gesetz als das Gesetz über die Beziehung von Spannung und Dehnung bezw. Schiebung oder auch kurz als das Elasticitätsgesetz.

Innerhalb der technischen Mechanik hat namentlich das abweichende Verhalten des Gußeisens gelehrt, daß jene Annahme unzutreffend ist, und daß jenes Gesetz nur für eine bestimmte Gruppe von Materialien, z. B. für Schmiedeeisen und Stahl, gültig ist.

Da es innerhalb der technischen Mechanik üblich war, von den beobachteten Dehnungen stets wieder zu Spannungen überzugehen, so benutzte man die Gleichungen Nr. 262) und 263) in den Formen

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon = E \,.\, \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad 264)$$

und

$$\tau = \frac{1}{\beta} \cdot \vartheta = G \,.\, \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 265)$$

in welchen die Materialkonstanten α und β durch ihre reciproken Werte $E = \frac{1}{\alpha}$ und $G = \frac{1}{\beta}$ ersetzt erscheinen.

Man bezeichnet E als den Elasticitätsmodul für Zug und Druck oder kurz als den Elasticitätsmodul und G als den Elasticitätsmodul für Schub oder kurz als den Gleitmodul (Schubmodul).

Um die Bedeutung von E und G festzustellen, dachte man sich früher $\varepsilon = 1$ und $\vartheta = 1$ gesetzt, d. h. man sah E als die Normalspannung an für die Dehnung 1, bei der sich ein Stab um seine ursprüngliche Länge verlängern ($\lambda = l$) würde, und G als die Tangentialspannung für die Schiebung 1, bei der sich für $tng\,\vartheta = 1$ eine 45° entsprechende Schiebung ergeben würde.

Da derartige Verlängerungen und Verschiebungen im allgemeinen unmöglich sind und jedenfalls außerhalb der Grenzen der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes liegen, so hat man neuerdings (von Bach) auch in der technischen Mechanik jene Proportionen in der Form $\varepsilon = \alpha \cdot \frac{\sigma}{1}$ und $\vartheta = \beta \cdot \frac{\tau}{1}$ eingeführt.

Hier bedeutet α die Dehnung für die Spannung $\sigma = 1$ und β die Schiebung für die Spannung $\tau = 1$.

Für Centimeter und Kilogramm als Einheit ist demnach α die Verlängerung in Centimetern für einen Stab von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt bei 1 kg Belastung, während β die Änderung des rechten Winkels (in Bogenmaß) für 1 Atm. Schubspannung (= 1 kg für 1 qcm) ist bezw. die Verschiebungsstrecke für zwei um 1 cm voneinander abstehende Flächenelemente bei 1 Atm. Schubspannung.

Bezeichnet man α und β als Dehnungszahl und Schiebungszahl, so hat man E und G als Spannungen aufzufassen, deren Zahlen-

werte bezw. mit den reciproken Werten von Dehnungszahl und Schiebungszahl übereinstimmen.

Jedenfalls fordert die Homogeneität (vergl. S. 22) der Gleichungen $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ und $\tau = \vartheta \,.\, G$, da ε und ϑ unbenannte Zahlen sind, daß E und G als Spannungen aufgefaßt werden, falls σ und τ Spannungen bezeichnen.

Für Schmiedeeisen ist $E = \frac{1}{\alpha} = 2000000$ Atmosphären und $G = \frac{1}{\beta} = 770000$ Atmosphären im Mittel.

Während die Anordnung der Fig. 580 die wirkliche Bestimmung von α oder $E = \frac{1}{\alpha}$ veranschaulichen kann, ist die Anordnung der Fig. 582 durchaus ungeeignet, die wirkliche Bestimmung von β oder $G = \frac{1}{\beta}$ zu verdeutlichen, weil man dabei nur sehr ungenaue Ergebnisse erhalten würde. Man bestimmt G vielmehr stets mittelbar und zwar unter anderem durch Messung der Querdehnung $\frac{\varepsilon}{m}$, wobei m für die in der Technik verwendeten Materialien den Wert 3 . . . 4 hat.

Die experimentelle Bestimmung von E und G durch Schwingungen elastisch-fester Körper wird später besprochen werden.

Fig. 591 a.

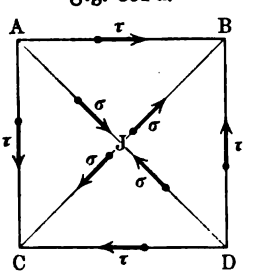
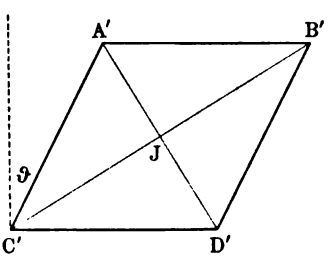


Fig. 591 b.



Um aus der Gleichung $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ und aus dem Werte $\frac{\varepsilon}{m}$ der Querdehnung die Gleichung $\tau = G \,.\, \vartheta$ und zugleich den Wert von G abzuleiten, verfahren wir folgendermaßen:

Wir berechnen für den Fall des einfachen Spannungszustandes für Schub, welcher sich als senkrechte Übereinanderlagerung zweier einfacher Normalspannungszustände darstellte (S. 826), die Dehnungen, welche diesen Normalspannungen entsprechen.

Für Fig. 591 a herrscht bei Schubspannungen vom Werte τ eine Zugspannung $[\sigma]$ vom Werte τ in BC und eine Druckspannung $[\sigma]$ vom Werte τ in AD.

Diese Spannungen bestimmen die Dehnung der Strecke BC, indem die Zugspannung $[\sigma]$ für sie unmittelbar eine positive Dehnung ε hervorruft, während die Druckspannung $[\sigma]$ für sie mittelbar eine positive Querdehnung $\frac{\varepsilon}{m}$ ergiebt.

Die gesamte (positive) Dehnung ist also für BC bestimmt als

$$\varepsilon\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \varepsilon \cdot \frac{m+1}{m}$$

und ebenso groß ist die negative Dehnung für AD.

Betrachtet man nun das Prisma in seiner, durch die Schubspannungen $[\tau]$ veränderten Gestalt, wie es Fig. 591 b (a. v. S.) darstellt, so ist die Dehnung von $BC = a$ gegeben durch $\frac{B'C' - BC}{BC} = \frac{B'C'}{BC} - 1$.

Aus $\overline{B'C'}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(90^0 + \vartheta) = 2a^2(1 + \sin\vartheta)$ und $\overline{BC}^2 = 2a^2$ folgt

$$\left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2 = 1 + \sin\vartheta \text{ und } \frac{B'C'}{BC} = (1 + \sin\vartheta)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sin\vartheta + \cdots$$

Demgemäß ist

$$\varepsilon \cdot \frac{m+1}{m} = \tfrac{1}{2}\sin\vartheta + \cdots$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, wobei $\sin\vartheta$ durch $\operatorname{arc}\vartheta$ zu ersetzen ist, wofür wir kurz ϑ schreiben, ist also

$$\varepsilon = \frac{m}{2(m+1)} \cdot \vartheta.$$

Da nun $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ ist, so ergiebt sich also, da hier $\sigma = \tau$ ist,

$$\tau = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E \,.\, \vartheta,$$

d. h. τ ist proportional zu ϑ, so daß der Gleichung $\tau = G \,.\, \vartheta$ entspricht:

$$G = E \cdot \frac{m}{2(m+1)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 266)$$

Für $m = 3 \ldots 4$ ist also $G = \frac{3}{8}E \ldots \frac{4}{10}E$.

Umgekehrt gilt

$$m = \frac{2G}{E - 2G} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 267)$$

Mit der Bestimmung von E und G ist die Möglichkeit gegeben, solange das Hookesche Gesetz gilt, aus den Spannungen die entsprechenden Formänderungen zu berechnen, und umgekehrt.

Handelt es sich um die einfachen Spannungszustände, welche den Anordnungen der Fig. 580 und Fig. 582 entsprechen, so reichen die einfachen Gleichungen Nr. 264) und Nr. 265) aus. Andere Fälle hat man als eine Übereinanderlagerung (Superposition) solcher einfachen Spannungszustände darzustellen (vergl. S. 836).

Wird z. B. ein Körper in drei aufeinander senkrechten Richtungen beiderseits durch je zwei Kräfte bezw. von den Werten P_1, P_2, P_3 gezogen, denen die Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 entsprechen, so führt die Übereinanderlagerung dieser drei einfachen Spannungszustände wieder zu den Gleichungen Nr. 260) auf S. 837. Durch Einführung von $\alpha = \frac{1}{E}$ und $\alpha' = \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{mE}$ gehen diese Gleichungen über in

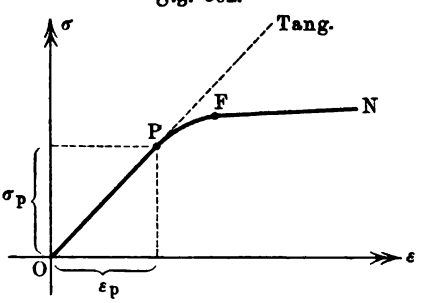
$$\left.\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)\\ \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}\right)\\ \bar{\varepsilon}_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 268)$$

Die Bestimmung von σ_1, σ_2, σ_3 bei gegebenen Werten $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ folgt leicht durch Umkehrung dieses Gleichungssystems.

Bei allen derartigen Untersuchungen muß man wissen, wie weit sich die **Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes** für ein bestimmtes Material erstreckt.

Trägt man gemäß den Versuchen für ein bestimmtes Material, welches zunächst dem Gesetze von Hooke folgt, zusammengehörige Werte von σ und ε als Koordinaten auf, wie es Fig. 592 zeigt, so verläuft die so gewonnene Linie ON als Gerade von $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$ bis zu einem bestimmten Wertpaare $\sigma = \sigma_p$, $\varepsilon = \varepsilon_p$. Bis zu dem Punkte P, mit welchem der geradlinige Verlauf der Linie ON aufhört, ist die Proportionalität von σ und ε vorhanden. Man bezeichnet den Punkt P als die **Proportionalitätsgrenze** oder **Proportionsgrenze** und dehnt diese Bezeichnung auch auf die entsprechende Spannung (σ_p) und Dehnung (ε_p) aus.

Fig. 592.



Die Verwendung des Hookeschen Gesetzes ist demnach an die Bedingung geknüpft, daß die betrachteten Spannungen und Dehnungen unterhalb der Proportionsgrenze ($\sigma < \sigma_p$ **und** $\varepsilon < \varepsilon_p$) **liegen.**

Für Schmiedeeisen ist $\sigma_p = 1300 \ldots 2000$ Atm.

Oberhalb der Proportionsgrenze tritt für manche Stoffe unter dem Einflusse von Zug eine besonders rasche und bleibende Dehnung ein, welche in der Praxis als „Strecken" oder „Fließen" des Materials bezeichnet wird, ebenso unter dem Einflusse von Druck ein Abfluß nach der Seite, welcher in der Praxis als „Quetschen" des Materiales bekannt ist.

Man spricht demgemäß von einer **Streckgrenze** (oder Fließgrenze) und einer **Quetschgrenze** (vergl. Punkt F in Fig. 592) und dehnt diese Bezeichnung auch aus auf die Spannung σ_f, bei welcher der bezeichnete Vorgang deutlich betrachtet wird.

Während an der Streckgrenze und an der Quetschgrenze noch keine Zerstörung des Materials eintritt, erfolgt eine solche oberhalb dieser Grenzen.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch für den Schub und dessen Formänderung.

Bei einzelnen Materialien (z. B. Holz innerhalb der Faserrichtung) hat

der Elasticitätsmodul für Zug und für Druck verschiedene Werte, welche man als E_1 und E_2 unterscheidet. Will man diese Materialien näherungsweise als isotrop ansehen, so muß demnach auf diesen Unterschied Rücksicht genommen werden. So führt z. B. die Betrachtung auf S. 841 hier dazu, daß der Zugspannung σ eine Dehnung $\frac{\sigma}{E_1} = \varepsilon_1$ und der Druckspannung σ eine Dehnung $\frac{\sigma}{E_2} = \varepsilon_2$ entspricht; infolgedessen ist hier die Gesamtdehnung

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \sigma\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{mE_2}\right)$$

und man hat demnach

$$G = \frac{mE_1E_2}{2(E_1 + mE_2)}.$$

Ist für heterotrope Materialien in einer bestimmten Richtung des Materiales das Gesetz von Hooke gültig und ebenso senkrecht zu dieser Richtung in Bezug auf die entsprechende Querdehnung, so lassen sich die vorstehenden Entwickelungen für die bezeichnete Richtung sinngemäß übertragen.

120. Die Elasticitätskonstanten für isotrope Stoffe, welche dem Gesetze von Hooke nicht folgen, und für heterotrope Stoffe. Hat das Material nicht die einfache Beschaffenheit, welche im § 119 vorausgesetzt wurde, so hat man durch Versuche Beziehungen abzuleiten, welche als Ersatz der einfachen Gleichungen $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ und $\tau = \vartheta \,.\, G$ dienen.

Man geht dabei von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Wenn die äußeren Kräfte nur die Spannung $[\sigma]$ hervorrufen, so besteht zwischen der Dehnung ε, welche in die Richtung dieser Spannung $[\sigma]$ fällt, und zwischen σ eine Gleichung, deren Konstanten nur durch die Beschaffenheit des Materials bestimmt werden.

2. Wenn die äußeren Kräfte nur ein Schubspannungspaar vom Werte τ hervorrufen, so besteht zwischen der Schiebung ϑ, welche diesem Spannungszustande entspricht, und zwischen τ eine Gleichung, deren Konstanten nur durch die Beschaffenheit des Materials bestimmt werden.

Für isotrope Materialien ist die Richtung von $[\sigma]$ und die Lage von $[\tau_1]$ und $[\tau_2]$ innerhalb des Körpers gleichgültig, so daß man bei diesen, falls die Beziehungen von Zugspannungen und Druckspannungen zu ihren Dehnungen genau dieselben sind, mit einer Gleichung zwischen σ und ε und mit einer Gleichung zwischen τ und ϑ auskommt.

Bei heterotropen Materialien entsprechen verschiedenen Richtungen innerhalb des Materials im allgemeinen auch verschiedene derartige Gleichungen, wobei es nicht ausgeschlossen ist, daß für eine oder die andere Richtung das Hookesche Gesetz angenähert gilt.

So hat man z. B. für Gußeisen, das als isotrop anzusehen ist, für Zug die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,140\,000} \cdot \sigma^{1,4}$$

und für Druck die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,400\,000}\,\sigma^{1.067}$$

gefunden, für Kilogramm und Centimeter als Einheit.

So gilt für gezogene Stäbe, die bei strenger Betrachtung als heterotrop zu gelten haben, in der Zugrichtung und senkrecht dazu meist das Gesetz von Hooke.

Man würde die oben angegebenen Voraussetzungen wohl unbedenklich anerkennen dürfen, wenn man unendlich-ausgedehnte Massen als Versuchskörper benutzen könnte. Thatsächlich sind die Versuchskörper natürlich durch irgendwelche Oberflächen begrenzt, und es ist nicht ausgeschlossen, daß auch die Art der Begrenzung die gesuchten Zahlen beeinflußt, ja es erscheint sogar wahrscheinlich, daß die, von der Angriffsfläche der äußeren Kraft ausgehende Ausbreitung der Formänderung durch verschiedene Oberflächen auch verschieden beeinflußt wird.

Die Versuche zeigen nun, daß diese Abhängigkeit von der Gestalt der Oberfläche thatsächlich vorhanden ist und daß man bei strengen Betrachtungen nur für Körper aus bestimmtem Materiale, die einander ähnlich (im geometrischen Sinne) sind, für eine bestimmte Richtung von [σ] u. s. w. übereinstimmende Ergebnisse erwarten darf.

Demnach hebt der Umstand, daß jeder Körper eine bestimmte Oberfläche haben muß, den Vorteil der Isotropie wieder bis zu einem gewissen Grade auf, so daß auch die Betrachtungen des § 119 in dieser Hinsicht einer Verbesserung von Fall zu Fall bedürfen.

Trotzdem darf man zunächst von dem Einflusse der Oberfläche absehen, wenn man sich nur gegebenen Falles daran erinnert, daß man sich dabei mit einer gewissen Annäherung begnügt.

Außerdem ist auch die Frage nach der Homogeneität des Materiales und nach seiner Isotropie oder Heterotropie oft nicht mit Sicherheit zu beantworten, so daß auch in dieser Beziehung Fehlerquellen eintreten können.

Jedenfalls sind die Aufgaben in Bezug auf das Verhalten der einzelnen Gruppen der in der Technik verwandten elastisch-festen Metalle noch keineswegs als gelöst anzusehen [1]).

Auf diesem Gebiete tritt, wie überall, wo das thatsächliche Verhalten der Körper der Außenwelt für die Zwecke der Praxis in einer möglichst großen Annäherung festgestellt werden muß, die eigenartige Aufgabe der technischen Mechanik (vergl. S. 5) deutlich hervor.

Erst im letzten Jahrzehnte hat man durch die allgemeine Ausdehnung der Ingenieurlaboratorien an den technischen Hochschulen die Bedingung geschaffen für ein ausreichendes Studium [2]) aller dieser Verhältnisse, auf dessen Grundlage für die Zukunft eine befriedigende, erfahrungsmäßig ge-

---

[1]) Vergl. hierzu Bach, Elasticität und Festigkeit. Berlin, J. Springer.

[2]) Die „Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure (Berlin, J. Springer) seit 1901, werden in Zukunft als Sammelstelle für die Ergebnisse dieser Studien dienen.

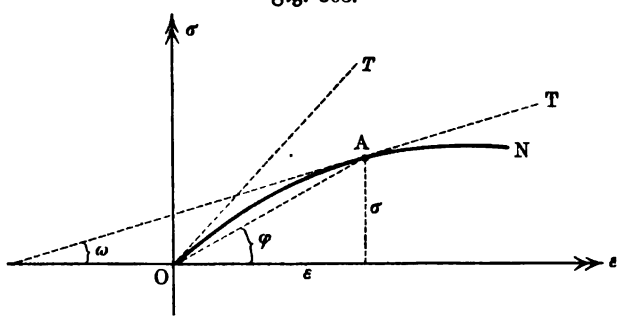
stützte Theorie für die einzelnen Materialien bezw. für einzelne Gruppen derselben erwachsen kann.

Wenn man auch bei Materialien, für welche die Voraussetzungen des § 119 nicht erfüllt sind, von einem Elasticitätsmodul E bezw. G spricht, so muß natürlich von neuem bestimmt werden, was man darunter verstehen will.

Man kann die Gleichung $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ festhalten und nun den veränderlichen Wert des Verhältnisses zusammengehöriger Spannungen und Dehnungen als Elasticitätsmodul bezeichnen, es ist dann in Fig. 593 für die Stelle A auf der Linie ON gegeben

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = tg\,\varphi.$$

Fig. 593.



Statt dessen ist es auch üblich, die Tangente des Winkels einzuführen, welchen die Tangente in A mit der ε-Achse bildet, so daß dann für die Stelle A auf der Linie ON gilt

$$\bar{E} = tg\,\omega,$$

wobei für $\sigma = f(\varepsilon)$ natürlich $tg\,\omega = f'(\varepsilon)$ ist, d. h. gleich der Ableitung von σ nach ε.

Beide, unter sich verschiedene Erweiterungen des ursprünglichen Begriffes von E stimmen miteinander überein, wenn ON geradlinig wird.

Für relativ kleine Werte von σ ist im allgemeinen $\omega \sim \varphi$, und daher auch $E \sim \bar{E}$.

Zeichnet man die Tangente OT in O an die Linie ON, so sieht man, daß

$$lim\,[E]_{\sigma=0} = lim\,[\bar{E}]_{\sigma=0}$$

ist, d. h. die beiden Erweiterungen des Begriffes von E stimmen für $lim\,\sigma = 0$ untereinander überein.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für die Erweiterung des Begriffes von G.

121. Die Anstrengung des Materials. Die Formänderungen, welche ein elastisch-fester Körper unter dem Einflusse äußerer Kräfte erleidet, zeigen uns unmittelbar seine Abweichung von dem Bilde des starren Körpers, an welches unsere Betrachtungen ursprünglich anknüpften, während diese Abweichung mittelbar auch durch die entsprechenden Spannungen dargestellt wird, welche dabei im Innern des Körpers auftreten.

Durch die Formänderungen wird diese Abweichung in geometrischer Hinsicht, durch die Spannungen in dynamischer Hinsicht dargestellt. Beides ist innerhalb der Technik von großer Bedeutung.

Soll ein Körper als Glied einer Konstruktion verwendet werden, so ist seine Gestalt vor und nach der Beanspruchung, welche er innerhalb der Konstruktion erleidet, nicht genau dieselbe; darum muß bei der Verbindung verschiedener Körper zu einer Konstruktion von vornherein in geometrischer Hinsicht auf die Formänderungen Rücksicht genommen werden, welche infolge der Elasticität des Materials zu erwarten sind, wozu noch die Beachtung der Formänderungen kommt, welche den Schwankungen der Temperatur entsprechen.

So biegt sich z. B. ein wagerecht gelagerter gerader Balken infolge seiner Belastung durch und daher muß in Bezug auf die Auflagerung u. s. w. darauf Rücksicht genommen werden, daß der Balken innerhalb der Konstruktion nicht mehr als gerader Balken auftritt.

Anderseits ist die Abweichung eines elastisch-festen Körpers von dem Bilde des starren Körpers in dynamischer Hinsicht von Bedeutung, weil von ihr die Sicherheit einer Konstruktion im Hinblick auf eine mehr oder minder deutliche Materialzerstörung abhängt.

Solange man durch das Gesetz von Hooke oder durch empirische Formeln, welche an seine Stelle treten, den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen darstellen kann, ist es ziemlich gleichgültig, ob man mit Spannungen rechnet oder mit Dehnungen und Schiebungen, abgesehen davon, daß in gewissen Fällen das erste und in gewissen Fällen das zweite einfacher oder anschaulicher sein kann.

Da aber die empirischen Formeln, welche für bestimmte Materialien an die Stelle des Gesetzes von Hooke treten, zur Zeit durchaus noch nicht feststehen und da ferner für die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und aller Formeln, welche es ersetzen, bestimmte Grenzen vorhanden sind, oberhalb derer erst die Materialzerstörung beginnt, so erhält das Rechnen mit Spannungen innerhalb der technischen Mechanik gegenüber dem Rechnen mit Dehnungen und Schiebungen ein gewisses Übergewicht.

Sind nämlich die äußeren Kräfte so groß, daß eine mehr oder minder deutliche Zerstörung des Materials eintritt, so lassen sich die entsprechenden Formänderungen oft nur ungenau beschreiben und bestimmen, während die Angabe der Spannung, welcher die Zerstörung folgt, meist noch einen brauchbaren Anhalt für weitere Schlüsse gewährt, namentlich auch in Bezug auf die Sicherheit der Konstruktionen.

Infolgedessen pflegt man auch innerhalb der technischen Mechanik in den Fällen, in welchen man den Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannung zu beurteilen imstande ist, oft die Formänderungen unmittelbar durch Spannungen auszudrücken, welche man als reduzierte oder ideale oder virtuelle Spannungen, meist aber als Anstrengung des Materiales bezeichnet.

Man stellt sich dabei vor, daß eine beobachtete Dehnung ε durch eine, ihrer Richtung entsprechende Normalspannung $[\sigma]$ und daß eine beobachtete Schiebung ϑ durch ein zugehöriges Schubspannungspaar vom Werte τ hervorgerufen worden sei, was den Thatsachen entsprechen kann, ihnen aber nicht zu entsprechen braucht, d. h. man

stellt sich vor, daß die betrachteten Formänderungen ε bezw. ϑ, welche vielleicht thatsächlich durch ein verwickeltes System äußerer Kräfte hervorgerufen sind, je einem einfachen Spannungszustande gemäß den Anordnungen der Fig. 580 bezw. der Fig. 582 entsprechen.

Die so berechneten Spannungen σ bezw. τ bezeichnet man als die Anstrengung des Materials für die betrachtete Dehnung ε bezw. für die betrachtete Schiebung ϑ, in der Voraussetzung, daß es für die Beurteilung der Formänderung in dynamischer Hinsicht gleichgültig ist, ob eine Dehnung ε bezw. eine Schiebung ϑ auf diese oder jene Weise zustande gekommen ist.

Für den Fall, daß die Formänderungen ε bezw. ϑ thatsächlich durch die Spannungen σ bezw. τ bewirkt worden sind, steht die Bezeichnung „Anstrengung des Materiales“ nur für die bisher gebrauchte Bezeichnung „Entsprechende Spannung“, während σ bezw. τ im andern Falle „reduzierte“ oder „virtuelle“ oder „ideale“ Spannungen genannt werden können.

Bei isotropen Körpern, welche dem Gesetze von Hooke folgen, wird demnach jeder beobachteten Dehnung ε bezw. jeder beobachteten Schiebung ϑ gemäß den Formeln $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ und $\tau = \vartheta \,.\, G$ eine Spannung σ bezw. τ als entsprechende „Anstrengung des Materials“ zugeordnet.

Sind z. B. im Materiale thatsächlich, senkrecht zu einander, zwei Zugspannungen $[\sigma]$ und $[\sigma']$ vorhanden, welche in ihren Richtungen die Dehnungen $+\varepsilon$ und $+\varepsilon'$ hervorrufen, so treten außerdem noch die Querdehnungen $-\frac{\varepsilon}{m}$ und $-\frac{\varepsilon'}{m}$ auf, so daß die in Richtung von $[\sigma]$ beobachtete Dehnung den Wert $\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{m}$ und die in der Richtung von σ_2 beobachtete Dehnung den Wert $\varepsilon' - \frac{\varepsilon}{m}$ erhält. Diesen betrachteten Dehnungen entsprechen die reduzierten Spannungen $E\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{m}\right)$ und $E\left(\varepsilon' - \frac{\varepsilon}{m}\right)$, wofür man auch bezw. $\sigma - \frac{\sigma'}{m}$ und $\sigma' - \frac{\sigma}{m}$ schreiben kann. In der Richtung von $[\sigma]$ ist also die Anstrengung nicht durch σ, sondern durch $\sigma - \frac{\sigma'}{m}$ gegeben, in der Richtung von σ' ebenso durch $\sigma' - \frac{\sigma}{m}$. Sind dagegen im Materiale thatsächlich, senkrecht zu einander eine Zugspannung $[\sigma]$ und eine Druckspannung $[\sigma']$ vorhanden, welche in ihren Richtungen die Dehnungen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon'$ hervorrufen, so treten außerdem noch die Querdehnungen $-\frac{\varepsilon}{m}$ und $+\frac{\varepsilon'}{m}$ auf, so daß die in Richtung von $[\sigma]$ beobachtete Dehnung den Wert $\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{m}$ und die in Richtung von $[\sigma']$ beobachtete Dehnung den Wert $-\varepsilon' - \frac{\varepsilon}{m}$ erhält. Diesen beobachteten Dehnungen entsprechen die reduzierten Spannungen $E\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{m}\right)$ und $-E\left(\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{m}\right)$, wofür man auch bezw. $\sigma + \frac{\sigma'}{m}$ und

$-\left(\sigma' + \frac{\sigma}{m}\right)$ schreiben kann. In der Richtung von $[\sigma]$ ist also die Anstrengung nicht durch σ, sondern durch $\sigma + \frac{\sigma'}{m}$ gegeben, in der Richtung von $[\sigma']$ ebenso durch $-\left(\sigma' + \frac{\sigma}{m}\right)$.

Mit Rücksicht auf die Sicherheit der Konstruktionen ist natürlich die Bestimmung der größten Anstrengung[1]) von besonderem Werte. Um die zulässigen Grenzen für eine solche, mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Technik zu erläutern, betrachten wir zunächst die Einteilung der Spannungszustände, welche in der Praxis üblich ist.

122. Die vier[2]) Arten der einfachen Elasticität und Festigkeit. Mit den beiden einfachen Spannungszuständen für „Zug oder Druck" und „Schub", welche im § 115 eingeführt und dann des weiteren zugleich mit den, ihnen entsprechenden Formänderungen betrachtet wurden, pflegt man in der Praxis noch zwei andere verhältnismäßig einfache Spannungszustände zusammenzustellen, welche durch die Worte „Biegung" und „Verdrehung" gekennzeichnet werden.

Man nennt diese vier Fälle der Beanspruchung in der Praxis die „vier[2]) Arten der einfachen Elasticität und Festigkeit" (vergl. S. 812), weil man aus ihnen, unter Berücksichtigung der ihnen entsprechenden Formänderungen, durch Übereinanderlagerung (vergl. S. 836) alle verwickelteren Fälle darzustellen sucht, welche man als „Fälle der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit" zu bezeichnen pflegt.

Diese Bestimmung knüpft an die Beanspruchung der Hauptform der in der Technik verwendeten Körper an, die man als geraden prismatischen Balken (oder Stab) bezeichnet.

Wenn der Schwerpunkt einer (unveränderlichen) ebenen Figur auf einer Linie so gleitet, daß diese und jene Figur stets in ihrem augenblicklichen Schnittpunkte aufeinander senkrecht stehen, so erzeugt die Fläche, falls ihre Bewegung eine Verschiebung ist, einen Körper, den man als prismatischen Balken (oder Stab) zu bezeichnen pflegt.

Die Leitlinie der beweglichen Figur heißt die Mittellinie des Balkens und wird in dem besonderen Falle, daß sie eine Gerade ist, auch als Achse bezeichnet.

Der Weg eines Punktes der erzeugenden Fläche ist eine Linie im Balken, welche eine Faser genannt wird, während jede Lage der beweglichen Figur einen Querschnitt des Balkens bestimmt.

Balken von gerader Mittellinie heißen gerade Balken, sie lassen sich auffassen als ein System von parallel gelagerten geraden Fasern, welche durch die Querschnitte senkrecht getroffen werden.

---

[1]) In gewissen Fällen hängt die Sicherheit vielleicht auch von der größten vorhandenen Spannung ab und nicht von der, der größten vorhandenen Formänderung entsprechenden größten Anstrengung.

[2]) Bei Unterscheidung von Zug und Druck sind es fünf.

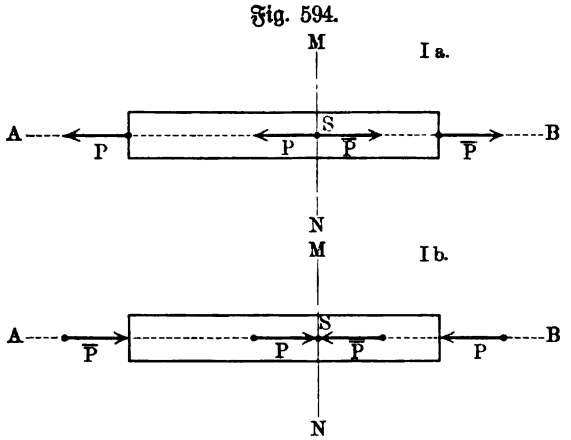
Entsprechendes gilt für Balken von krummer Mittellinie, welche krumme Balken heißen.

Denkt man sich die erzeugende Fläche bei ihrer Bewegung veränderlich, so entstehen Balken von veränderlichem Querschnitte, z. B. verjüngte Balken.

Diese geometrischen Bestimmungen finden auf materielle Balken sinngemäß Anwendung, so daß z. B. unter einer Faser im materiellen Balken die Gesamtheit der materiellen Punkte zu verstehen ist, welche auf einer bestimmten Linie liegen.

Wird nun ein gerader prismatischer Balken von einem Systeme äußerer Kräfte angegriffen, so kann man für dessen Behandlung den Schwerpunkt S irgend eines Querschnittes als Zurückführungspunkt wählen. Die Resultante des Systems, welche in S angreift, läßt sich dann in eine, in die Achse des Balkens fallende Komponente und in eine, in den Querschnitt fallende Komponente zerlegen. Das Kräftepaar des Systems läßt sich ebenso in zwei Kräftepaare spalten, von denen das eine in den Querschnitt fällt, während der Arm des anderen in der Balkenachse liegt.

Fig. 594.



Man pflegt nun von einer einfachen Beanspruchung des Balkens zu sprechen, wenn für jeden Querschnitt von diesen vier Komponenten bezw. komponierenden Paaren stets dieselben drei verschwinden.

Die so bestimmten vier Arten der Beanspruchung des Balkens bezeichnet man dann als die vier Arten der einfachen Elasticität und Festigkeit und zwar gemäß folgender Einteilung.

Ia und Ib. Ist immer nur eine Kraft innerhalb der Balkenachse vorhanden, so zieht (a) diese zwei benachbarte Querschnitte voneinander fort oder sie drückt (b) sie aneinander an. Man sagt in diesem Falle, der Balken sei auf Zugelasticität bezw. Zugfestigkeit (a) oder auf Druckelasticität bezw. Druckfestigkeit (b) beansprucht. Früher nannte man den Fall Ia auch den Fall der absoluten und den Fall Ib den Fall der rückwirkenden Elasticität und Festigkeit.

Die Fig. 594 a und b stellen die Fälle a und b für eine horizontal gelagerte Balkenachse und einen vertikalen Querschnitt MN dar. Vergl. dazu auch die Fig. 573, 574 und 580.

II. Ist immer nur eine Kraft innerhalb des Querschnittes vorhanden, so verschiebt diese den Querschnitt gegen einen benachbarten Querschnitt. Man

sagt in diesem Falle, der Balken sei auf Schubelasticität bezw. Schubfestigkeit beansprucht. Da das Zerschneiden durch eine Schere für den Fall der Materialzerstörung ein gutes Beispiel für diese Art der Beanspruchung ist, so spricht man hier auch von Scherelasticität bezw. Scherfestigkeit.

Fig. 595 stellt den Fall II für die vertikal gelagerte Achse AB eines Nietes (bei einschnittiger Nietung) dar, dessen horizontaler Schnitt MN auf Schub beansprucht wird. Vergl. auch Fig. 582.

Fig. 595.

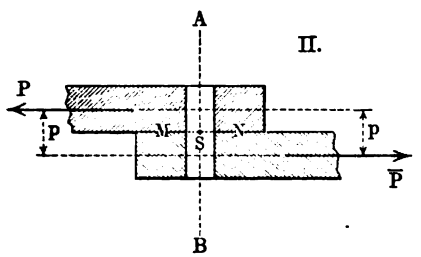
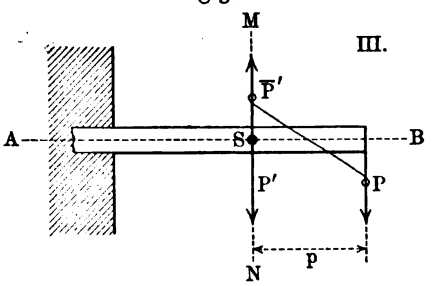


Fig. 596.



III. Ist immer nur ein Kräftepaar vorhanden, dessen Arm in der Balkenachse liegt, so verändert dieses die Neigung des Querschnittes zur Balkenachse, wodurch eine Biegung des Balkens entsteht. Man sagt in diesem Falle, der Balken sei auf Biegungselasticität bezw. Biegungsfestigkeit beansprucht. Früher nannte man diesen Fall auch den Fall der relativen Elasticität und Festigkeit.

Fig. 596 stellt den Fall III für einen einerseits eingemauerten Balken von horizontaler Achse dar für einen vertikalen Querschnitt MN. Die Zurückführung des Systems der äußeren Kräfte für S liefert dort neben dem Paare $[P \,.\, p]$ noch die Schubkraft $[P']$, so daß Fig. 596 eigentlich eine Beanspruchung nach Fall II und III, also schon einen Fall zusammengesetzter Elasticität bezw. Festigkeit darstellt. Ebenso stellt auch Fig. 595 eigentlich einen Fall zusammengesetzter Elasticität bezw. Festigkeit dar, da dort neben dem Schube auch zugleich ein biegendes Kräftepaar $[P \,.\, p]$ auftritt. Man pflegt aber in beiden Fällen zunächst nur die Hauptwirkung zu beachten.

IV. Ist immer nur ein Kräftepaar vorhanden, dessen Ebene in den Querschnitt fällt, so verdreht dieses den Querschnitt gegen einen benachbarten Querschnitt. Man sagt in diesem Falle, der Balken sei auf Verdrehungselasticität bezw. Verdrehungsfestigkeit oder kürzer auf Drehungselasticität bezw. Drehungsfestigkeit beansprucht. Statt Drehung oder Verdrehung ist auch das Wort „Torsion“ im Gebrauch.

Fig. 597.

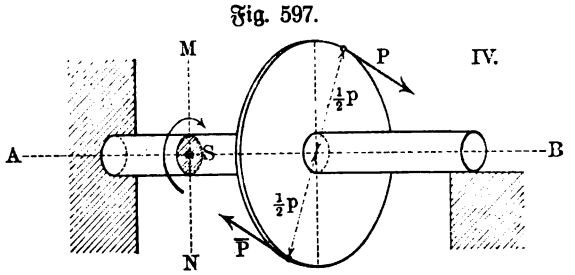
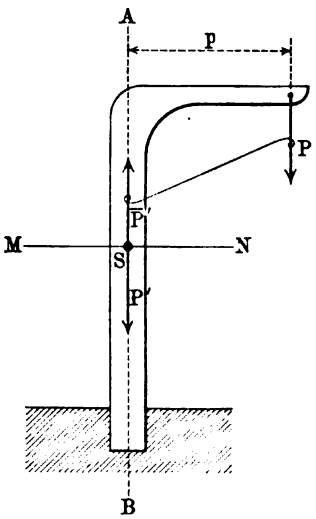


Fig. 597 (a. v. S.) stellt den Fall IV für eine horizontale Balkenachse dar; hier wirkt an der Scheibe einer Welle das Kräftepaar $[Pp]$, während das rechte Ende der Welle frei gelagert, das linke eingeklemmt ist.

Es wurde schon bemerkt, daß Anordnungen für die Fälle II und III zugleich Schub und Biegung zeigen und daß es in jedem besonderen Falle darauf ankommt, ob dabei der Schub oder die Biegung die Hauptsache ist.

Fig. 598.



Da bei der Biegung die Fasern auf der einen (erhabenen) Seite des Balkens gezogen, auf der anderen (hohlen) Seite des Balkens gedrückt werden, so ist die Biegung eigentlich ein zusammengesetzter Fall von Zug und Druck, bei dem auch Schub zu berücksichtigen ist. Da bei der Verdrehung eine gegenseitige Verschiebung der Querschnitte vorliegt, so ist dieser Fall eigentlich als ein zusammengesetzter Schubfall zu betrachten.

In der Praxis pflegt man aber erst von Arten zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit zu sprechen, wenn sich zwei oder mehrere der unter I, II, III, IV betrachteten Fälle zusammenfinden. Ein Beispiel bietet die excentrische Belastung, welche Fig. 598 darstellt, wo die Zurückführung für S eine Druckkraft P' in der Achse und ein biegendes Paar $[Pp]$ liefert.

123. Bruchspannungen, Konstruktionsspannungen und Formänderungsarbeit. Um für die vier einfachen Arten der Elasticität und Festigkeit und demgemäß auch für verwickeltere Fälle die zulässige Anstrengung des Materiales mit Rücksicht auf die Sicherheit der Konstruktionen beurteilen zu können, bestimmt man zunächst durch Versuche je eine obere Spannungsgrenze, nämlich die Spannung, bei welcher eine deutliche Zerstörung des Materials für die gewählte Art der Beanspruchung eintritt. Man bezeichnet eine solche Spannung als Bruchspannung oder Festigkeitsmodul des Materials bezw. für Zug oder Druck, Schub, Biegung und Verdrehung oder nennt sie auch kurz die entsprechende Festigkeit des Materials.

Da alle Formänderungen auf Dehnungen und Schiebungen zurückgeführt werden können, so reicht es in theoretischer Hinsicht aus, die Bruchspannungen für „Zug und Druck“ und für „Schub“ zu bestimmen, gemäß den Anordnungen der Fig. 594 und Fig. 595. Für die Praxis ist es aber außerdem von Wichtigkeit, auch die Bruchspannungen für „Zug und Druck“ innerhalb gebogener Stäbe und die Bruchspannungen für Schub innerhalb verdrehter Stäbe zu bestimmen, wie es überhaupt von Wichtigkeit ist, auch Fälle der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit zur Kontrolle der Überlegungen und Rechnungen experimentell zu behandeln.

Als Einheit für diese Spannungen dient in der Technik im allgemeinen wieder 1 Atm., d. h. 1 kg für 1 qcm.

Man bestimmt die Bruchspannung oder Festigkeit zunächst für ruhende Körper bei ruhender Belastung, gemäß Anordnungen, für welche Fig. 594 und Fig. 595 Beispiele geben, und nennt sie als solche Tragfestigkeit.

Von dieser Tragfestigkeit hat man noch die sogen. „Ursprungsfestigkeit" und die „Schwingungsfestigkeit" zu unterscheiden, sowie die „Stoßfestigkeit" und andere, auf die wir nachher zurückkommen.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf die Tragfestigkeit.

Es ist üblich, die Bruchspanungen für Zug und Druck durch K_1 und K_2 zu bezeichnen, wobei im besonderen für einzelne Materialien $K_1 = K_2$ sein kann.

Es bedeutet also z. B. für Schmiedeeisen $K_1 = 4000$ und $K_2 = 2500$, daß eine Stange aus Schmiedeeisen bei einer achsialen Zugspannung von 4000 Atm. und bei einer achsialen Druckspannung von 2500 Atm. eine deutliche Materialzerstörung zeigt.

Die Bruchspannung für Schub pflegt man durch T oder durch K_s zu bezeichnen.

Es bedeutet also z. B. für Kiefernholz $T = K_s = 45$, daß eine Schubspannung von 45 Atm. die Trennung der von ihr beanspruchten Querschnitte bewirkt.

Die Bruchspannungen für den Zug oder Druck innerhalb der Biegung und für den Schub bei Verdrehung pflegt man bezw. durch K_b und K_d zu bezeichnen.

Als Konstruktionsspannungen oder zulässige Spannungen bezeichnet man die, zweifellos unter den Bruchspannungen gelegenen Spannungszahlen, welche als Anstrengungen des Materials wirklich bei Konstruktionen vorkommen dürfen.

Das sind Werte, die im Hinblick auf theoretische Erwägungen erfahrungsmäßig (z. B. auch im Hinblick auf ausgeführte und bewährte Konstruktionen) gewonnen sind, sie liegen natürlich auch unter den Grenzspannungen (der Proportionsgrenze), wenn bei ihrer Bestimmung das Hookesche Gesetz verwendet worden ist.

Man bezeichnet die Konstruktionsspannungen bezw. für Zug und Druck und Schub durch k_1, k_2 und t oder k_s. Die Konstruktionsspannungen für den Zug oder Druck innerhalb der Biegung und für den Schub bei Verdrehung pflegt man bezw. durch k_b und k_d zu bezeichnen.

Es bedeutet z. B. für Schmiedeeisen $k_1 = 900$, $k_2 = 900$, $k_s = 720$, daß eine Konstruktion aus Schmiedeeisen sicher ist, falls im Materiale die Zugspannungen und die Druckspannungen 900 Atm. und die Schubspannungen 720 Atm., als Anstrengungen berechnet, nicht überschreiten.

Unter der Sicherheit oder dem Sicherheitsgrade (S) einer Konstruktion pflegt man das Verhältnis der Bruchspannung zur Konstruktionsspannung zu verstehen, d. h. man sagt z. B. von einer Konstruktion, daß sie dreifache Sicherheit in Bezug auf die Zerstörung durch Zug zeigt,

wenn die größte im Material vorhandene Anstrengung in Bezug auf Zug ein Drittel der entsprechenden Bruchspannung ist.

Für isotrope Stoffe, welche dem Gesetze von Hooke folgen, kann man noch eine, der Beziehung von E und G entsprechende Gleichung zwischen den zulässigen Normalspannungen (k_1 und k_2) und den zulässigen Tangentialspannungen (k_s oder t) ableiten. Man bestimmt dazu bei dem Falle der einfachen Schubspannung (vergl. Fig. 591) die Anstrengungen für die größten positiven und negativen Dehnungen, welche auftreten, und beachtet, daß diese unter den Grenzen k_1 und k_2 bleiben müssen.

Fig. 599.

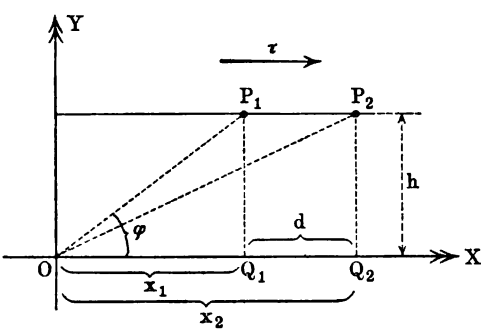
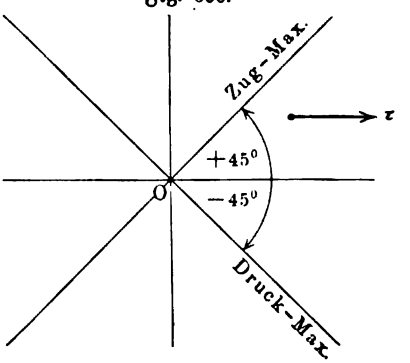


Fig. 600.



Wenn eine Schubspannung $[\tau]$ im Materiale vorhanden ist, durch welche sich ein Punkt P relativ zu O (vergl. Fig. 599) von P_1 nach P_2 verschiebt, so entspricht die Verlängerung von OP_1 auf OP_2 einer Dehnung ε, für welche gilt

$$\frac{OP_2 - OP_1}{OP_1} = \varepsilon \quad \text{oder} \quad \frac{OP_2}{OP_1} = 1 + \varepsilon.$$

Für $OQ_1 = x_1$ und $OQ_2 = x_2 = x_1 + d$ ist

$$\overline{OP_2}^2 = h^2 + x_2^2 = h^2 + (x_1 + d)^2 = h^2 + x_1^2 + 2x_1 d + d^2$$
$$= \overline{OP_1}^2 + 2x_1 d + d^2.$$

Dabei ist für eine Schiebung ϑ zu setzen $\frac{d}{h} = \vartheta$, d. h. $d = h\vartheta$, so daß

$$\overline{OP_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + 2x_1 h\vartheta + h^2\vartheta^2 = \overline{OP_1}^2\left[1 + \frac{2x_1 h}{\overline{OP_1}^2} \cdot \vartheta + \frac{h^2\vartheta^2}{\overline{OP_1}^2}\right]$$

wird.

Vernachlässigt man das Glied mit ϑ^2, so ist unter Einführung von $\measuredangle P_1 O Q_1 = \varphi$

$$\overline{OP_2}^2 = \overline{OP_1}^2[1 + 2\sin\varphi\cos\varphi \,.\, \vartheta] = \overline{OP_1}^2[1 + \vartheta \,.\, \sin 2\varphi].$$

Demnach ist

$$1 + \varepsilon = (1 + \vartheta \,.\, \sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\vartheta \,.\, \sin 2\varphi + \cdots$$

Bei der gewählten Genauigkeit ergiebt sich demnach

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\vartheta \,.\, \sin 2\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 269)$$

Für $2\varphi = 90^0$ bezw. für $2\varphi = -90^0$ erhält der Zahlenwert von ε sein Maximum und man hat also, gemäß Fig. 600, für $\varphi = +45^0$ das, einem Zuge entsprechende Dehnungsmaximum $+\frac{1}{2}\vartheta$ und für $\varphi = -45^0$ das, einem Drucke entsprechende Dehnungsmaximum $-\frac{1}{2}\vartheta$.

Bei einer Schubspannung $[\tau]$, welcher die Schiebung $[\vartheta]$ entspricht, tritt also als größte Dehnung $\frac{1}{2}\vartheta$ auf, und zwar in Richtungen, welche in einer Ebene, senkrecht zur Ebene von $[\tau]$ gegen $[\tau]$ um 45^0 geneigt sind.

Kehrt man mit diesem Ergebnisse zurück zu Fig. 591, so bemerkt man, daß die dort für BC und AD auftretenden Spannungen vom Werte $\sigma = \tau$ zugleich in die Richtungen der größten Dehnung $\varepsilon \cdot \frac{m+1}{m}$ fallen, welche wieder durch $\frac{1}{2}\vartheta$ ausgedrückt wurde. Dieser Dehnung $\frac{1}{2}\vartheta = \varepsilon \cdot \frac{m+1}{m}$ entspricht die Anstrengung (reduzierte Spannung) $E \cdot \varepsilon \cdot \frac{m+1}{m}$, welche $\leqq k$ sein muß.

Da aber $\sigma = E \cdot \varepsilon$ und da außerdem hier $\sigma = \tau$ ist, so folgt daraus

$$\tau \cdot \frac{m+1}{m} \leqq k$$

oder

$$\tau \leqq \frac{m}{m+1} k \cdot$$

Demnach ist die zulässige Spannung t für τ bestimmt als

$$t = \frac{m}{m+1} \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 270)$$

und zwar muß für k der kleinere der Werte k_1 und k_2 genommen werden, falls k für Zug (k_1) und Druck (k_2) nicht übereinstimmt.

Für $m = 3 \ldots 4$ ist $t = \frac{3}{4}k \ldots \frac{4}{5}k$.

Man hat diese Beziehung von t und k gelegentlich auch auf die Bruchspannungen T und K ausgedehnt, was natürlich jeder Begründung entbehrt, da, bereits lange bevor die Zerstörung des Materiales eintritt, der bisherige Ansatz der Rechnungen ungültig wird.

Es fragt sich, ob sich auch noch eine weitere Beziehung zwischen k und t ergiebt, falls man eine einfache Zug- oder Druckbeanspruchung des Materials betrachtet. In diesem Falle hatte sich (vergl. S. 824) die Schubspannung für eine Fläche, welche mit der Normalspannung den Winkel δ bildet, ergeben als $\tau' = \frac{1}{2}\sigma \cdot \sin 2\delta$.

Das Maximum von τ', welches höchstens den Wert von t annehmen darf, tritt für $\delta = 45^0$ ein und hat den Wert $\frac{1}{2}\sigma$, so daß also $\frac{1}{2}\sigma \leqq t$ oder

$$\sigma \leqq 2t$$

sein muß.

Für $t = \frac{m}{m+1} k$ ist also σ wegen der Schiebungen unter der Grenze $2 \cdot \frac{m}{m+1} \cdot k$ zu halten, was für $m = 3 \ldots 4$ dem Werte $^3k \ldots \frac{8}{5}k$

entspricht; da σ wegen der Dehnungen bereits unter der Grenze k gehalten werden muß, so ist die Bedingung für die Schiebungen so wie so erfüllt. Trotzdem kann oberhalb der Proportionsgrenze, wo die entwickelten Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren, sehr wohl der Schub stärker auf Zerstörung wirken als der Zug (oder Druck), so daß auch unter anderem eine Zerstörung durch Schub in einer, gegen die Stabachse unter 45^0 geneigten Ebene erfolgen kann [1]).

Wenn man die Regel aufstellt, daß die Konstruktionsspannungen jedenfalls unter der Elasticitätsgrenze liegen müssen, so ist damit in theoretischer Hinsicht nichts Greifbares bezeichnet, da die Elasticitätsgrenze (vergl. S. 812) bei strengen Betrachtungen fließend ist. Trotzdem läßt sich für viele Materialien in praktischer Hinsicht sehr wohl eine Elasticitätsgrenze zahlenmäßig bestimmen, indem man auf Grundlage der Erfahrung bestimmt, bis zu welcher Grenze Formänderungen von Fall zu Fall vernächlässigt werden dürfen.

Man hat dazu (namentlich durch Messungen der Dehnungen) bei verschiedenen Beanspruchungen die bleibende Formänderung (Dehnungsrest) und die wieder verschwindende Formänderung (Federung) für ein bestimmtes Material festzustellen und sich daraus ein Bild von dem Verhalten des betreffenden Materiales zu machen. Dabei ist zu beachten, daß manche Stoffe, wie Gußeisen, Beton u. s. w., zunächst unter dem Einflusse der Belastungen relativ große bleibende Formänderungen zeigen, dabei aber in einen neuen Zustand übergehen, gegen den dann die folgenden Formänderungen relativ gering sind.

Die Spannung für die Elasticitätsgrenze (der Praxis) bezeichnet man durch σ_e.

Bei vorstehender Betrachtung wurde vorausgesetzt, daß es sich um sogen. ruhende Belastungen ruhender Körper handelt, wie sie den einfachen Konstruktionen des Hochbaues entsprechen.

Anders verhält sich z. B. die Beanspruchung von Brücken, welche bewegliche Lasten (Fuhrwerke) zu tragen haben, oder auch die Beanspruchung von beweglichen Gliedern innerhalb einer Maschine, welche wechselnden Spannungen ausgesetzt sind.

Im Hinblick auf solche, in der Praxis sehr häufige Fälle hat man die Versuche über das Verhalten der Materialien (nach dem Vorgange von Wöhler) ausgedehnt, indem man vor allem deren Zerstörung unter dem Einflusse häufig wechselnder Belastungen berücksichtigte.

Dabei zeigte es sich, daß ein Körper, der bei einer ruhenden Belastung von der Spannung K zerstört wird, unter übrigens gleichen Umständen durch eine weit geringere Belastung zerstört wird, wenn diese wiederholt aufgebracht und entfernt wird. Dem-

[1]) Bei Steinwürfeln, welche zerdrückt werden, bilden die Bruchflächen oft zwei Pyramiden, deren Spitzen in der Mitte der Würfel liegen, während ihre Grundflächen die Preßflächen sind. Man kann diese Art des Brechens auf Schubkräfte zurückführen, sie läßt sich aber auch anders erklären, zumal auch andere Bruchflächen vorkommen.

gemäß hat man neben der Tragfestigkeit noch die Ursprungsfestigkeit und die Schwingungsfestigkeit, welche man auch unter dem Namen „Arbeitsfestigkeit" zusammenfaßt, als Bruchspannungen eingeführt und diesen wiederum besondere Konstruktionsspannungen zugeordnet und zwar gemäß folgender Bestimmung:

Unter „Ursprungsfestigkeit" versteht man die Spannung, die im Wechsel mit dem spannungslosen Zustande gerade noch beliebig oft ertragen wird, ohne daß eine Zerstörung des Materiales erfolgt.

Unter „Schwingungsfestigkeit" versteht man die Spannung, welche beim Wechsel von gleichen Zugspannungen und Druckspannungen gerade noch beliebig oft ertragen wird, ohne daß eine Zerstörung des Materials erfolgt. Entsprechendes gilt auch für die Beanspruchung durch Schub und auch für die durch Biegung und Verdrehung.

Dabei zeigt sich, daß man die Schwingungsfestigkeit angenähert als die in praktischer Hinsicht einzuführende Elasticitätsgrenze (σ_e) ansehen darf.

So sind z. B. für Schmiedeeisen bei Zug bezw. Zug und Druck durch 4000 Atm., 2000 Atm., 1770 Atm. die drei Arten der Festigkeit gegeben, deren letzte zugleich im allgemeinen die Elasticitätsgrenze (der Praxis) darstellt.

Die Konstruktionsspannungen, welche den drei Arten der Festigkeit entsprechen, sind ebenso für Schmiedeeisen durch folgende Tabelle gegeben:

Konstruktionsspannung	Zug	Druck	Schub
Tragfestigkeit entsprechend	900	900	720
Ursprungsfestigkeit entsprechend . . .	600	600	480
Schwingungsfestigkeit entsprechend . .	300		240

Besondere Zahlenwerte sind außerdem noch für die Beanspruchung durch Stöße einzuführen.

Dabei spielt gelegentlich der Begriff der Formänderungsarbeit eine Rolle. Man versteht darunter die Arbeit, welche von Seiten der angreifenden Kräfte zur Formänderung aufgewandt wird und welche aus dem deformierten Körper bei Beseitigung der angreifenden Kräfte bis zu einem gewissen Grade wiedergewonnen werden kann.

Das Verhältnis der Arbeit, welche der deformierte Körper bei gegebenen Umständen wieder abzugeben imstande ist, zu der Formänderungsarbeit heißt der entsprechende Grad der Elasticität des Körpers.

Der Grad ist ein echter Bruch, welcher die Grenzen 0 und 1 nie erreicht.

Vollkommen-elastisch würde ein Körper sein, wenn er den Grad 1 hätte, d. h. wenn die ganze Formänderungsarbeit wiedergewonnen werden könnte, wobei kein Formänderungsrest zurückbliebe.

Vollkommen-unelastisch würde ein Körper sein, wenn er den Grad 0 hätte, d. h. wenn kein Teil der Formänderungsarbeit wiedergewonnen werden könnte, wobei die ganze Formänderung bestehen bliebe.

In praktischer Hinsicht nennt man Körper vollkommen-elastisch, wenn ihr Elasticitätsgrad dem Werte 1 und vollkommen-unelastisch, wenn dieser dem Werte 0 so nahe kommt, daß die Abweichung vernachlässigt werden darf.

Die Eigenschaft, Formänderungsarbeit einerseits aufzunehmen und anderseits wieder bis zu einem gewissen Grade abzugeben, kennzeichnet überhaupt die elastischen Körper im Gegensatz zu dem Bilde des starren Körpers.

124. Die Gliederung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Der Teil der Dynamik elastisch-fester Körper, welcher für die Technik von Bedeutung ist, und kurz als „Lehre von der Elasticität und Festigkeit" bezeichnet wird, beschäftigt sich zunächst mit statischen und dann mit kinetischen Konstruktionen, wobei aber zu bemerken ist, daß die Formänderung selbst stets (auch innerhalb statischer Konstruktionen) ein kinetischer Vorgang ist.

Den Hauptteil der Statik bildet die Behandlung des geraden Stabes (Balkens) und zwar für isotrope Materialien, welche dem Gesetze von Hooke gehorchen. Nachdem für den geraden Stab unter dieser Voraussetzung die vier Fälle der einfachen Elasticität und Festigkeit durchgeführt worden sind, kommen für ihn diejenigen Fälle der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit zur Darstellung, welche für die Praxis von Bedeutung sind. Darauf geht man über zur Behandlung von Systemen gerader Stäbe, wie sie vornehmlich in Fachwerken verwendet werden.

Eine Ausdehnung der Untersuchung auf krumme Stäbe und Konstruktionen aus diesen führt einerseits zur Behandlung bestimmter Träger und der Gewölbe, anderseits zur Behandlung der Federwerke.

Hieran schließt sich die Untersuchung der plattenförmigen Körper, d. h. ebener Platten, Röhren, Hohlkugeln u. s. w.

In gleicher Weise müßte ferner die Statik durchgeführt werden für isotrope Materialien, welche nicht dem Gesetze von Hooke folgen, d. h. für bestimmte Gruppen von Stoffen, für welche statt des Gesetzes von Hooke je ein anderes Gesetz gilt, desgleichen für heterotrope Stoffe. Bei dem augenblicklichen Stande unserer Kenntnis über das Verhalten der Materialien ist diese Aufgabe aber noch unlösbar, so daß man sich hier darauf beschränken muß, die Statik für Materialien, welche dem Gesetze von Hooke folgen, in angemessener Weise zu ergänzen.

In der Kinetik handelt es sich einmal darum, mit Rücksicht auf das Princip von d'Alembert, die Behandlung statischer Konstruktionen zu ergänzen und dann darum, den Stoß der Körper sachgemäß zu behandeln, wobei auch die Grundlage für eine allgemeine Beurteilung der Arbeitsleistung der Maschinen gewonnen wird.

Zweites Kapitel.

Statik isotroper elastisch-fester Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen.

Erste Abteilung.

Der gerade Stab unter der Einwirkung von Zug und Druck.

125. Die Beanspruchung durch Zug oder Druck. Da das Eigengewicht eines Stabes stets als senkrecht nach unten gerichtete Kraft auftritt, so muß bei dessen Berücksichtigung die Achse eines geraden Stabes stets senkrecht gestellt werden, falls dieser *nur* auf Zug oder Druck (vergl. Fig. 594) beansprucht werden soll, da sonst noch eine Biegung des Stabes durch sein Eigengewicht mit in Ansatz zu bringen ist.

Da die wirkenden Kräfte bei Beanspruchung des geraden Stabes durch Zug oder Druck in dessen Achse fallen müssen, so dürfen diese bei Berücksichtigung von dessen Eigengewicht gleichfalls nur in Vertikalen wirken.

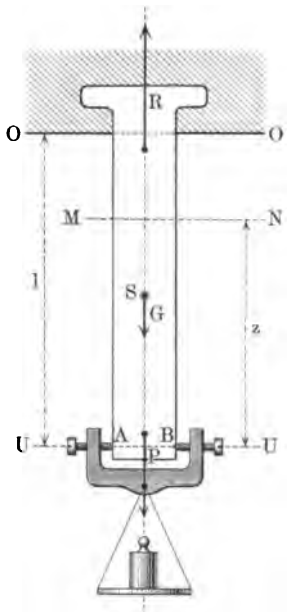
Bei Vernachlässigung des Eigengewichts ist die Lage der Achse natürlich beliebig.

Wir werden im folgenden stets eine senkrechte Achsenlage und demnach eine wagerechte Lage der Querschnitte voraussetzen, da sich dabei die Beschreibung der Anordnungen wesentlich vereinfacht.

Was die Dimensionen der betrachteten Stäbe anlangt, so ist bei Beanspruchung durch *Zug* keine besondere Voraussetzung zu machen, während bei Beanspruchung durch *Druck* außerdem für die Länge der Stäbe stets eine gewisse Grenze angenommen wird, um eine *etwaige Knickung*, d. h. eine Beanspruchung und Zerstörung durch *Druck und Biegung* (vergl. Fig. 598) auszuschließen. Letzteres ist theoretisch für den Ansatz einer einfachen Zug- oder Druckbelastung natürlich ausgeschlossen, thatsächlich aber bewirken kleine Ungleichmäßigkeiten im Materiale und kleine Fehler der Anordnung stets, daß die wirkenden Kräfte nicht genau in die geometrisch bestimmte Stabachse fallen und daß also eine sogen. excentrische Belastung vorliegt. Diese ist für einfache Zugbelastung immer zu vernachlässigen, führt aber für Druckbelastungen bei noch so geringen Werten der Verschiebung gegen die Stabachse zur Knickung, falls die Länge des Stabes eine gewisse Grenze überschreitet.

126. Zug und Druck bei Vernachlässigung des Eigengewichtes. Der senkrecht befestigte prismatische Stab der Fig. 601 erhält bei Vernachlässigung seines Eigengewichtes durch $[P]$ eine Dehnung ε in der Achsenrichtung und senkrecht dazu eine Querdehnung $-\frac{1}{m}\varepsilon$, wobei $m = 3 \ldots 4$ ist; durch letztere geht der Querschnitt f über in f'. Bei Beginn der Belastung ist $\frac{P}{f} = \sigma$ die mittlere Spannung für den untersten Querschnitt, welche infolge der Querdehnung in $\frac{P}{f'} = \sigma'$ übergeht.

Fig. 601.



In erster Annäherung darf man eine gleichmäßige Verteilung der Spannungen für den untersten Querschnitt annehmen, so daß σ bezw. σ' zugleich die größte Spannung darstellt, welche im untersten Querschnitt vorhanden ist.

Für jeden Horizontalschnitt MN ist für das Gleichgewicht des unteren Teiles eine Kraft $[\bar{P}]$ vom Werte P erforderlich, so daß unter den gleichen Voraussetzungen wie oben, σ' überhaupt die größte Spannung im Materiale ist.

Ist k der zulässige Wert der Spannung, so erfordert die Sicherheit der Konstruktion, daß $\sigma' < k$ ist.

Im allgemeinen darf man den Unterschied von σ und σ' für die Praxis vernachlässigen, so daß bei voller Ausnutzung des Materiales gilt

$$\frac{P}{f} = \sigma \text{ für } \sigma = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 271)$$

Daraus folgt für die Tragkraft $[P]$ die Beziehung

$$P = f \,.\, \sigma \text{ für } \sigma = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 272\,a)$$

und für den Querschnitt f die Beziehung

$$f = \frac{P}{\sigma} \text{ für } \sigma = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 272\,b)$$

Bei Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes gilt für die Dehnung $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ die Gleichung $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, so daß man für λ erhält

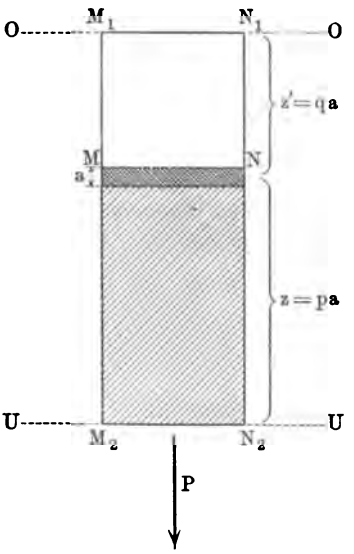
$$\lambda = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{P \,.\, l}{f \,.\, E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 273)$$

Für Druck gilt dieselbe Betrachtung.

Kommt für dasselbe Material Zug und Druck in Frage, so ist zu beachten, ob k für beides denselben Wert hat, oder ob die zulässige Spannung für Zug (k_1) von der zulässigen Spannung für Druck (k_2) zu unterscheiden ist.

127. Zug und Druck bei Berücksichtigung des Eigengewichtes. Kommt neben $[P]$ auch das Eigengewicht $[G]$ in Frage, so bleibt die Betrachtung für den untersten Querschnitt der Fig. 601 dieselbe, während jeder Schnitt MN außer durch $[P]$ auch durch das Gewicht des unter ihm befindlichen Teiles des Stabes beansprucht wird.

Fig. 602.



Hier haben also die Querschnitte verschiedene Spannungen. Bei den oben gemachten Annahmen nimmt die Spannung zu vom untersten bis zum obersten Querschnitt und zwar von $\frac{P}{f}$ bis $\frac{P+G}{f}$.

Man nennt in diesem Falle den obersten Querschnitt den gefährlichen Querschnitt, weil in ihm die Spannung am größten ist, so daß in ihm die Zerstörung des Materiales zu befürchten ist.

Hält man die Spannung für den obersten Querschnitt unter der Grenze k, so liegen alle Spannungen unter dieser Grenze, d. h. man hat bei Ausnutzung des Materiales die Bedingung

$$\frac{P+G}{f} = \sigma \text{ für } \sigma = k \quad \cdot \quad 274)$$

Daraus folgt für die Tragkraft $[P]$ die Beziehung

$$P = f\sigma - G \text{ für } \sigma = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 275\,a)$$

und für den Querschnitt f die Beziehung

$$f = \frac{P+G}{\sigma} \text{ für } \sigma = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 275\,b)$$

Um nun die Verlängerung unter Berücksichtigung des Eigengewichtes zu bestimmen, betrachten wir (vergl. Fig. 602) eine Platte bei MN von der Höhe $a = \frac{1}{n} l$.

Hat diese vom freien Ende des Stabes den Abstand $z = p \,.\, a$, so wird sie, abgesehen von $[P]$, durch das Gewicht $(fz) \,.\, \delta = (fpa)\,\delta$ des unter ihr hängenden Teiles beansprucht, falls δ das spezifische Gewicht des Materiales bezeichnet.

Man hat für die Verlängerung λ_a dieser Platte nach Gleichung 273)

$$\lambda_a = \frac{(fpa)\,\delta + P}{f} \cdot a \cdot \frac{1}{E} = a^2 p \cdot \frac{\delta}{E} + a \frac{P}{fE}.$$

Zerlegt man den ganzen Stab in solche Platten von der Höhe a, so ist die gesamte Verlängerung

$$\lambda = \Sigma \lambda_a = \frac{\delta}{E} \cdot \Sigma a^2 p + \frac{P}{fE} \Sigma a.$$

Beim Grenzübergange für *lim* . $n = \infty$ ergiebt sich wieder

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{l^2 . \delta}{E} + \frac{lP}{fE} = \frac{l(\frac{1}{2} fl\delta + P)}{fE}.$$

Da $G = fl\delta$ ist, so ist hier

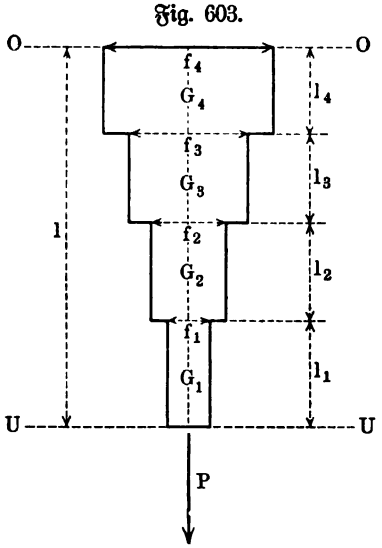
$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G)l}{fE} \quad \ldots\ldots\ldots \cdot 276)$$

Für Druck gelten entsprechende Betrachtungen; der gefährliche Querschnitt ist hier natürlich der unterste.

Demgemäß gilt im Hinblick auf die ursprünglichen Formeln Nr. 271) und Nr. 273) für die Praxis die Regel: Um das Eigengewicht G zu berücksichtigen, hat man für die Berechnung der Spannung P um G und für die Berechnung der Verlängerung P um $\frac{1}{2} G$ zu vermehren.

128. Die Form gleicher Spannung für Zug und für Druck. Unter Berücksichtigung des Eigengewichtes wird nur der gefährliche Querschnitt der zulässigen Spannung entsprechend beansprucht, alle anderen Querschnitte dagegen geringer, so daß diese kleinere Flächen haben dürften, als sie thatsächlich besitzen. Wenn man alle Querschnitte in dem Maße verringert, daß sie die zulässige Spannung k erhalten, sobald der gefährliche Querschnitt diese Spannung erhält, so gelangt man zu einer Balkenform, die sich vom gefährlichen Querschnitt aus verjüngt; man nennt sie Form gleicher Spannung oder Form gleichen Widerstandes. Um diese Form zu bestimmen, denken wir uns zunächst einen Stab aus prismatischen Teilen, deren Querschnitte abnehmen, zusammengesetzt, wie es Fig. 603 zeigt, im Hinblick auf Beanspruchung durch Zug. Der Querschnitt f_1 hat dann außer P das Gewicht $G_1 = f_1 l_1 \delta$ zu tragen, so daß für ihn gilt $\frac{P + f_1 l_1 \delta}{f_1} = k$.

Fig. 603.



Daraus folgt $f_1 = \frac{P}{k - l_1\delta}$ und $G_1 = \frac{Pl_1\delta}{k - l_1\delta}$.

Der Querschnitt f_2 hat außer $P + G_1 = \frac{P . k}{k - l_1\delta}$ das Gewicht $G_2 = f_2 l_2 \delta$ zu tragen, so daß sich gemäß der Formel für den ersten Querschnitt hier ergiebt

$$f_2 = \frac{P + G_1}{k - l_2\delta} = \frac{P . k}{(k - l_1\delta)(k - l_2\delta)} \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{Pkl_2\delta}{(k - l_1\delta)(k - l_2\delta)}.$$

Der Querschnitt f_3 hat außer $P + G_1 + G_2 = \frac{P \cdot k^2}{(k - l_1\delta)(k - l_2\delta)}$ das Gewicht G_3 zu tragen, so daß hier ist

$$f_3 = \frac{P + G_1 + G_2}{k - l_3\delta} = \frac{P \cdot k^2}{(k - l_1\delta)(k - l_2\delta)(k - l_3\delta)} \text{ u. s. w.}$$

Durch den Schluß von $n - 1$ auf n erhält man also für n prismatische Teile

$$f_n = \frac{P \cdot k^{n-1}}{(k - l_1\delta)(k - l_2\delta) \ldots (k - l_n\delta)}.$$

Für $l_1 = l_2 = l_3 = \cdots = \frac{1}{n} l$, d. h. für Teile gleicher Länge bei einer gesamten Länge l, ergiebt sich im besondern

$$f_n = \frac{P \cdot k^{n-1}}{\left(k - \frac{l}{n}\delta\right)^n} = \frac{P}{k} \cdot \left(\frac{k}{k - \frac{l}{n}\delta}\right)^n = \frac{P}{k} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l\delta}{nk}\right)^n}.$$

Die gesuchte Form gleicher Spannung folgt aus dem Ausdrucke für f_n, falls $lim\, n = \infty$ wird.

Bezeichnet man den oberen Querschnitt f_n in diesem Falle durch F, so ist

$$F = \frac{P}{k} \cdot lim \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l\delta}{nk}\right)^n}\right]_{n=\infty}$$

Setzt man $\frac{l\delta}{k} = x$, so hat die Klammer des Nenners die Gestalt $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ und geht für $lim\, n = \infty$ über in $e^{-x} = e^{-\frac{l\delta}{k}}$. Demnach gilt

$$F = \frac{P}{k} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{l\delta}{k}}} = \frac{P}{k} \cdot e^{+\frac{l\delta}{k}}.$$

Bezeichnet man noch den unteren Querschnitt f_1 für diesen Fall durch f, so ist $f = \frac{P}{k}$ und man hat

$$F = f \cdot e^{+\frac{l.\delta}{k}} \quad \text{und} \quad f = \frac{P}{k} \cdot \cdots \cdots \quad 277)$$

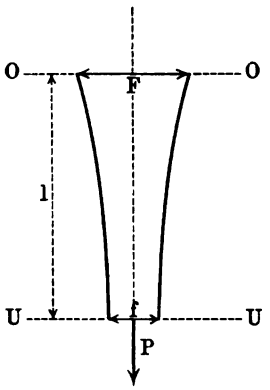
als Bestimmung der Querschnitte für die Form gleicher Spannung.

Ist der Querschnitt z. B. kreisförmig, so ist $f = r^2\pi = \frac{P}{k}$, d. h. $r = \sqrt{\frac{P}{k\pi}}$ und damit ist R für $F = R^2\pi$ für jede Länge l gegeben; Fig. 604 a (a. f. S.) stellt diese Form für Zug und Fig. 604 b (a. f. S.) für Druck dar.

In der Praxis pflegt man für Zug Gestänge und für Druck Pfeiler nach diesen Formen zu konstruieren, setzt sie aber dabei aus Stücken zusammen, wie in Fig. 603.

Die Verlängerung für eine Form gleicher Spannung ist gemäß Fig. 602 leicht zu bestimmen, da hier die Verlängerung λ_a für eine Platte bei MN infolge der konstanten Spannung (k) des Materials gemäß dem Gesetze von Hooke den Wert

Fig. 604 a.



$$\lambda_a = a \cdot \frac{k}{E}$$

annimmt, so daß

$$\lambda = \Sigma\lambda_a = \frac{k}{E} \cdot \Sigma a = \frac{kl}{E} \quad \ldots \quad 278)$$

ist.

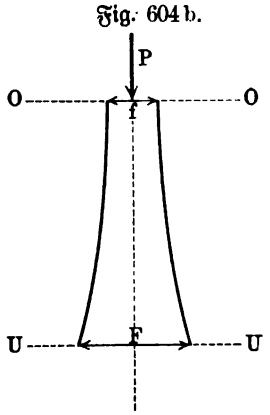
Für den prismatischen Stab war

$$\lambda = \frac{P + \frac{1}{2}G}{f} \cdot \frac{l}{E},$$

wofür man auch, da $\frac{P+G}{f} = k$ ist, schreiben kann

$$\lambda = \frac{P + \frac{1}{2}G}{P+G} \cdot \frac{kl}{E}.$$

Fig. 604 b.



Schreibt man die Verlängerung für die Form gleicher Spannung als

$$\lambda = \frac{P+G}{P+G} \cdot \frac{kl}{E},$$

so sieht man, daß diese Verlängerung größer ist als die des prismatischen Stabes, d. h. die Materialersparnis erfolgt hier auf Kosten der Beanspruchung durch die Dehnung.

Um das Gewicht für die Form gleicher Spannung zu bestimmen, gehen wir zurück zu Fig. 603, für welche aus den bereits gegebenen Betrachtungen

$$P + G_1 + G_2 + \cdots G_n = \frac{P \,.\, k^n}{\left(k - \frac{l\delta}{n}\right)^n} = \frac{P}{\left(1 - \frac{l\delta}{nk}\right)^n}$$

folgt für n Stücke von gleicher Länge $\frac{1}{n}\,l$.

Bezeichnet man das gesamte Gewicht durch G, so ergiebt sich für $\lim n = \infty$

$$P + G = P \,.\, e^{+\frac{l\delta}{k}}$$

d. h. es ist

$$G = P\left(e^{+\frac{l\,.\,\delta}{k}} - 1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 279)$$

und das entsprechende Volumen $V = \frac{G}{\delta}$.

Bemerkenswert ist noch, daß G einfach durch F und f und k ausgedrückt werden kann, man hat

$$G = k(F - f).$$

Für einen unbelasteten Stab ($P = 0$) ist eine Form gleicher Spannung nicht vorhanden ($G = 0$).

129. Die Formänderungsarbeit für Zug und für Druck. Die Arbeit, welche die äußere Kraft [P] in Fig. 601 leistet, um den prismatischen Stab um λ zu verlängern, scheint den Wert $+ P \cdot \lambda$ zu haben, da sich die Kraft [P] während der Formänderung in ihrer Richtung um λ verschiebt, thatsächlich ist der Wert dieser Formänderungsarbeit aber nur $+ \frac{1}{2} P \cdot \lambda$.

Während der Ausbildung der Verlängerung, welche ja ein kinetischer Vorgang ist, teilt sich nämlich [P] in zwei Teile, von denen der eine die Arbeit der Formänderung bildet, während der andere die Effektivkraft der entstehenden Bewegung (gemäß dem Principe von d'Alembert) ist. Diese Bewegung besteht in Schwingungen, parallel zur Achsenrichtung, bei welchen das untere Ende des Stabes mit seiner Belastung auf und ab pendelt, wie es bei belasteten Spiralfedern mit senkrechter Achse allgemein aus der Anschauung bekannt ist.

Ist die Verlängerung, welche von 0 bis λ wächst, bis zum Werte ζ gelangt ($\zeta < \lambda$), so entspricht diesem Werte ζ nach dem Gesetze von Hooke eine Kraft vom Werte $Z = \zeta \cdot \frac{fE}{l}$, d. h. für eine Verlängerung vom Werte ζ würde eine äußere Belastung vom Werte Z dem Zustande des Gleichgewichtes entsprechen, so daß Z zugleich den Wert der inneren Kraft darstellt, welche für dieses Gleichgewicht erforderlich wäre. Um die Verlängerung von ζ auf $\zeta + \frac{1}{n}\lambda$ weiterzuführen, muß die innere Kraft vom Werte Z auf der Strecke $\frac{1}{n}\lambda$ überwunden werden, wozu der Bruchteil Z vom Werte P der äußeren Belastung erforderlich ist. Die entsprechende Arbeit ist also

$$Z \cdot \frac{\lambda}{n} = \zeta \cdot \frac{fE}{l} \cdot \frac{\lambda}{n}$$

oder für $\zeta = p \cdot \frac{\lambda}{n}$ auch

$$p \cdot \frac{fE}{l} \cdot \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

Setzt man λ aus n Stücken vom Werte $\frac{\lambda}{n}$ zusammen, so ist die gesamte Arbeit $\mathfrak{A}$ für die Formänderung gegeben als

$$\mathfrak{A} = \frac{fE\lambda^2}{l} \Sigma \frac{p}{n^2} = \frac{fE}{l} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Für $lim\, n = \infty$ ergiebt sich daraus

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{f\lambda^2 \cdot E}{l} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{f\lambda E}{l} \right) \cdot \lambda$$

oder, da $\frac{f\lambda E}{l} = P$ ist,

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} P \cdot \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad 280)$$

Die Arbeit $+P \cdot \lambda$ der äußeren Kraft $[P]$ teilt sich also in zwei gleiche Teile, von denen der eine die Formänderung bewirkt, während der andere Bewegungen und zwar Schwingungen hervorruft[1]). Dem ersten Teile entspricht potenzielle Energie des Stabes, die bei vollkommen elastischen Körpern bei Beseitigung der Formänderung (Entlastung von $[P]$) vollständig wiedergewonnen werden könnte, während der andere Teil aktueller Energie des Stabes entspricht, welche durch Reibung an der Luft und durch innere Reibung der materiellen Punkte des Stabes unter Erwärmung verloren geht.

Trägt man die Werte der inneren Kraft $Z = \zeta \cdot \frac{fE}{l}$ für $\zeta = 0 \ldots \lambda$ auf, wie es Fig. 605 zeigt, so hat diese Kraft für $\zeta = \lambda$ den Wert $\frac{\lambda f E}{l} = P$, während ihre Arbeit für $\zeta = 0 \ldots \lambda$ durch die Fläche des schraffierten Dreiecks dargestellt wird; die gesamte Arbeit von $[P]$ entspricht dem Rechteck der Fig. 605.

Da $Z = f \cdot \sigma_\zeta$ der Spannung σ_ζ und da $\zeta = l \cdot \varepsilon_\zeta$ der entsprechenden Dehnung ε_ζ proportional ist, so läßt sich die Berechnung der Arbeit auch vermittelst der Linie für Spannung und Dehnung bewirken (vergl. S. 843).

Fig. 605.

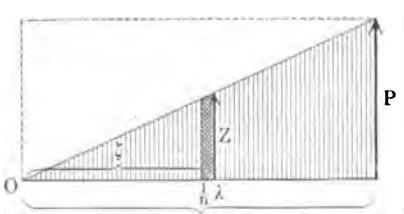
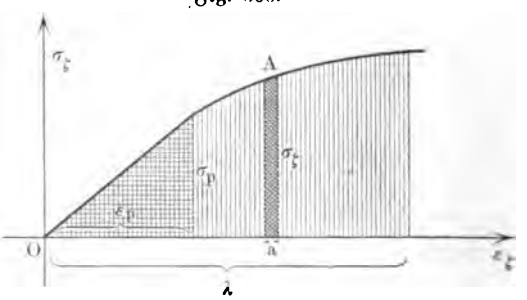


Fig. 606.



Bezeichnet man die, den Schraffierungen entsprechenden Flächen der Fig. 606 für $0 \ldots \zeta$ durch F_0^ζ, so gilt innerhalb des doppelt schraffierten Teiles, der bis zur Proportionsgrenze führt,

$$F_0^\zeta = \frac{\sigma_\zeta \cdot \varepsilon_\zeta}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Z \cdot \zeta}{f \cdot l} = \frac{\mathfrak{A}}{f \cdot l},$$

d. h. man hat

$$\mathfrak{A} = f \cdot l \cdot F_0^\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 281)$$

Diese letztere Formel gilt aber auch über die Proportionsgrenze hinaus, bezw. auch dann, wenn überhaupt keine Proportionalität vorhanden ist, d. h. wenn das Hookesche Gesetz überhaupt nicht in Geltung ist, weil ein bei A gelegener Streifen die Fläche $a \cdot \sigma_\zeta = \frac{\left(\frac{1}{n}\lambda\right) \cdot Z}{f \cdot l}$ hat.

[1]) Die ganze Betrachtung ist streng richtig; die Querdehnung ist nicht etwa vernachlässigt, sie tritt ohne eine in ihrer Richtung wirkende äußere Kraft ein und hat daher auf die Arbeit der Formänderung keinen Einfluß.

Das Hookesche Gesetz (Dreieck) entspricht dem Sonderwerte $F_0^{\zeta} = \frac{\varepsilon_\zeta \cdot \sigma_\zeta}{2}$. Der Ausdruck für $\mathfrak{A}$ in Nr. 280) läßt noch eine bemerkenswerte Umformung zu. Führt man $\lambda = \frac{P.l}{f.E}$ ein, so ist $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{f.E}$, woraus sich für $P = f.\sigma$ ergiebt $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{fl\sigma^2}{E}$. Da das ursprüngliche Volumen des Stabes $V = fl$ ist, so ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 282)$$

d. h. die Arbeit ist in geometrischer Hinsicht nicht von den einzelnen Dimensionen des Stabes, sondern nur von seinem Volumen abhängig.

Man pflegt infolgedessen $\mathfrak{A}$ für die Volumeinheit, d. h. im allgemeinen für den Kubikcentimeter zu berechnen, z. B. für die Grenze der Proportionalität (σ_p).

Man hat z. B. für Schmiedeeisen, bei dem σ_p für Zug und für Druck im Mittel 1600 Atm. beträgt, bei $E = 2\,000\,000$ Atm.

$$\mathfrak{A}_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\overline{1600}^2}{2\,000\,000} = 0{,}64,$$

d. h. für Schmiedeeisen sind 0,64 cmkg Arbeit erforderlich, um die Volumeneinheit bis zu Spannungen, welche der Proportionsgrenze entsprechen, positiv oder negativ zu dehnen, unter Voraussetzung eines einfachen Spannungszustandes für Zug oder Druck.

Denkt man sich bei konstantem Querschnitt f die Länge eines Stabes veränderlich oder betrachtet man Stäbe von demselben Querschnitt (f) bei verschiedener Länge (z), so ist es zweckmäßig, die Formel Nr. 282 zu schreiben als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot f \,.\, z = F(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 283)$$

wobei $F'(z) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot f$ die Ableitung von $F(z)$ nach z ist.

Es bedeutet dann $\frac{z}{n} \cdot F'(z)$ die Arbeit für die Formänderung einer bei MN (vergl. Fig. 602) gelegenen Platte von der Dicke $\frac{z}{n}$; diese ist hier für alle solche Platten eine Konstante.

Zerfällt die beobachtete Verlängerung λ in die Federung λ_1 und den Dehnungsrest λ_2 (vergl. S. 856), so ist die Arbeit für die Längenänderung nach Grashof als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} P(\lambda_1 + \omega\lambda_2)$$

anzusetzen, wobei $\omega = 1{,}5 \ldots 2$ ist.

Um die Arbeit bei einer Dehnung durch das eigene Gewicht zu bestimmen, beachten wir, daß die Platte bei MN in Fig. 602 durch das Gewicht

$(\varepsilon f)\delta$ des unter ihr befindlichen Teiles um $\lambda_a = \frac{a(\varepsilon f\delta)}{f} \cdot \frac{1}{E}$ verlängert wird und daß dieser Verlängerung die Arbeit

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon f\delta) \cdot \frac{a(\varepsilon f\delta)}{f} \cdot \frac{1}{E} = \tfrac{1}{2}\delta^2 f\varepsilon^2 a \cdot \frac{1}{E} = \tfrac{1}{2}\delta^2 a^3 f \cdot \frac{1}{E} \cdot p^2$$

entspricht. Man hat also für den ganzen Körper

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\delta^2 a^3 f \cdot \frac{1}{E} \cdot \Sigma p^2,$$

d. h. für $lim\ .\ n = \infty$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}(lf\delta)^2 \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{1}{E}.$$

Da $lf\delta$ das Gewicht Q darstellt und da $\lambda = \frac{1}{2}\frac{Ql}{fE}$ ist, so folgt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{3} Q\ .\ \lambda\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 284)$$

Wir bestimmen noch die Lage des Schwerpunktes für den, durch sein eigenes Gewicht Q verlängerten Stab.

Die Platte bei MN in Fig. 602 kann man als die unterste Schicht eines Stabes ansehen, welcher durch sein eigenes Gewicht $(\varepsilon' f)\delta$ und durch die Belastung $(\varepsilon f)\delta$ verlängert wird, so daß dieser Stab die Verlängerung

$$\frac{(\varepsilon f\delta + \frac{1}{2}\varepsilon' f\delta)\varepsilon'}{f\ .\ E}$$

zeigt und demnach nach der Verlängerung die Länge

$$\varepsilon' + \frac{\delta}{E}\varepsilon'(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon') = \varepsilon' + \frac{\delta}{E}\varepsilon'(l - \tfrac{1}{2}\varepsilon')$$

hat. Diese Länge bezeichnet zugleich die Stellung der Platte bei MN im gedehnten Stabe, so daß das Massenmoment der Platte in Bezug auf die Horizontalebene durch O, da die Platte das Gewicht $af\delta$ hat,

$$af\delta\left[\varepsilon' + \frac{\delta}{E}\varepsilon'(l - \tfrac{1}{2}\varepsilon')\right]$$

beträgt. Das entsprechende Moment des ganzen Stabes ist also für $\varepsilon' = aq$

$$a^2 f\delta\left(1 + \frac{\delta}{E}l\right)\Sigma q - \tfrac{1}{2}a^3 f\frac{\delta^2}{E}\Sigma q^2$$

und für $limn = \infty$

$$\frac{l^2 f\delta}{2}\left(1 + \frac{\delta}{E}l\right) - \tfrac{1}{6}l^3 f\frac{\delta^2}{E} = lf\delta\left(\frac{l}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{l^2\delta}{E}\right).$$

Der Abstand des Schwerpunktes des verlängerten Stabes von der Horizontalen durch O entsteht aus diesem Ausdrucke bei Division durch das Gewicht $Q = fl\delta$, d. h. er ist

$$\frac{l}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{l^2\delta}{E} = \frac{l}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{Ql}{fE} = \frac{l}{2} + \tfrac{2}{3}\lambda.$$

Demnach beträgt die Senkung des Schwerpunktes bei der Verlängerung um λ hier $\frac{2}{3}\lambda$, so daß dieser Senkung die Arbeit $\frac{2}{3}Q \cdot \lambda$ entspricht. Gemäß Formel Nr. 284) wird also auch hier die Hälfte der Arbeit der äußeren Kräfte auf die Formänderung verwandt.

Handelt es sich um eine Form gleicher Spannung, so ist die Formänderung für eine Platte bei MN

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot v,$$

falls v das Volumen der Platte bezeichnet. Da σ für alle Platten denselben Wert hat und zwar bei Ausnutzung des Materials den Wert k, so ist die gesamte Arbeit hier wieder [1])

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot \Sigma v = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 285)$$

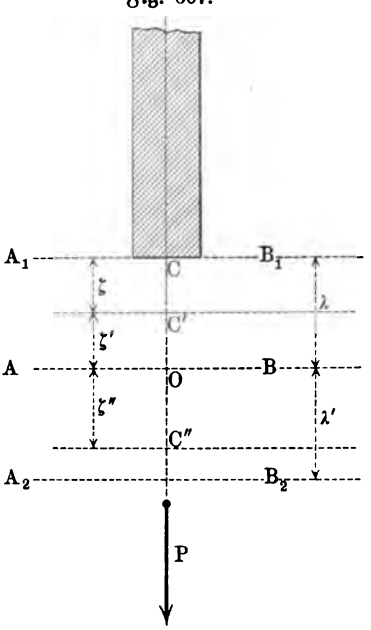
und bei Ausnutzung des Materiales ist also

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{E} \cdot \frac{P}{\delta}\left(e^{+\frac{l \cdot \delta}{k}} - 1\right).$$

130. Schwingungen bei Zug- oder Druckbelastung. Wir betrachten nun die Schwingungen etwas näher, die ein Stab (vergl. Fig. 607) ausführt, wenn er plötzlich durch ein Gewicht $[P]$ belastet wird. Ist der Punkt C des Stabendes mit diesem nach C' gekommen, so entspricht der Verlängerung $CC' = \zeta$ die innere Kraft $Z = \frac{\zeta f E}{l}$, so daß das Stabende nun durch die Kraft $P - Z = P - \frac{\zeta f E}{l}$ weiter getrieben wird. Da aber $P = \frac{\lambda f E}{l}$ ist, so ist die treibende Kraft $\frac{f E(\lambda - \zeta)}{l}$ oder, falls man $\lambda - \zeta = \zeta'$ setzt,

$$\zeta' \cdot \frac{f E}{l}.$$

Fig. 607.



Bis zur Ruhelage AB des zum Gleichgewichte gekommenen belasteten Stabes entspricht die Bewegung also einer harmonischen Schwingung vom Mittelpunkte O, da die treibende Kraft der Verschiebung von O aus proportional und ihr entgegen gerichtet ist. Dies ist auch für die Fort-

[1]) Dabei handelt es sich insofern um eine Annäherung, als die Spannungen zwar innerhalb der Achse des Stabes senkrecht zum Querschnitte stehen, für Umfangspunkte des Querschnittes aber in die Oberfläche des Stabes fallen.

setzung der Bewegung der Fall, da Z für C'' den Wert $\frac{fE(\lambda + \zeta'')}{l}$ hat, so daß jetzt $Z - P = \frac{fE(\lambda + \zeta'')}{l} - P = \frac{\zeta'' fE}{l}$ die treibende Kraft ist.

Die Bewegung endet an der Grenze A_2B_2. Um deren Lage zu bestimmen, beachten wir, daß für A_1B_1 und für A_2B_2 Ruhe vorhanden ist, daß also der gesamte Zuwachs an lebendiger Kraft für die Bewegung von A_1B_1 nach A_2B_2 Null ist und demnach auch die gesamte Arbeit hierfür verschwinden muß.

Die Arbeit von P ist $P(\lambda + \lambda')$, die Arbeit von Z ist $\frac{1}{2}\bar{P}(\lambda + \lambda')$, falls $\bar{P}$ den Wert von Z für A_2B_2 bezeichnet, so daß also $\bar{P} = 2P$ ist.

Da die Kraft Z proportional zur Verlängerung ist und den Wert P für λ hat, so hat die Verlängerung für $2P$ den Wert 2λ, d. h. $\lambda + \lambda' = 2\lambda$ und $\lambda' = \lambda$.

Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes ist $\frac{P}{g}$ die zu bewegende Masse, so daß sich die Beschleunigung der Schwingung als

$$-\zeta' \cdot \frac{fE}{lP} \cdot g$$

darstellt. Der Faktor von ζ' (vergl. S. 174) ist $\frac{fE}{lP} \cdot g$ und also die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{lP}{fEg}}.$$

Stellt man T durch Versuche fest, so ist also

$$E = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{lP}{fg} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 286)$$

d. h. E ist bestimmt durch die Dimensionen l und f, durch die Belastung P und die beobachtete Dauer T einer Doppelschwingung. Vergl. dazu S. 284 und S. 313, Nr. 95.

Das Eigengewicht G kann man angenähert dadurch berücksichtigen, daß man P um $\frac{1}{2}G$ in Gleichung Nr. 286) vermehrt, entsprechend der Gleichung $\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2}G) \cdot l}{f} \cdot \frac{1}{E}$.

Wird die Schwingung durch den Fall eines Gewichtes $[P]$ hervorgebracht, wie es Fig. 608 andeutet, so kommt außerdem für die Betrachtung noch die (aktuelle) Energie der fallenden Masse in Betracht, die Ph ist für eine Fallhöhe h. Im Augenblicke des Aufschlagens von P beginnt die Verlängerung des vorher ruhenden Stabes, bis für ihn bei einer Spannung $\bar{\sigma}$ und einer Verlängerung $\bar{\lambda}$ wieder ein Augenblick der Ruhe eintritt, in welchem die zugeführte Energie $Ph + P\bar{\lambda}$ durch die innere Arbeit aufgezehrt ist.

Man hat also für ein Volumen $V = fl$ den Ansatz

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V = Ph + P \cdot \bar{\lambda}.$$

Da $\bar{\lambda} = \frac{\bar{\sigma} \cdot l}{E}$ ist, so ergiebt sich hier

$$\tfrac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V = Ph + \frac{P \cdot \bar{\sigma} l}{E},$$

d. h. man hat

$$\bar{\sigma} = \frac{Pl}{V} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{P\,l^2}{V^2} + \frac{2\,Ph\,E}{V}}.$$

Da der Wurzelwert $\frac{Pl}{V}$ übersteigt, so würde das Zeichen — einen negativen Wert für $\bar{\sigma}$ geben, während es sich hier um eine Zugspannung handelt, d. h. nur das Zeichen + der Lösung ist brauchbar.

Ist der mit $[P]$ belastete Stab durch Schwingungen zur Ruhe gekommen, so ist $\frac{P}{f} = \sigma$. Führt man diese Werte in den Ausdruck für $\bar{\sigma}$ ein, so ergiebt sich

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma \cdot \frac{h}{l} \cdot E}.$$

Die Formel zeigt das Wachsen von σ im Zusammenhange mit dem Wachsen von h; für $h = 0$ ist wieder $\sigma = 2\sigma$.

Fig. 608.

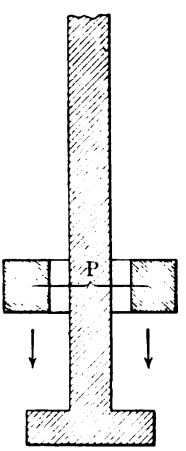
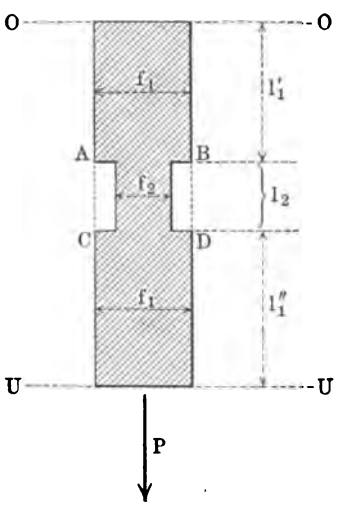


Fig. 609.



131. Der Einfluß unstetiger Querschnittsunterbrechungen. Wenn der Querschnitt f_1 eines Stabes an den Stellen A, B, C, D eine Verringerung auf f_2 erfährt, wie es Fig. 609 zeigt, so ist für f_1 die Spannung $\sigma_1 = \frac{P}{f_1}$ und für f_2 die Spannung $\sigma_2 = \frac{P}{f_2}$ anzusetzen, so daß die Arbeit für eine Dehnung

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{E} \cdot V_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E} \cdot V_2$$

beträgt, falls man die f_1 und f_2 entsprechenden Volumen durch V_1 und V_2 bezeichnet.

Für $f_1 = nf_2$ ist $\sigma_1 = \frac{1}{n}\sigma_2$, d. h. man hat

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E}\left(\frac{V_1}{n^2} + V_2\right).$$

Verringert man f_1 überall auf die Größe f_2, so geht das Volumen V_1 über in $\frac{V_1}{n}$, und es ist also für einen Stab vom Querschnitte f_2

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E}\left(\frac{V_1}{n} + V_2\right).$$

Letzterer Wert für $\mathfrak{A}$ ist aber größer ($n > 1$) als ersterer, d. h. die Arbeit für die Erzielung einer maximalen Spannung σ_2 ist für den Stab mit unstetiger Querschnittsbildung kleiner als für den Stab mit dem Querschnitt f_2, letzterer hält also, was die Arbeitsleistung anlangt, mehr aus. Man kann dieser Thatsache auch den Ausdruck geben, daß die teilweise erfolgte Verstärkung von f_2 auf f_1 nicht bloß Materialverschwendung ist, da doch nur die maximale Spannung σ_2 in Frage kommt, sondern sogar unvorteilhaft wirkt in Bezug auf die Arbeitsleistung. Die Betrachtung gilt auch, wenn l_2 in Fig. 609 noch so klein ist, d. h. auch für zufällige Sprünge oder Risse, wodurch deren Einfluß (z. B. Fehlstellen einer Kette) klar hervortritt. Für einen solchen Riß oder Schnitt ist $V_2 \sim 0$, so daß dann für $V_1 \sim V$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E} \cdot \frac{V}{n^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E} \cdot \frac{V}{n}$$

die beiden Arbeitswerte darstellen, deren Verhältnis $1 : n$ ist.

$\mathfrak{A}$ verringert sich für einen Stab vom Querschnitt f auf $\frac{1}{n^2}\mathfrak{A}$, wenn dessen Querschnitt an einer Stelle (z. B. durch Einsägen) auf $\frac{1}{n}f$ verringert wird, steigt aber wieder auf $\frac{1}{n}\mathfrak{A}$, wenn man die Verringerung auf den ganzen Stab ausdehnt.

132. Die Arten der zulässigen Spannungen und der Bruchspannungen. Die Betrachtungen in § 130 haben gezeigt, daß der Einfluß einer Belastung P abhängt von der Art, wie ihre Wirkung eingeleitet wird. Der Gleichgewichtszustand, für den $\frac{P}{f} = \sigma$ die größte Spannung darstellt, wird im allgemeinen durch Schwingungen erreicht, innerhalb welcher Spannungen auftreten, die größer sind als σ. Nur wenn man $[P]$ zunächst unterstützt und dann die Art der Unterstützung so verändert, daß P stets nur mit dem

Z entsprechenden Werte zur Geltung kommt, ist der Gleichgewichtszustand zu erreichen, ohne daß die Spannung über $\sigma = \frac{P}{f}$ hinausgeht.

Bei plötzlichen Belastungen steigt die Spannung auf 2σ, solange P keine Anfangsgeschwindigkeit zeigt, sonst wächst sie noch erheblich darüber hinaus.

Entsprechend sind auch die Beanspruchungen eines Stabes innerhalb einer maschinellen Konstruktion zu beurteilen, die im Betriebe in verschiedenen Zeitpunkten durch verschiedene Kräfte in Anspruch genommen wird, ebenso die Stäbe in der Konstruktion einer Brücke mit Rücksicht auf die wechselnden Verkehrslasten.

Mit Rücksicht auf alle diese Beziehungen ist die Einteilung (vergl. S. 857) der Bruchspannungen (Festigkeitsmoduln) und der zulässigen Spannungen getroffen, wonach man diese einerseits für ruhende Belastungen (Tragfestigkeit u. s. w.) und anderseits für wechselnde Belastungen (Arbeitsfestigkeit u. s. w.) bestimmt und in letzterem Falle unterscheidet, ob der Spannungswechsel zwischen 0 und σ (Ursprungsfestigkeit u. s. w.) oder zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ (Schwingungsfestigkeit) stattfindet.

Diese Bestimmungen sind namentlich für den Maschinenbau erforderlich.

Außerdem hat man auch, mit Rücksicht auf Erfahrungen an ausgeführten Konstruktionen, noch besondere Formeln für die zulässige Spannung gezogener und gedrückter Stäbe bei wechselnden Spannungen aufgestellt, namentlich für Stäbe, welche in Brückenkonstruktionen verwendet werden.

Als Beispiel führen wir die Häselerschen Formeln an.

Bei Wechsel zwischen 0 und σ gilt für die zulässige Spannung eines Stabes

$$k_I = \frac{\sigma_e}{\mu} \cdot \frac{S_0 + S}{S_0 + \zeta S}$$

und bei Wechsel zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ gilt für die zulässige Spannung eines Stabes

$$k_{II} = k_I \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{S_{min}}{S_{max}}\right),$$

falls dabei bedeuten:

S_0 den Zug oder Druck in Kilogramm, welcher durch das Eigengewicht der Konstruktion in dem Stabe hervorgerufen wird;

S den Zug oder Druck in Kilogramm, welcher in dem Stabe durch die ungünstigste Verkehrslast bewirkt wird und in seiner Art (Zug oder Druck) mit S_0 übereinstimmt;

ζ den Stoßkoeffizienten der Verkehrslast, der zwischen 1,2 und 1,7 schwankt;

μ den Koeffizienten der sogen. Zuschlagspannungen u. s. w., der für Träger auf zwei Stützen zwischen 1,5 und 1,9 schwankt;

S_{min} und S_{max} die absolut kleinsten und absolut größten Werte des Zuges oder Druckes in Kilogramm, welcher dem Eigengewichte der Konstruktion im Verein mit der, mit dem Stoßkoeffizienten multiplizierten, Verkehrslast entspricht.

Man hat dann für den kleinsten Querschnitt des Stabes im ersten Falle $f = \frac{S_0 + S}{k_I}$ und im zweiten Falle $f = \frac{S_0 + S}{k_{II}}$.

Müller-Breslau hält es für rätlich, in der zweiten Häselerschen Formel $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{3}$ zu ersetzen.

133. Erweiterung der Betrachtungen bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkräften (Formänderungsarbeit und Volumendehnung). Bisher wurde angenommen, daß der gerade Stab nur parallel zu seiner Achse durch Zug oder Druck in Anspruch genommen wird. Man bezeichnet den damit gegebenen Zustand des Materiales, bei dem nur parallel zu einer bestimmten (hier durch die Stabachse gegebenen) Richtung A Normalspannungen äußerer Kräfte zu berücksichtigen sind, für jeden Körperpunkt J als einen linearen Spannungszustand (vergl. S. 827). Hier ist für jeden Körperpunkt in der Richtung A bei den gemachten Voraussetzungen eine Dehnung ε vom Werte $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ vorhanden, während senkrecht dazu noch eine Querdehnung $\frac{\varepsilon}{m} = \frac{\sigma}{mE}$ in Rechnung zu stellen ist, der eine reduzierte Spannung $\sigma' = \frac{\sigma}{m}$ entspricht.

Die Werte von σ können im Materiale von Punkt zu Punkt veränderlich sein.

Als ebenen Spannungszustand pflegt man den Zustand des Materiales zu bezeichnen, in welchem in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen äußere Kräfte durch Normalspannungen zu berücksichtigen sind.

Sind diese Spannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ für einen bestimmten Punkt J, so fällt in die Richtung von $[\sigma_1]$ die Dehnung ε_1 und die Dehnung $-\frac{1}{m}\varepsilon_2$, während in die Richtung von σ_2 die Dehnung ε_2 und die Dehnung $-\frac{1}{m}\varepsilon_1$ fällt, so daß für diese Richtungen die reduzierten Spannungen bezw.

$$E\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{m}\varepsilon_2\right) = \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} \quad \text{und} \quad E\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{m}\varepsilon_1\right) = \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m}$$

einzuführen sind.

Als allgemeinen oder räumlichen Spannungszustand pflegt man endlich den Zustand zu bezeichnen, in welchem in drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen äußere Kräfte durch Normalspannungen zu berücksichtigen sind.

Sind diese Spannungen $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$ für einen bestimmten Punkt J, so sind bezw. die reduzierten Spannungen

$$E\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{m}\varepsilon_2 - \frac{1}{m}\varepsilon_3\right) = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \text{ u. s. w.}$$

zu berücksichtigen.

Wird also der Stab in seiner Achse durch eine äußere Kraft P, der die Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ entspricht, und außerdem senkrecht zu

seiner Achse durch Querkräfte auf Zug oder Druck in Anspruch genommen, so wird die Dehnung in Richtung der Stabachse verändert, so daß für sie statt der Spannung σ eine entsprechende reduzierte Spannung einzusetzen ist (vergl. S. 847).

Führt man z. B. Zugkräfte (σ_2 und σ_3) ein, senkrecht zur gezogenen (σ_1) Stabachse, so wird die Leistungsfähigkeit des Stabes für die Achsenrichtung erhöht[1]), falls $\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$ dabei positiv bleibt; es ist dann bei Ausnutzung des Materiales $\sigma_1 = k + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$ zu setzen, statt $\sigma_1 = k$.

Die Größen $\varepsilon_1 - \frac{1}{m}\varepsilon_2 - \frac{1}{m}\varepsilon_3$ u. s. w. stellen natürlich die Hauptdehnungen (vergl. S. 837) dar, d. h. man hat

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{m} = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right) \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}{m} = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}\right) \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{m} = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{m}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 287)$$

Für $\frac{1}{E} = \alpha$ und $\frac{1}{mE} = \alpha'$ erhält man wieder das Gleichungssystem Nr. 260).

Für einen beliebigen Schnitt im Körper ist die Normalspannung stets gemäß Fig. 579 zu bestimmen, wobei aber neben der Normalspannung [σ] auch stets eine Schubspannung [τ] auftritt.

Entsprechend Gleichung Nr. 281) findet man ferner

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_1\sigma_2\right] . V \quad \ldots \quad 288)$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] . V . \quad 289)$$

als Ausdruck für die Formänderungsarbeit bezw. für den ebenen und den räumlichen Spannungszustand.

Um den ersten Ausdruck abzuleiten, gehen wir davon aus, daß gemäß Gleichung Nr. 282) für die beiden Spannungsrichtungen bezw. die beiden Arbeitswerte $\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{E} \cdot V$ und $\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{E} \cdot V$ anzusetzen wären, falls keine Querdehnung vorhanden wäre. Um die Querdehnung $-\frac{\varepsilon_2}{m}$, welche in die Richtung von [σ_1] fällt, zu berücksichtigen, zerlegen wir wieder den vollendeten Dehnungszustand in n Teile und betrachten den Augenblick seiner Entwickelung, in welchem die Dehnung in der Richtung [σ_1] den Wert $\frac{p}{n} \cdot \varepsilon_1$ und

[1]) Vergl. die Anmerkung auf S. 849.

die Dehnung in der Richtung $[\sigma_2]$ den Wert $\frac{p}{n} \cdot \varepsilon_2$ erreicht hat. Der Teil von $[\sigma_1]$, welcher diesem Augenblick entspricht, ist nach dem Gesetz von Hooke $\frac{p}{n} \cdot \varepsilon_1 \,.\, E = \frac{p}{n} \cdot \sigma_1$, also die entsprechende Kraft $f \cdot \frac{p}{n} \cdot \sigma_1$. Diese ist für $\frac{1}{n}$ der Querdehnung vom Werte $\frac{\varepsilon_2}{m} = \frac{\sigma_2}{mE}$, also für die Strecke $\frac{l}{n}\left(\frac{\sigma_2}{mE}\right)$ in Ansatz zu bringen, so daß sich die Arbeit $-\frac{fl}{E} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{m} \cdot \frac{p}{n^2}$ ergiebt. Für den vollendeten Dehnungszustand ist diese Arbeit $-\frac{fl}{E} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{m} \cdot \frac{\Sigma p}{n^2}$, woraus sich für $lim\, n = \infty$ ergiebt: $-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 \sigma_2}{m} \cdot \frac{V}{E}$. Ebenso entspricht der Querdehnung $-\frac{\varepsilon_1}{m}$, welche in die Richtung von $[\sigma_2]$ fällt, die Arbeit $-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 \sigma_2}{m} \cdot \frac{V}{E}$.

Die Vereinigung der vier abgeleiteten Arbeitswerte führt unmittelbar zur Formel 288). Entsprechende Schlüsse ergeben die Formel Nr. 289).

Die Formeln Nr. 288) und Nr. 289) lassen sich mit Hülfe der Gleichungen $\sigma_1 = \varepsilon_1 E$ u. s. w. unmittelbar in Formeln umschreiben, welche die Dehnungen ε_1, ε_2, ε_3 statt der Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 enthalten.

Kehrt man das Gleichungssystem Nr. 287) um, so daß die Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 durch die Hauptdehnungen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ bestimmt erscheinen, so erhält man

$$\sigma_1 = \frac{m}{m+1} \cdot E\left(\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3}{m-2}\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Eintragung dieser Werte in Gleichung Nr. 289) führt zu der Formel

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1} \cdot E\left[\bar{\varepsilon}_1^2 + \varepsilon_2^2 + \bar{\varepsilon}_3^2 + \frac{(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3)^2}{m-2}\right] \cdot V \,. \quad 290)$$

wobei $\frac{1}{2}\frac{m}{m+1} \cdot E = G$ ist (vergl. S. 842).

Die für $\mathfrak{A}$ abgeleiteten Formeln gelten natürlich auch für Volumenelemente eines Körpers, in dem die Hauptspannungen von Punkt zu Punkt veränderlich sind, wenn nur das betrachtete Volumenelement die Hauptspannungen $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$ hat.

Im Gegensatze zu der eingeführten Dehnung, welche man genauer als lineare Dehnung bezeichnet, pflegt man auch von einer Flächendehnung und einer Volumendehnung zu sprechen.

Wenn die Seiten eines Rechtecks a und b bezw. die gleichmäßigen Dehnungen ε_a und ε_b zeigen, so geht die Fläche $f = ab$ über in

$$f' = a(1 + \varepsilon_a) \,.\, b(1 + \varepsilon_b) = ab(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b).$$

Man hat dann

$$\frac{f' - f}{f} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b \sim \varepsilon_a + \varepsilon_b \quad \ldots \quad 291)$$

als Flächendehnung zu bezeichnen. Erfolgen die Dehnungen der Seiten nicht gleichmäßig, so muß man die Fläche in Elemente (φ) zerlegen und für diese $\frac{\varphi' - \varphi}{\varphi}$ bestimmen u. s. w.

Wenn die Kanten eines Rechtkants a, b, c bezw. die gleichmäßigen Dehnungen ε_a, ε_b, ε_c zeigen, so geht das Volumen $V = abc$ über in

$$V' = abc(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b)(1 + \varepsilon_c)$$
$$= abc(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c + \varepsilon_a\varepsilon_b + \varepsilon_b\varepsilon_c + \varepsilon_c\varepsilon_a + \varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c).$$

Man hat dann

$$\frac{V' - V}{V} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c + \varepsilon_a\varepsilon_b + \varepsilon_b\varepsilon_c + \varepsilon_c\varepsilon_a + \varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c \sim \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c \quad 292)$$

als Volumendehnung (kubische Ausdehnung) zu bezeichnen. Erfolgen die Dehnungen der Kanten nicht gleichmäßig, so muß man das Volumen wieder in Elemente zerlegen u. s. w.

Für den linearen Spannungszustand ist z. B. $\varepsilon_a = \varepsilon$ und $\varepsilon_b = \varepsilon_c = -\frac{\varepsilon}{m}$, so daß hier die kubische Ausdehnung durch $\varepsilon \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{m-2}{m}$ gegeben ist.

134. Materialkonstanten. Um eine Anschauung der betrachteten Beziehungen zu geben, stellen wir hier noch die Materialkonstanten für Schmiedeeisen (Fluß- und Schweißeisen) zusammen.

Der Elasticitätsmodul E bezw. die Dehnungszahl α ist für Zug und Druck bestimmt durch

$$E = \frac{1}{\alpha} = 2\,000\,000 \text{ Atm. bis } 2\,150\,000 \text{ Atm.}$$

Der Koeffizient der Querdehnung m ist für Zug und Druck bestimmt durch

$$m = \tfrac{10}{3}.$$

Die Spannung an der Proportionsgrenze σ_p ist für Zug und Druck bestimmt durch

$$\sigma_p = 1300 \text{ Atm. bis } 2400 \text{ Atm.}$$

Die Fließ- bezw. Quetschgrenze σ_f ist für Zug und Druck bestimmt durch

$$\sigma_f = 2200 \text{ Atm. bis } 3000 \text{ Atm.}$$

Die Bruchspannung (Festigkeit) ist als Tragfestigkeit für Zug bestimmt durch

$$K_1 = 3300 \text{ Atm. bis } 4400 \text{ Atm.,}$$

und für Druck (in Übereinstimmung mit σ_f) durch

$$K_2 = 2200 \text{ Atm. bis } 3000 \text{ Atm.}$$

Die Bruchspannung (Festigkeit) ist als Ursprungsfestigkeit für Zug bestimmt durch

$$K_1 = 2000 \text{ Atm. bis } 2400 \text{ Atm.,}$$

und für Druck durch

$$K_2 = 1900 \text{ Atm. bis } 2200 \text{ Atm.}$$

Die Bruchspannung (Festigkeit) ist als Schwingungsfestigkeit für Zug und Druck bestimmt durch

$$K_1 = K_2 = 1770 \text{ Atm. bis } 1980 \text{ Atm.}$$

Die Spannung σ_e an der Elasticitätsgrenze (im Sinne der Praxis) stimmt nahezu überein mit dem Werte der Schwingungsfestigkeit.

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Tragfestigkeit entsprechend, für Zug und Druck bestimmt durch

$$k_1 = k_2 = 900 \text{ Atm. bis } 1200 \text{ Atm.}$$

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Ursprungsfestigkeit entsprechend, für Zug und Druck bestimmt durch

$$k_1 = k_2 = 600 \text{ Atm. bis } 800 \text{ Atm.}$$

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Schwingungsfestigkeit entsprechend, für Zug und Druck bestimmt durch

$$k_1 = k_2 = 300 \text{ Atm. bis } 400 \text{ Atm.}$$

Die Beziehungen von Federung (λ_1) und Dehnungsrest (λ_2) veranschaulichen folgende, für einen Kupferstab von 10 cm Länge durch v. Bach beobachtete Zahlen ($\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$):

σ in Atmosphären	λ_1 in Centimetern	λ_2 in Centimetern
$\left.\begin{matrix}0\\100\end{matrix}\right\}$	0,000 90	0,000 01
$\left.\begin{matrix}0\\200\end{matrix}\right\}$	0,001 74	0,000 08
$\left.\begin{matrix}0\\300\end{matrix}\right\}$	0,002 68	0,000 25
$\left.\begin{matrix}0\\400\end{matrix}\right\}$	0,003 68	0,000 66
$\left.\begin{matrix}0\\600\end{matrix}\right\}$	0,006 42	0,002 10

Auf Grund einer solchen Tabelle hat in praktischer Hinsicht die Bestimmung der Spannung für die Elasticitätsgrenze σ_e zu erfolgen, indem man festsetzt, welche Größe von λ_2 von Fall zu Fall noch als unerheblich anzusehen ist.

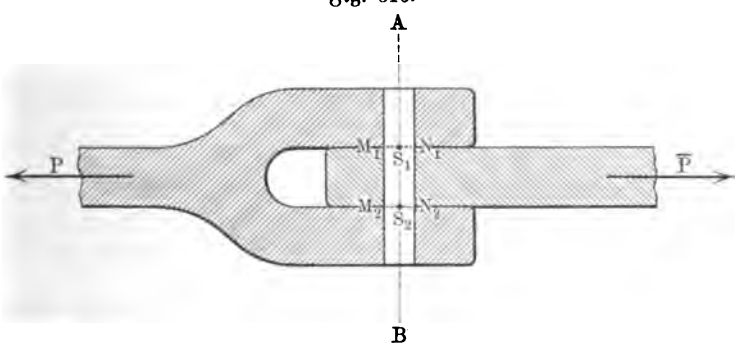
Die angegebenen Zahlen sollen lediglich die betrachteten Beziehungen veranschaulichen, für die Anwendungen und Übungen verweisen wir auf die gebräuchlichen Tafeln, z. B. in „Des Ingenieurs Taschenbuch" (Berlin, W. Ernst und Sohn) oder in „Weisbachs Ingenieur" (Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn).

Zweite Abteilung.

Der gerade Stab unter dem Einflusse von Schub.

135. Beanspruchung durch Schub. Die Betrachtungen über Zug und Druck haben schon gezeigt, daß dabei in dem Balken auch Schubspannungen auftreten; dasselbe ist auch der Fall, wenn der Stab gebogen oder verdreht wird.

Fig. 610.



Eine Beanspruchung lediglich durch Schubkräfte, um die es sich hier zunächst handelt, ist verhältnismäßig selten. Selbst die einfachen Beispiele von

Fig. 611 a.

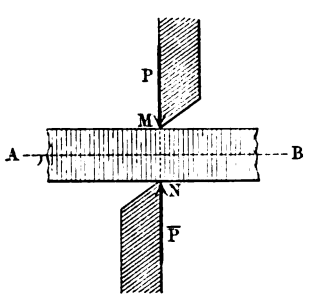


Fig. 611 b.

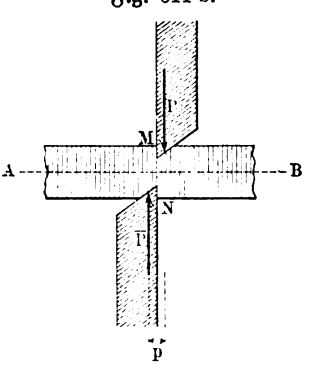


Fig. 582 und Fig. 595 zeigten die Verbindung von Schub und Biegung, dasselbe gilt auch für die in Fig. 610 dargestellte zweischnittige Nietung, in

welcher die Querschnitte M_1N_1 und M_2N_2 zugleich durch die beiden Kräfte vom Werte P auf Schub beansprucht werden, wobei aber bei der Zurückführung dieser Kräfte auf S_1 oder S_2 wieder biegende Momente auftreten. Dagegen zeigt Fig. 611 a (a. v. S.), welche die beiden Blätter einer Eisenschere darstellt und zwar in dem Augenblicke, in dem sie das Eisen AB fassen, eine einfache Beanspruchung des Querschnittes MN auf Schub. Beim Eindringen der Blätter bilden $[P]$ und $[\bar{P}]$ sofort, wie Fig. 611 b (a. v. S.) zeigt, ein Kräftepaar vom Momente Pp, da der Flächenberührung der Fig. 611 b eine Verschiebung von $[P]$ und $[\bar{P}]$ gegenüber der Linienberührung der Fig. 611 a entspricht; neben dem Schub tritt also auch hier wieder Biegung auf.

136. Die Verteilung der Schubkraft auf die angegriffene Fläche in Beziehung zur zulässigen Spannung. Verteilt sich die Kraft P als Schub auf den Querschnitt f, so ist

$$\frac{P}{f} = \tau$$

die mittlere Schubspannung für den Querschnitt f. Während man bei Zug und Druck meist in erster Annäherung eine gleichmäßige Verteilung einer Kraft $[P]$ über den Querschnitt f annehmen darf, so daß die mittlere Spannung $\frac{P}{f} = \sigma$ dort zugleich die Spannung für jedes Element im Querschnitt bezeichnet, so ist dies beim Schube nur sehr selten der Fall. Für Flächenelemente φ gilt natürlich auch hier eine gleichmäßige Verteilung der Spannung τ, für ausgedehnte Flächen ist die Verteilung der Spannung meist eine durchaus ungleichmäßige.

Nur für verhältnismäßig kleine Flächen, wie sie z. B. die Niete der Fig. 595 u. 610 darstellen, darf man annehmen, daß die mittlere Spannung $\tau = \frac{P}{f}$ zugleich die Spannung für jedes Element der Fläche darstellt, also auch zugleich die größte vorkommende Spannung ist. Hier ist $\tau = \frac{P}{f}$ bei voller Ausnutzung des Materiales der zulässigen Spannung t (oder k_s) gleichzusetzen, welche als $\frac{m}{m+1} \cdot k$ eingeführt (vergl. S. 855) werden kann, so daß also hier bei Ausnutzung des Materiales gilt [1]):

$$\frac{P}{f} = \tau \quad \text{für} \quad \tau = t = \frac{m}{m+1} \cdot k \quad \ldots \quad 293)$$

Dabei ist k die zulässige Spannung für Zug und Druck, oder, falls diese Werte verschieden sind, der kleinere dieser Werte, während m wieder die Querdehnung mißt.

---

[1]) Dabei ist aber meist die zugleich auftretende Biegung gefährlicher als der Schub.

In allen anderen Fällen hat man mit einer, auf die Fläche ungleichmäßig verteilten Schubkraft zu rechnen, so daß also die Spannung τ im allgemeinen innerhalb der Fläche von Element zu Element veränderlich ist. Man hat dann unter allen diesen Werten von τ den größten τ_{max} zu bestimmen, so daß hier bei Ausnutzung des Materiales gilt

$$\tau_{max} = t = \frac{m}{m+1} \cdot k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294)$$

Im übrigen wird bei Untersuchungen vorausgesetzt, daß auch hier die Schiebung ϑ, welche einem Schubspannungspaare vom Werte τ entspricht, dem Spannungswerte τ proportional ist, d. h. daß, entsprechend dem Gesetze von Hooke, $\tau = \vartheta \, . \, G$ ist.

137. Die Schubspannungen am Rande eines Querschnittes. Die für die Praxis wichtigen Schubspannungen in Querschnitten gebogener und verdrehter Stäbe und die, gemäß dem Satze über die Paare von Schubspannungen (vergl. S. 820), zugleich senkrecht zu diesen auftretenden Schubspannungen lassen sich erst behandeln, wenn die Biegungen und Verdrehungen, als deren Geleiterscheinungen sie sich einstellen, untersucht worden sind.

Fig. 612.

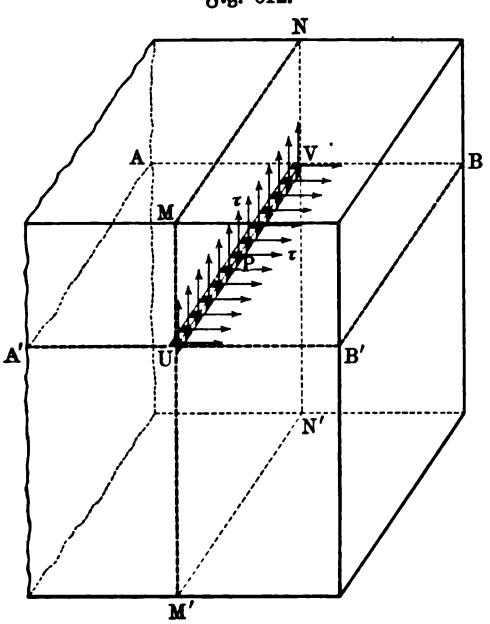
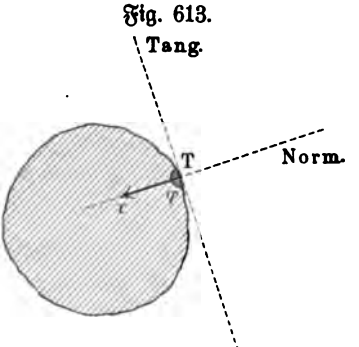


Fig. 613.



Hier mag nur daran erinnert werden, daß durch jenen Satz lediglich die Gleichheit der Spannungen, senkrecht zu einer rechtwinkligen Kante im Material gewährleistet wird, wobei diese Spannungen in gewissen Fällen den gesamten Schub darstellen, in gewissen Fällen aber nur Komponenten des gesamten Schubes sind. So entstehen z. B. im Querschnitte $MNM'N'$ eines wagerecht gelagerten Balkens unter dem Einflusse von Belastungen senkrechte Schubspannungen, wie sie Fig. 612 für Flächenelemente auf der Geraden UV zeigt, während zugleich senkrecht dazu in der Ebene $ABA'B'$ Schubspannungen auftreten, wie sie gleichfalls Fig. 612 für Flächenelemente auf der Geraden

UV darstellt; für jeden Punkt P der Geraden UV gilt $\tau = \tau'$. Ob τ und τ' aber die gesamte Schubspannung für ihre Flächenelemente darstellen, ist eine offene Frage.

Für die Beantwortung dieser Frage ist ein Satz von Wichtigkeit, für dessen Ableitung wir Fig. 613 (a. v. S.) betrachten. Hier bezeichnet φ ein Flächenelement bei T am Rande eines, in der Ebene der Zeichnung gelegenen Querschnittes, für welches die Schubspannung $[\tau]$ in die Richtung der Normale der Querschnittbegrenzung bei T fällt. Legt man senkrecht zur Ebene der Zeichnung eine Ebene durch die Tangente von T, so muß in dieser (gemäß dem Satze über die Paare von Schubspannungen) ein bei T gelegenes Flächenelement,

Fig. 614 a.

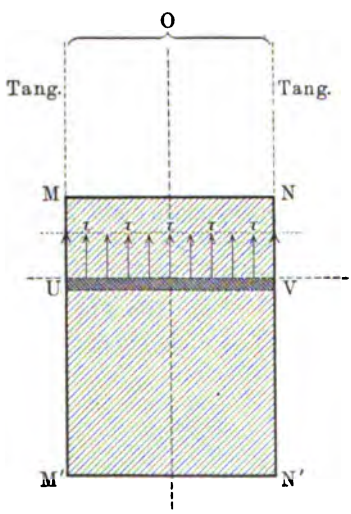
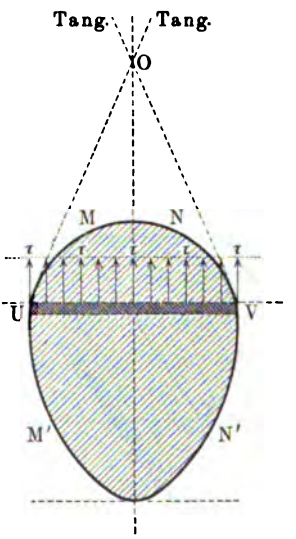


Fig. 614 b.



senkrecht zur Tangente gleichfalls eine Spannung vom Werte τ zeigen. Dieser Spannungswert ist aber für prismatische Stäbe im allgemeinen Null, weil für diese die Ebene durch die Tangente eine Tangentialebene der freien Oberfläche ist, innerhalb welcher Schubspannungen nur an den, von äußeren Kräften unmittelbar angegriffenen Teilen auftreten. Schließt man solche Teile der Oberfläche von der Betrachtung aus, so hat für prismatische Stäbe die in Fig. 613 gezeichnete Spannung τ den Wert Null, d. h. die gesamte Spannung für φ hat keine Komponente in der Richtung der Normalen von T, sie fällt also in die Tangente von T.

Unter der angeführten Beschränkung gilt also für prismatische Stäbe der Satz: Die Schubspannung für Elemente innerhalb eines Querschnittes, welche an dessen Rande liegen, fällt stets in die Richtung der zugehörigen Tangente der Randlinie.

Betrachtet man mit Rücksicht auf diesen Satz die Fig. 614 a und b, so sieht man, daß der, Fig. 612 entsprechende Querschnitt in Fig. 614 a eine, dem Satze entsprechende Verteilung der Schubspannungen zeigt, während dies

für den Querschnitt der Fig. 614 b nicht der Fall ist. In Fig. 614 a sind also die gesamten Schubspannungen für UV zur Darstellung gekommen, während in Fig. 614 b nur deren Komponenten, senkrecht zu UV, erhalten worden sind.

Zieht man in Fig. 614 b die Tangente in U an den Querschnitt, so muß für U zu $[\tau]$ eine Komponente $[\tau']$ in UV so hinzugefügt werden, daß die Resultante von $[\tau]$ und $[\tau']$ in die Tangente UO fällt, wie es Fig. 615 darstellt, wo $UU' \,.\, \sin\omega_0 = \tau$ und also $UU' = \dfrac{\tau}{\sin\omega_0}$ ist, falls $\measuredangle\, OUV$ durch ω_0 bezeichnet wird. Da $UU' > \tau$ ist, so würde hier die Bedingung $\tau = t$ einen falschen Ansatz darstellen, während thatsächlich

$$UU' = \frac{\tau}{\sin\omega_0} = t \quad \text{oder} \quad \tau = t \,.\, \sin\omega_0 \quad . \quad . \quad . \quad 295)$$

bei Ausnutzung des Materiales gilt.

Für symmetrische Querschnitte hat sich die Annahme bewährt, daß alle Schubspannungen für Punkte von UV nach dem Punkte O konvergieren, in dem sich die Tangenten für U und für V auf der Symmetralen schneiden.

Es ist dann z. B. für W in Fig. 615 also $WW' = \dfrac{\tau}{\sin\omega}$ der Wert der gesamten Schubspannung für ein Element des Querschnittes bei W.

Sind die Werte von $[\tau]$ für alle Punkte von UV einander gleich, so ist $UU' > WW'$, weil $\omega_0 < \omega$ ist, d. h. in diesem Falle ist das Maximum unter den Spannungen für UV durch UU' dargestellt, so daß die Bedingung $\tau = t \,.\, \sin\omega_0$ die Sicherheit für alle Schubspannungen von UV verbürgt.

Fig. 615.

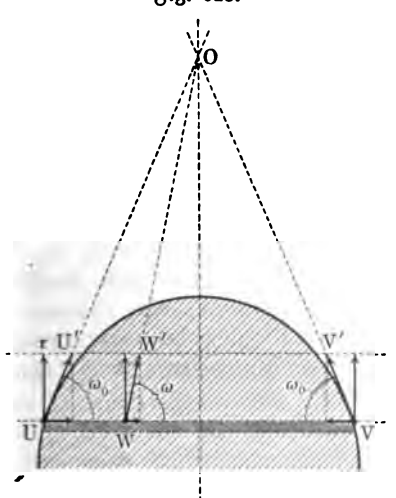
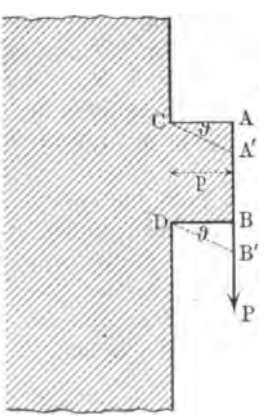


Fig. 616.



138. Die Formänderungsarbeit des Schubes. Wird ein prismatischer Körper von dem Querschnitt, den Fig. 616 darstellt, innerhalb der AB entsprechenden Fläche des Ansatzes $ABCD$ plötzlich durch die Schubkraft $[P]$

ergriffen, so treten ebenso wie bei Zug und Druck Schwingungen der $ABCD$ entsprechenden Masse um die schließliche Ruhelage $CA'B'D$ auf. Entsprechende Betrachtungen wie bei Zug und Druck führen auch hier zu dem Ergebnisse, daß nur die Hälfte der äußeren Arbeit auf Formänderung verwendet wird, während die andere Hälfte mit der (aktuellen) Energie der Schwingungen verloren geht.

Um die Arbeit von $[P]$ zu bestimmen, beachten wir, daß sich der Schwerpunkt der AB entsprechenden Fläche (ebenso wie alle anderen Punkte dieser Fläche) nach eingetretenem Gleichgewicht um $AA' = AC \,.\, tg\,\vartheta = AC \,.\, \vartheta$ gesenkt hat, und daß jene Arbeit demnach den Wert $P(AC \,.\, \vartheta)$ erhält. Hat der Ansatz $ABCD$ senkrecht zur Ebene der Zeichnung die Dicke c, so ist die Schubspannung bei gleichmäßiger Verteilung von $[P]$ auf die, AB entsprechende Fläche gegeben als $\tau = \dfrac{P}{AB \,.\, c}$ und demnach hat jene Arbeit den Wert

$$\tau\vartheta(AC \,.\, AB \,.\, c).$$

Da die Klammer das ursprüngliche Volumen V des betrachteten Körpers darstellt, während ϑ durch die Gleichung $\tau = \vartheta \,.\, G$ auf τ zurückgeführt werden kann, so erhält jene Arbeit den Ausdruck

$$\frac{\tau^2}{G} \cdot V.$$

Man erhält also für die gesuchte **Formänderungsarbeit**

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G} \cdot V \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 296)$$

d. h. einen Ausdruck, der dem für Zug und Druck gefundenen Ausdrucke genau entspricht.

Die Ableitung ist unabhängig von der Einkleidung der Fig. 616, sie gilt vielmehr für die Arbeit jeder Schubkraft, **falls eine gleichmäßige Verteilung auf die von ihr ergriffene Fläche stattfindet.** Da letzteres im allgemeinen nur für Körper von unendlich-kleinen Abmessungen der Fall ist, so gilt Formel Nr. 296) im allgemeinen auch nur für Volumenelemente.

Man kann aus diesem Ausdrucke für $\mathfrak{A}$ von neuem [1]) die S. 842 abgeleitete Beziehung zwischen E und G gewinnen, wenn man beachtet, daß **der einfache Spannungszustand für Schub** (τ) **ein ebener Spannungszustand für Zug und Druck** ist mit den Hauptspannungen $\sigma_1 = +\tau$ und $\sigma_2 = -\tau$. Vergl. S. 841. Für diesen ebenen Spannungszustand ist nach Gleichung 288) die Arbeit

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\tau^2 + \tau^2}{2} + \frac{1}{m}\,\tau^2\right) V$$

und dieser Wert muß zugleich $\tfrac{1}{2}\,\dfrac{\tau^2}{G}\,V$ sein, da jener Spannungszustand zu-

[1]) Vergl. **Föppl**, Mechanik III, S. 78.

gleich ein einfacher Spannungszustand für Schub ist. Die Vergleichung giebt wieder

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E.$$

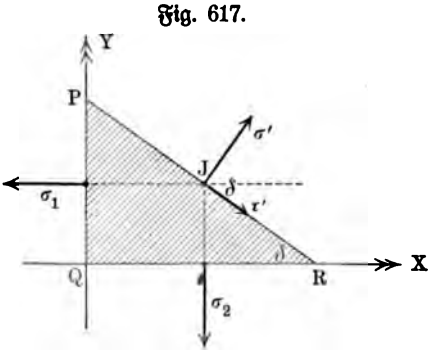
Setzt man die Beziehung zwischen E und G als gegeben voraus, so gelangt man umgekehrt von neuem zu der Formel Nr. 296). Auch hier pflegt man die Arbeit für die Volumeneinheit besonders hervorzuheben.

139. Durch Schub bewirkte Schwingungen. Schwingungen, wie sie Fig. 616 entsprechen, bei denen CA um CA' als Ruhelage und DB um DB' als Ruhelage pendelt, lassen sich weder theoretisch noch experimentell genau verfolgen, hauptsächlich weil bei ihnen auch wieder Biegung durch das Kräftepaar vom Werte Pp mitspricht. Andernfalls würde ihre Betrachtung zu einer experimentellen Bestimmung der Konstante G führen. Man bestimmte diese Konstante auch thatsächlich mit Hülfe von Schwingungen, welche durch Schub bestimmt werden, aber nicht gemäß der Anordnung der Fig. 616, sondern durch Untersuchung der Schwingungen verdrehter Stäbe (Torsionsschwingungen).

140. Die Arten der zulässigen Spannungen und der Bruchspannungen. Die Betrachtungen des § 132 finden hier sinngemäß Anwendung, namentlich auch hinsichtlich der Unterscheidung von Tragfestigkeit, Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit. Vergl. auch § 123.

141. Die Schubspannungen der verschiedenen Spannungszustände und deren Formänderungsarbeit. Über die Schubspannungen bei einem einfachen Spannungszustande für Zug oder Druck ist den Betrachtungen auf S. 824 nichts hinzuzufügen; das Maximum von τ für ein gegebenes $[\sigma]$ hat den Wert $\frac{1}{2}\sigma$ und tritt auf in Ebenen, die gegen $[\sigma]$ unter 45° geneigt sind.

Fig. 617.



Die Schubspannungen für einen ebenen Spannungszustand, als dessen Sonderfall der einfache Spannungszustand für Schub auftritt, erhält man gemäß der Betrachtung auf S. 826 durch Vereinigung der Komponenten von $[p_1]$ und $[p_2]$, welche in die Richtung PR fallen; man findet dabei die Schubspannung für PR, falls $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ Zugspannungen bedeuten, als $\pm(\sigma_1 - \sigma_2) \sin\delta \cos\delta$. Wir betrachten dieses Ergebnis noch im Zusammenhange mit der entsprechenden Normalspannung gemäß Fig. 617, in welcher wieder PQR wie in Fig. 584 den Mittelschnitt eines unendlich-kleinen dreiseitigen Prismas darstellt, dessen Kanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung vor und hinter dieser $\frac{1}{2}b$ sein

mögen. In der Richtung der X-Achse fordert das Gleichgewicht der Kräfte

$$\sigma_1 (b \,.\, PQ) = (\sigma' \sin\delta + \tau' \cos\delta)(b \,.\, PR)$$

oder

$$\sigma_1 \cdot \frac{PQ}{PR} = \sigma_1 \,.\, \sin\delta = \sigma' \sin\delta + \tau' \cos\delta.$$

In der Richtung der Y-Achse gilt ebenso

$$\sigma_2 (b \,.\, QR) = (\sigma' \cos\delta - \tau' \sin\delta)(b \,.\, PR)$$

oder

$$\sigma_2 \cdot \frac{QR}{PR} = \sigma_2 \,.\, \cos\delta = \sigma' \cos\delta - \tau' \sin\delta.$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_1 \sin^2\delta + \sigma_2 \cos^2\delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\delta \\ \tau' &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\delta \cos\delta = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\delta \end{aligned}\right\} \quad 297\,a)$$

Es wird demnach τ' nur Null für $\sin 2\delta = 0$, d. h. für $\delta = 0^0$, 90^0, ... und demnach sind nur die Ebenen, welche QX und QY entsprechen, frei von Schub.

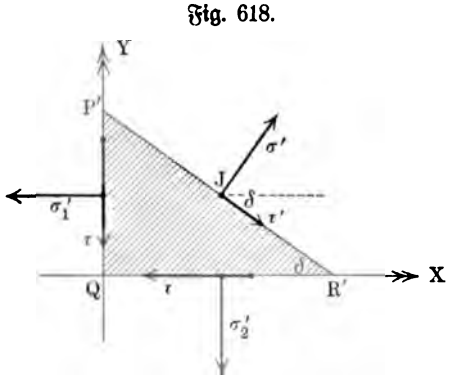
Da $\sin 2\delta$ für $\delta = \pm 45^0$ den Wert ± 1 erhält, so liegen die Maxima der Schubspannungen in Ebenen, die gegen jene unter 45^0 geneigt sind.

Da $\cos 2\delta$ für $\delta = 0^0$, 90^0, ... den Wert ± 1 erhält, so liegen die Maxima und Minima der Normalspannungen in Ebenen, welche QX und QY entsprechen.

Sind $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ beides Zugspannungen oder beides Druckspannungen, so kann σ' nicht Null sein, d. h. alle Ebenen zeigen Normalspannungen; versucht man für $\sigma' = 0$ den Ansatz $\cos 2\delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$, so erhält man einen unechten Bruch.

Ist eine der Spannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ eine Zugspannung und die andere eine Druckspannung, so führt die Gleichung zu Nullwerten von σ'. Haben dabei im besonderen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ denselben Wert σ, so ist $\cos 2\delta = 0$, d. h. $\delta = \pm 45^0$; in diesem Falle ist $\tau' = \pm\sigma$ für $\delta = \pm 45^0$, d. h. es liegt der einfache Spannungszustand für Schub vor, dessen Spannungsellipse ein Kreis ist. Vergl. dazu S. 826.

Fig. 618.



Sind $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ beides Zugspannungen oder beides Druckspannungen von gleichem Werte σ, so ist $\sigma' = \sigma$ und $\tau' = 0$ für jeden Wert von δ, d. h. in diesem Falle entsprechen alle Richtungen der Ebene Hauptspannungen. Auch hier ist die Spannungsellipse ein Kreis.

Dreht man das Kreuz der Fig. 617 um Q im Materiale, so zeigen die

QP und QR entsprechenden Ebenen im allgemeinen Normalspannungen und Schubspannungen, und zwar sind letztere einander gleich. Stellt Fig. 618 eine solche Lage des Kreuzes der Fig. 617 vor, so führt der Ansatz für das Gleichgewicht jetzt zu den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2} - \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2} cos\,2\delta + \tau\, sin\,2\delta \\ \tau' &= \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2} sin\,2\delta + \tau\, cos\,2\delta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 297\,b)$$

welche für $\tau = 0$ mit den Gleichungen Nr. 297 a) übereinstimmen.

Um aus der Lage der Fig. 618 auf die Lage der Fig. 617 zurückzukommen, suchen wir den Wert $\bar{\delta}$ von δ auf, für welchen $\tau' = 0$ ist. Man erhält $tg\,2\bar{\delta} = -\frac{2\tau}{\sigma_1' - \sigma_2'}$ zur Bestimmung von $\bar{\delta}$ und hat damit die Richtungen der Hauptspannungen. Um diese selbst durch σ_1', σ_2', τ auszudrücken, bildet man aus $tg\,2\bar{\delta}$ die Werte für $sin\,2\bar{\delta}$ und $cos\,2\bar{\delta}$, wobei man erhält

$$\sigma_1 \text{ und } \sigma_2 = \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_1' - \sigma_2')^2} \quad . \; . \; . \quad 298)$$

Da die Maxima und Minima von τ' in Ebenen liegen, die mit den Ebenen für die Hauptspannungen $\pm 45^0$ bilden, so gilt für den Winkel ω, unter welchem jene Ebenen des maximalen und minimalen Schubes die Achse QX schneiden, $\omega - \bar{\delta} = \pm 45^0$ oder $2\omega - 2\bar{\delta} = \pm 90^0$, so daß

$$cot\,2\omega = cot\,(2\bar{\delta} \pm 90^0) = -tg\,2\bar{\delta} = +\frac{2\tau}{\sigma_1' - \sigma_2'}$$

ist. Bildet man auch hier die Werte für $sin\,2\omega$ und $cos\,2\omega$, so erhält man

$$\tau_{max} \text{ und } \tau_{min} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_1' - \sigma_2')^2} \quad . \; . \; . \; . \quad 299)$$

während für diese Schnitte $\sigma' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2}$ die Normalspannung ist, welche nur für $\sigma_1' = -\sigma_2'$ verschwindet.

Reine Schubbeanspruchung tritt also nur ein für $\sigma_1' = -\sigma_2'$, wobei σ_1 und σ_2 denselben Wert erhalten wie τ_{max} und τ_{min}. Vergl. S. 841.

Will man den durch Fig. 618 bezeichneten Zustand ohne Rücksicht auf die vorangegangenen Betrachtungen untersuchen, so ist es zweckmäßig, die Gleichungen Nr. 297 b) zu schreiben

$$\sigma' - \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2} = \tau\left(sin\,2\delta - \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2\tau} cos\,2\delta\right)$$

$$\tau' = \tau\left(cos\,2\delta + \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2\tau} sin\,2\delta\right)$$

und einen Hülfswinkel ϱ durch

$$\frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2\tau} = tg\,\varrho$$

einzuführen. Man hat dann

$$\sigma' - \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2} = \frac{\tau \cdot \sin(2\delta - \varrho)}{\cos\varrho}$$

$$\tau' = \frac{\tau \cdot \cos(2\delta - \varrho)}{\cos\varrho}.$$

Man bemerkt sofort, daß für $2\delta - \varrho = \pm 0^0, \pm 180^0, \ldots$ der Wert $\sigma' - \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2}$ verschwindet, während τ' zugleich seine Maxima bezw. Minima $\pm\frac{\tau}{\cos\varrho}$ erhält, und daß für $2\delta - \varrho = \pm 90^0, \pm 270^0, \ldots$ der Wert τ' verschwindet, während $\sigma' - \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2}$ zugleich seine Maxima bezw. Minima $\pm\frac{\tau}{\cos\varrho}$ hat. Da $tg\,\varrho = \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{2\tau}$ den Wert $\cos^2\varrho = \frac{4\tau^2}{4\tau^2 + (\sigma_1' - \sigma_2')^2}$ liefert, so sind die oben abgeleiteten Maxima und Minima hiermit unmittelbar gegeben.

Eine entsprechende Betrachtung führt gemäß Fig. 579 zu den Schubspannungen des allgemeinen (räumlichen) Spannungszustandes.

Für ein unendlich-kleines Rechtkant im Materiale, das auf allen (sechs) Flächen Schubspannungen hat, führt eine Zerlegung dieser Spannungen nach den Richtungen der Kanten zu zwölf Komponenten, von denen je vier senkrecht zu einer Kantenrichtung sind. Man erhält also drei Doppelpaare von Spannungen nach Art der bisher betrachteten. Die Arbeit der Formänderung für ein solches Rechtkant vom Volumen v ist gemäß Formel Nr. 296)

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{2}\right] \cdot v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 300)$$

falls man die Spannungen der einzelnen Doppelpaare durch τ_1, τ_2, τ_3 bezeichnet.

142. Die Formänderungsarbeit für ein beliebiges Volumenelement von allgemeinem Spannungszustande. Betrachtet man beim räumlichen Spannungszustande ein unendlich-kleines Rechtkant im Materiale, dessen Kanten nicht in die Richtungen der Hauptspannungen fallen, so sind auf jeder seiner (sechs) Flächen im allgemeinen Normalspannungen und Schubspannungen vorhanden, so daß man bei der Zerlegung nach den Kanten 18 Komponenten erhält, welche je drei Paare von Normalspannungen σ_1, σ_2, σ_3 und je drei Doppelpaare von Schubspannungen (τ_1, τ_2, τ_3) liefern.

Die Arbeit der Formänderung ist für ein solches Rechtkant vom Volumen v gemäß Formel Nr. 289) und Formel Nr. 300)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \cdot v \\ + \frac{1}{G}\left[\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{2}\right] \cdot v \end{aligned}\right\} \quad 301)$$

Durch die Gleichungen $\sigma_1 = \varepsilon_1 E$, u. s. w. und $\tau_1 = \vartheta_1 G$, u. s. w. läßt sich vorstehende Formel leicht in eine Formel umschreiben, welche die

Dehnungen ε_1, ε_2, ε_3 und die Schiebungen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 statt der Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 und τ_1, τ_2, τ_3 enthält.

Für die Gesamtdehnungen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ und die Schiebungen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 erhält man gemäß Formel Nr. 301) und Nr. 287)

$$\mathfrak{A} = G\left[\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + \bar{\varepsilon}_3^2 + \frac{(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3)^2}{m-2} + \frac{\vartheta_1^2 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}{2}\right] \cdot v \quad 302)$$

Hat das Volumenelement nicht die Form eines Rechtkants, so kann man dasselbe nach den Richtungen irgend eines rechtwinkligen Kreuzes mit beliebiger Genauigkeit in Rechtkante zerlegen, welche als Elemente des Volumelementes aufzufassen sind, und die den Richtungen entsprechenden Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 und τ_1, τ_2, τ_3 einführen. Da sich diese Spannungen innerhalb des Volumenelementes nicht um endliche Größen ändern, so gilt obige Betrachtung auch für die Summe der eingeführten Rechtkante, d. h. auch für das beliebig gestaltete Volumenelement.

143. Materialkonstanten. Wir fügen wieder für Schmiedeeisen (Fluß- und Schweißeisen) einige Zahlen zur Veranschaulichung bei.

Der Elasticitätsmodul G bezw. die Dehnungszahl β ist für Schub bestimmt durch

$$G = \frac{1}{\beta} = 770\,000 \text{ Atm. bis } 830\,000 \text{ Atm.}$$

Die Bruchspannungen für Schub (Schubfestigkeit) werden als Bruchteil der entsprechenden Festigkeit für Zug angegeben, sie sind zwei Drittel bis vier Fünftel davon.

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Tragfestigkeit entsprechend, für Schub bestimmt durch

$$t = k_s = 720 \text{ Atm. bis } 960 \text{ Atm.}$$

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Ursprungsfestigkeit entsprechend, für Schub bestimmt durch

$$t = k_s = 480 \text{ Atm. bis } 640 \text{ Atm.}$$

Die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen) sind, der Schwingungsfestigkeit entsprechend, für Schub bestimmt durch

$$t = k_s = 240 \text{ Atm. bis } 320 \text{ Atm.}$$

Dritte Abteilung.

Die Biegung des geraden Stabes.

144. Beanspruchung durch Biegung. Da das Eigengewicht eines Stabes stets als senkrecht nach unten gerichtete Kraft auftritt, so muß bei dessen Berücksichtigung die Achse eines geraden Stabes stets wagerecht gelagert werden, falls dieser nur auf Biegung beansprucht werden soll, da sonst eine in die Achse fallende Komponente des Gewichtes bezw. dieses selbst noch als Zug oder Druck wirkt.

Da die wirkenden Kräfte bei Beanspruchung des geraden Stabes durch Biegung dessen Achse senkrecht schneiden müssen, so dürfen diese bei Berücksichtigung von dessen Eigengewicht nur in Vertikalebenen wirken, welche die Stabachse senkrecht schneiden.

Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes ist die Lage der Achse natürlich beliebig.

Wir werden im folgenden stets eine wagerechte Achsenlage voraussetzen und demnach eine senkrechte Stellung der Querschnitte, da sich dabei die Beschreibung der Anordnung wesentlich vereinfacht.

Schneidet man einen, auf Biegung beanspruchten Stab in einem Querschnitte durch, so wirken die inneren Kräfte, welche für das Gleichgewicht nötig sind, mit den äußeren Kräften zusammen im allgemeinen nicht bloß auf Biegung, sondern auch auf Schub (vergl. S. 851). Dieser Schub liegt stets in Querschnittsebenen; außerdem treten aber auch (infolge der Biegung) Schubspannungen senkrecht dazu auf, d. h. also parallel zur Stabachse (vergl. S. 881). Man pflegt nun den geraden Stab in der Praxis zunächst so zu behandeln, als wenn diese beiden Arten von Schubspannungen fehlten, und demnach der Stab also nur auf Biegung beansprucht würde, und behält sich dabei eine spätere Berücksichtigung der Schubspannungen vor.

Reine Biegung tritt demgemäß nur in den besonderen Fällen auf, in denen die Schubkraft für einen Teil des Stabes den Wert Null hat und zwar nur für diesen Teil des Stabes, der dann schubfrei ist.

145. Formänderungsgleichung und Festigkeitsgleichung für den Normalfall der Praxis (gerade Belastung). Bei der Biegung eines geraden Stabes geht dessen Achse in eine krumme Linie über, welche Biegungslinie oder elastische Linie genannt wird. Die Kenntnis dieser Linie

ist von grundlegender Bedeutung für die Beurteilung der Formänderungen und der, diesen entsprechenden Spannungen innerhalb des gebogenen Stabes, weil diese Linie erfahrungsmäßig für den gebogenen Stab dieselbe Rolle spielt wie die Achse für den geraden Stab. Man darf nämlich mit großer Annäherung annehmen, daß jeder der ursprünglichen (ebenen) Querschnitte des Stabes während der Biegung, ohne seine Form zu ändern, stets senkrecht zu der sich deformierenden Achse bleibt. Mit dieser, zuerst von Bernoulli gemachten Annahme ist die Lage jedes der ursprünglichen Querschnitte im gebogenen Balken gegeben, falls man dessen Biegungslinie kennt, abgesehen von einer etwaigen Drehung des Querschnittes in sich um seinen Schwerpunkt.

Sind auch über diese etwaige Drehung Festsetzungen getroffen, so ist die Lage jedes der materiellen Punkte des Stabes nach der Biegung bekannt.

Für diese Lagenbestimmung empfiehlt es sich, den Stab in seinem ursprünglichen Zustande aufzufassen als ein System (Bündel) unendlich-dünner, parallel zur Stabachse verlaufender Fasern, und die Gestalt dieser Fasern nach der Biegung festzustellen.

Unter einer Faser ist dann vor der Biegung die Gesamtheit der materiellen Punkte zu verstehen, welche durch eine, zur Achse des Balkens parallele Gerade getroffen werden.

Sucht man mit Hülfe der Biegungslinien und der senkrecht zu ihr stehenden Querschnitte die Stellung der materiellen Punkte, welche vor der Biegung eine bestimmte Faser bildeten, nach der Biegung auf, so kann man daraufhin feststellen, welche (positive oder negative) Dehnung von Element zu Element für die gebogene Faser anzusetzen ist.

Um von den Dehnungen zu den Spannungen zu gelangen, macht man die Annahme, daß sich der Stab auch in materieller Hinsicht als ein System (Bündel) gezogener und gedrückter Fasern auffassen läßt, längs denen von Punkt zu Punkt ein einfacher Spannungszustand für Zug oder Druck vorausgesetzt werden darf.

Gilt für das Material des Stabes das Hookesche Gesetz (oder auch ein anderes), so kann man unter dieser Annahme dann weiter von den Dehnungen auf die entsprechenden Spannungen und von diesen wieder auf die entsprechenden inneren Kräfte schließen, welche mit den äußeren Kräften im Gleichgewichte stehen.

Die Form der Biegungslinie und die Art einer etwaigen Drehung der Querschnitte in sich hängt natürlich von der Gestalt und von der Befestigung und von der Belastung des geraden Stabes ab. Besonders wichtig ist ein Sonderfall, den wir als den Normalfall der Praxis bezeichnen wollen. Er tritt ein, wenn

1. alle äußeren Kräfte (Belastungen und Reaktionen), welche auf Biegung wirken, in einer Ebene liegen und die Achse des Stabes senkrecht schneiden, und
2. die Ebene der Kräfte, welche Belastungsebene heißt, jeden Querschnitt des Stabes in einer der beiden Hauptachsen (entsprechend den Hauptträgheitsmomenten) trifft, d. h. also bei symmetrischem Quer-

schnitte entweder in der Symmetralen oder in dem Lote der Symmetralen, welches durch den Schwerpunkt geht.

Für diesen Normalfall, den man auch den Fall der „geraden Belastung" nennt, gilt nämlich erfahrungsmäßig in großer Annäherung

a) Die Biegungslinie ist eine ebene Kurve, welche in der Belastungsebene liegt,

b) die Gesamtheit der Fasern, welche vor der Biegung in irgend einer, zur Belastungsebene parallelen Ebene liegen, bleibt auch während der Biegung in dieser Ebene.

Da die Stellung der Querschnitte nach der Biegung durch die Bestimmung b) hier vollständig bestimmt ist, so läßt sich der Normalfall allgemein behandeln, falls man ferner voraussetzt, daß

c) die einzelnen materiellen Fasern als gezogene oder gedrückte Stäbe (vergl. S. 891) aufgefaßt werden dürfen.

Wir nehmen die Achse des Balkens stets horizontal (vergl. S. 890) gelagert an, so daß die Belastungsebene die Vertikalebene durch die Achse ist.

Denkt man den Balken vor der Biegung durch Horizontalebenen in horizontale und durch Vertikalebenen in vertikale Faserschichten zerlegt, so bleiben die vertikalen Faserschichten bei der Biegung in ihren Ebenen, während die horizontalen Faserschichten dabei ihre ursprünglichen Ebenen verlassen.

Besonders bemerkt werden mag noch, daß die Voraussetzungen des Normalfalles, wenn sie ursprünglich streng erfüllt waren, durch die Biegung selbst verändert werden und daß man infolgedessen nur solche Biegungen behandeln kann, bei welchen diese Veränderungen in gewissen Grenzen bleiben.

Fig. 619 a.

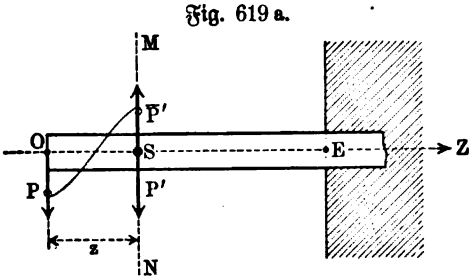
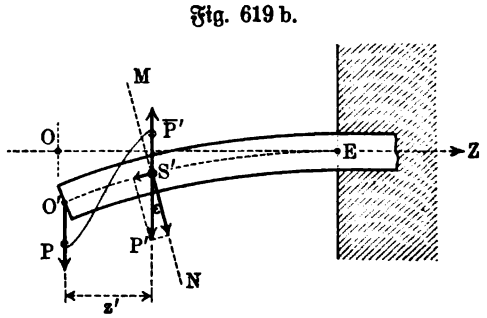


Fig. 619 b.



Zur Erläuterung der letzten Bemerkungen mögen die Fig. 619 a und b dienen, welche einen rechts eingemauerten und links frei schwebenden Stab, einen sogenannten Freiträger, darstellen. In Fig. 619 a ist, unter Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes, nur eine Endbelastung $[P]$ eingeführt. Wählt man bei einem beliebigen Querschnitt MN dessen Schwerpunkt S als Zurückführungspunkt für das System der äußeren Kräfte, welches hier nur aus $[P]$ besteht, so ist für diesen Querschnitt neben dem auf Biegung wirkenden Momente vom Werte $P \cdot z$ noch die Schubkraft $[P']$ zu berücksichtigen. In Fig. 619 b fällt von $[P']$ nur die Komponente $[P' \cos \varepsilon]$ als Schub in den Querschnitt, während außerdem die Komponente $[P' \sin \varepsilon]$ in

Richtung der Biegungslinie als Zug wirkt, ferner ist der Arm des Momentes von z in z' übergegangen.

Fig. 620 a.

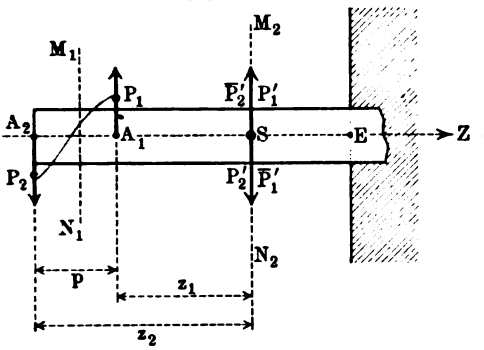
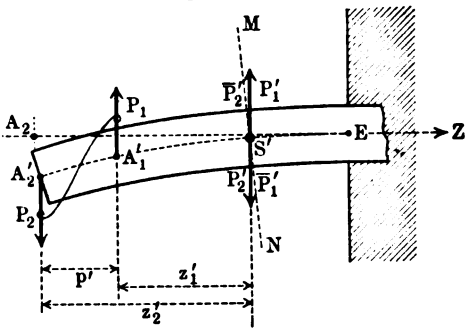


Fig. 620 b.



In Fig. 620 a ist, gleichfalls unter Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes, nur ein Kräftepaar $[P_1, P_2]$ eingeführt. Für einen Schnitt zwischen A_1 und A_2 gilt eine Betrachtung, wie für Fig. 619. Für einen Schnitt zwischen E und A_1 heben sich die Kräfte innerhalb der Querschnitte auf, so daß für die Strecke A_1E thatsächlich kein Schub zu berücksichtigen ist. Es bleibt für $P_1 = P_2 = P$ nur das Moment vom Werte

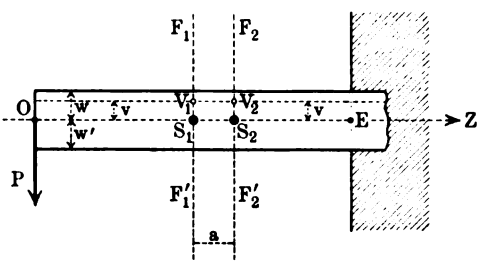
$$Pz_2 - Pz_1 = Pp.$$

Auch für Fig. 620 b zerstören sich die Kräfte, welche auf Schub wirken würden, für die Strecke A_1E, während die Arme der Paare sich entsprechend verändern.

Von der durch Fig. 619 b und Fig. 620 b gegenüber Fig. 619 a und Fig. 620 a dargestellten Abweichung sieht man bei Einführung der äußeren Kräfte zunächst immer ab.

Um nun den Normalfall zu behandeln, wählen wir die (vertikale) Belastungsebene als Ebene der Zeichnung und betrachten in ihr die Spuren zweier Querschnitte vor und nach der Biegung, wie es Fig. 621 a und b

Fig. 621 a.



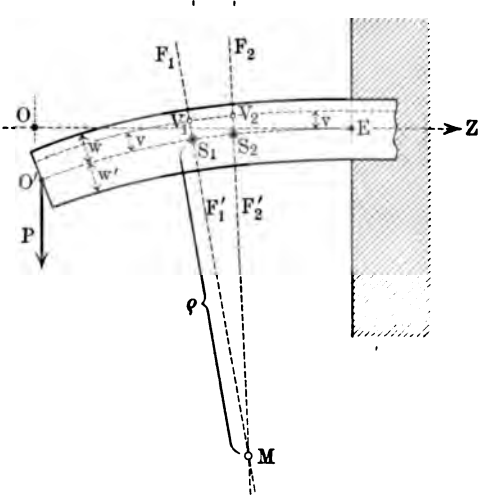


Fig. 621 b.

zeigt. Die Achse OZ ist übergegangen in die Biegungslinie $O'Z$, die Querschnitte F_1F_1' und FF_2', deren Spuren in S_1 und S_2 senkrecht zu OZ bezw. $O'Z$ sind, stehen in beiden Figuren senkrecht auf der Ebene der Zeichnung. Eine Faser, welche für Fig. 621 a durch V_1 und V_2 geht, bleibt gemäß der Voraussetzung über die Vertikalschichten in der Ebene der Zeichnung, und zwar lassen sich die entsprechenden Punkte V_1 und V_2 in Fig. 621 b finden durch Abtragen von $S_1V_1 = S_2V_2 = v$ aus Fig. 621 a, weil der Voraussetzung gemäß die Querschnitte keine Drehung in sich und keine Formänderung erlitten haben. F_1F_1' und F_2F_2' schneiden sich in Fig. 621 b in einer Geraden, die in M senkrecht steht auf der Ebene der Zeichnung.

Je näher F_1F_1' und F_2F_2' aneinander liegen, um so genauer entsprechen ϱ und $\varrho + v$ in Fig. 621 b den Krümmungsradien für die Kurvenstücke S_1S_2 und V_1V_2.

Für die Grenze gilt also

$$\frac{\varrho + v}{\varrho} = \frac{\overset{\frown}{V_1V_2}}{\overset{\frown}{S_1S_2}}$$

oder

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{\overset{\frown}{V_1V_2} - \overset{\frown}{S_1S_2}}{\overset{\frown}{S_1S_2}}.$$

Haben $\overset{\frown}{V_1V_2}$ und $\overset{\frown}{S_1S_2}$ vor der Biegung (vergl. Fig. 621 a) die Länge a gehabt und sind ihre Verlängerungen bezw. λ_v und λ_0, so ist $\overset{\frown}{V_1V_2} = a + \lambda_v$ und $\overset{\frown}{S_1S_2} = a + \lambda_0$, d. h. man hat

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{\lambda_v - \lambda_0}{a + \lambda_0}.$$

Führt man die Dehnungen $\varepsilon_v = \frac{\lambda_v}{a}$ und $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{a}$ ein, so ist ferner

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$$

oder

$$\varepsilon_v - \varepsilon_0 = \frac{v}{\varrho} + v \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varrho}.$$

Da ε_0 und $\frac{1}{\varrho}$ zwei relativ-kleine Größen sind, so ist an der Grenze deren Produkt $\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{\varrho}$ gegenüber diesen Größen selbst zu vernachlässigen, d. h. es ist

$$\varepsilon_v = \varepsilon_0 + \frac{v}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 303)$$

Damit ist die Dehnung für eine Faser der Belastungsebene im Abstande v von der Biegungslinie bestimmt, und zwar für eine bestimmte Stelle (F_1 und F_2) des Balkens, an welcher die Biegungslinie den Krümmungsradius ϱ hat.

Diese Dehnung ist also für die Faser im allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderlich, weil ϱ im allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderlich ist.

Nur für die Durchbiegung nach dem Kreise (ϱ = Konstante) verhält sich also die einzelne Faser wie ein gezogener Draht, welcher an jeder Stelle **dieselbe Dehnung** zeigt.

Gemäß der Annahme über die Vertikalschichten gilt die abgeleitete Formel nicht bloß für die Fasern der Belastungsebene, sondern zugleich für alle Fasern irgend einer ursprünglichen Horizontalschicht $V_1 V_2$, welche in Fig. 621 b durch eine senkrecht zur Ebene der Zeichnung verlaufende Cylinderfläche durch V_1 und V_2 bestimmt wird, im besondern auch für die Schicht durch $S_1 S_2$, welche als **Mittelschicht** bezeichnet werden mag.

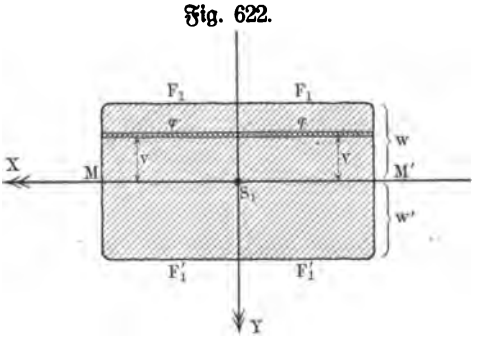
Gilt nun ferner für das Material des Stabes als Faserbündel (vergl. S. 892) **das Hookesche Gesetz, so ist für jede Stelle des Balkens** $\varepsilon_0 = 0$, d. h. die Biegungslinie und ebenso jede andere Faser der Mittelschicht zeigt dann die Dehnung 0, die Fasern dieser Schicht haben ihre Länge bei der Biegung also nicht geändert.

Um dies nachzuweisen, bilden wir σ_v gemäß dem Hookeschen Gesetze $\sigma_v = E \,.\, \varepsilon_v$ aus Gleichung 303), d. h.

$$\sigma_v = E \,.\, \varepsilon_0 + \frac{E}{\varrho} \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 304)$$

Schneidet die Mittelschicht den Querschnitt F_1 in der Geraden MM', welche dessen **Biegungsachse** heißt, so tritt die ursprüngliche Horizontalschicht $V_1 V_2$ in einer Parallelen zu MM' durch im Abstande v.

Fig. 622.



Jede Faser vom Querschnitt φ hat in dieser Schicht die Spannung σ_v, so daß die Kraft für die einzelne Faser $\varphi \,.\, \sigma_v$ ist, und zwar ist jede Spannung bezw. Kraft senkrecht zur Ebene der Zeichnung gerichtet. Bringt man Fig. 622 mit Fig. 621 in Verbindung, indem man aus $S_1 Z$ und $S_1 X$ und $S_1 Y$ ein rechtwinkliges Kreuz bildet, so zeigt der obere Rand des Querschnittes Zugkräfte, der untere Druckkräfte, falls $S_1 Y$ in Fig. 621 den Pfeil nach unten kehrt.

Die Kräfte aller Fasern des Querschnittes bilden ein System von Parallelkräften, welche zum Teil oberhalb und zum Teil unterhalb der Ebene der Zeichnung senkrecht zu dieser gerichtet sind.

Da dieses System von inneren Kräften mit den äußeren Kräften, welche senkrecht zum Querschnitt wirken, im Gleichgewicht sein muß und da solche äußere Kräfte der Voraussetzung gemäß nicht vorhanden sind, so muß die Resultante $\Sigma \varphi \sigma_v$ des Systems der inneren Kräfte den Wert Null haben, d. h. es ist

$$\Sigma \varphi \sigma_v = E \,.\, \varepsilon_0 \Sigma \varphi + \frac{E}{\varrho} \Sigma \varphi v = 0.$$

Da $\Sigma \varphi v$ das Massenmoment des Querschnittes für die Achse MM' ist

und da diese den Schwerpunkt des Querschnittes enthält, so ist $\Sigma \varphi v = 0$ und demnach auch $E \,.\, \varepsilon_0 \Sigma \varphi = 0$.

Da E und die Fläche $f = \Sigma \varphi$ nicht Null sind, so ist $\varepsilon_0 = 0$. Demnach sind die Gleichungen Nr. 303) und 304), falls das Hookesche Gesetz für den Stab als Faserbündel gilt, zu ersetzen durch

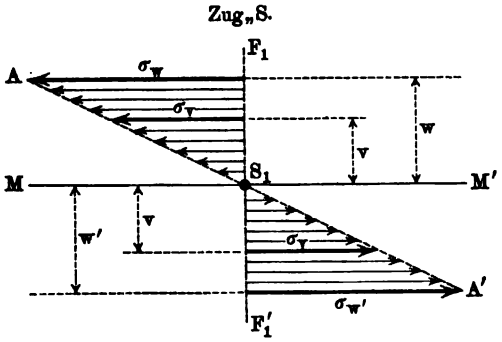
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0 \quad \text{und} \quad \sigma_0 = 0 \\ \varepsilon_v &= \frac{v}{\varrho} \quad \text{und} \quad \sigma_v = \frac{E}{\varrho} \cdot v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 305)$$

In diesem Falle ist die Mittelschicht zugleich eine sogen. neutrale Schicht oder Nullschicht, d. h. eine Schicht, in welcher die Fasern ungedehnt und spannungslos bleiben; man nennt infolgedessen in diesem Falle auch die Biegungsachse die neutrale Achse oder Nullachse des Querschnittes.

Da in diesem Falle die Dehnungen und die Spannungen (und demnach auch die Kräfte für gleiche Faserquerschnitte) an jeder Stelle des Balkens für jede der ursprünglichen Horizontalschichten proportional sind zu deren Abstande von der Mittelschicht, so gelangt man bei graphischer Darstellung jener Größen zu einem Bilde, wie es Fig. 623 für die Spannungen darstellt. Hier sind in jedem Punkte eines Querschnittes, senkrecht zu diesem, die Dehnungen oder die Spannungen als Vektoren aufgetragen, für die Zugseite nach links, für die Druckseite nach rechts oder umgekehrt; die Endpunkte dieser Vektoren bestimmen eine Ebene, welche die Ebene der Zeichnung in der Spur AA' senkrecht durchsetzt. Von der Mittelschicht M aus, die zugleich Nullschicht ist, wachsen die Vektoren, proportional zu v, so daß im Abstande w oder w' der Schichten, welche am weitesten von der Mittelschicht abliegen, die Maxima der Dehnungen oder Spannungen auftreten, welche durch ε_w und $\varepsilon_{w'}$ oder σ_w und $\sigma_{w'}$ bezeichnet werden mögen.

Fig. 623.

Zug „S.



Druck „S.

Da es für die dargestellten Dehnungen oder Spannungen bezeichnend ist, daß die Endpunkte der entsprechenden Vektoren eine Ebene bezw. im Schnitt eine Gerade bilden, so sagt man, daß jene Größen hier dem Ebenengesetze oder Geradengesetze (Geradliniengesetze) folgen.

Diese Eigenschaft der Dehnungen und Spannungen ist zuerst von Navier aus der Bernoullischen Annahme (Unveränderlichkeit der ursprünglichen Querschnitte) abgeleitet worden. Man kann diese Folgerung Naviers auch als Erfahrungsthatsache an die Spitze stellen und von ihr aus die Theorie der Biegung entwickeln.

Stellen die Vektoren der Fig. 623 die Kräfte dar, welche den Spannungen σ_v für gleiche Faserquerschnitte φ entsprechen, so ist das Moment dieser Kräfte $\sigma_v \cdot \varphi$ für eine Achse, welche in S_1 senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, gegeben als

$$\Sigma(\sigma_v \cdot \varphi) v.$$

Da nach Nr. 305) für σ_v geschrieben werden darf $\frac{E}{\varrho} \cdot v$, so ist dieses Moment auch darstellbar als

$$\frac{E}{\varrho} \cdot \Sigma v^2 \varphi = \frac{E}{\varrho} \cdot \mathfrak{T}r,$$

falls man das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Biegungsachse (vergl. Fig. 622), welche hier zugleich Nullachse ist, durch $\mathfrak{T}r$ bezeichnet.

Berechnet man das Moment der äußeren Kräfte Mo für den betrachteten Querschnitt, so muß dieses mit dem eben bestimmten Momente der inneren Kräfte im Gleichgewichte sein, d. h. es gilt

$$Mo = \frac{E}{\varrho} \cdot \mathfrak{T}r$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E \cdot \mathfrak{T}r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 306)$$

Diese Gleichung wird als Formänderungsgleichung bezeichnet, weil durch sie die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Biegungslinie, aus welcher man diese selbst bestimmen kann, für jeden Punkt der ursprünglichen Balkenachse durch die gegebenen Größen Mo, $\mathfrak{T}r$ und E dargestellt wird.

Aus der Verbindung von Nr. 305) und 306) folgt noch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sigma_v}{v} \cdot \frac{1}{E} = \frac{Mo}{E \cdot \mathfrak{T}r} \quad \text{oder} \quad Mo = \frac{\sigma_v}{v} \cdot \mathfrak{T}r.$$

Innerhalb eines bestimmten Querschnittes tritt der größte Wert von σ_v ein für die Faserschicht, welche von der Mittelschicht am weitesten ($v = w$) entfernt ist. Für diese lautet die zuletzt gewonnene Gleichung

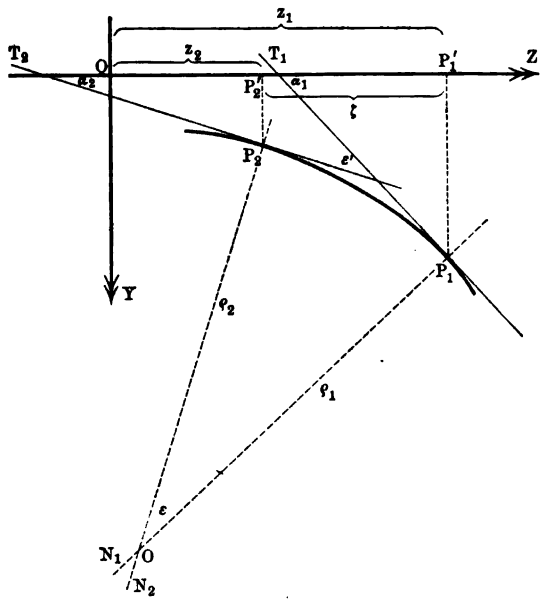
$$Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 307)$$

Diese Gleichung wird als Festigkeitsgleichung oder Spannungsgleichung bezeichnet, weil durch sie die größte Spannung für einen Querschnitt, welche höchstens gleich der Konstruktionsspannung k des Materiales sein darf, durch die gegebenen Größen Mo, $\mathfrak{T}r$ und w dargestellt wird.

In den meisten Fällen der Praxis läßt sich die Formänderungsgleichung durch eine Näherungsformel ersetzen, welche für die Bestimmung der Biegungslinie sehr geeignet ist. Für die geringen Formänderungen der Balkenachse, welche in der Praxis zulässig sind, darf man nämlich stets die Funktionen der Winkel, welche die Tangenten der Biegungslinie mit der ursprünglichen Achse bilden, durch ihre ersten Annäherungen ersetzen, d. h.

$\sin\alpha$ durch $arc\,\alpha$, $\cos\alpha$ durch 1, $tg\,\alpha$ durch $arc\,\alpha$ und $cot\,\alpha$ durch $\frac{1}{arc\,\alpha}$. Daraus folgt unter anderem, daß man auch jedes Stück der Biegungslinie durch seine senkrechte Projektion ($\cos\alpha = 1$) auf die ursprüngliche Achse, d. h. also bei wagerechter Achse durch seine Horizontalprojektion ersetzen darf.

Fig. 624.



Ist P_1P_2 in Fig. 624 ein beliebiges Stück einer Kurve und sind P_1N_1 und P_2N_2 die Normalen und P_1T_1 und P_2T_2 die Tangenten bezw. für P_1 und P_2, so gilt

$$\varepsilon = \varepsilon' = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Bezeichnet man den Wert des Krümmungsradius, dem $OP_1 = \varrho_1$ und $OP_2 = \varrho_2$ sich für $lim\,\widehat{P_1P_2} = 0$ nähern, durch ϱ, so gilt für die Grenze

$$\varrho \,.\, arc\,\varepsilon = \widehat{P_1P_2},$$

d. h. es ist

$$\frac{1}{\varrho} = lim\left[\frac{arc\,\varepsilon}{\widehat{P_1P_2}}\right]_{\zeta=0} = lim\left[\frac{arc\,\alpha_1 - arc\,\alpha_2}{\widehat{P_1P_2}}\right]_{\zeta=0}.$$

Bei der bezeichneten Annäherung ist auch

$$\frac{1}{\varrho} = lim\left[\frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2}{z_1 - z_2}\right]_{\zeta=0}.$$

Hat die betrachtete Linie die Gleichung $y = f(z)$, so stimmt die Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ nach z für jede Stelle überein mit dem entsprechenden Werte von $tg\,\alpha$, d. h. es ist hier $tg\,\alpha_1 = f'(z_1)$ und $tg\,\alpha_2 = f'(z_2)$ und also auch

$$\frac{1}{\varrho} = lim\left[\frac{f'(z_1) - f'(z_2)}{z_1 - z_2}\right]_{\zeta=0}.$$

Die rechte Seite bezeichnet die Ableitung von $f'(z)$, d. h. also die zweite Ableitung $f''(z)$ von $f(z)$, so daß man schließlich hat

$$\frac{1}{\varrho} = f''(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 308)$$

Mit diesem Näherungswerte (vergl. S. 91) geht die Formänderungsgleichung Nr. 306) über in

$$f''(z) = \frac{Mo}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 309)$$

d. h. die Gleichung der Biegungslinie $y = f(x)$ ist dadurch gegeben, daß die zweite Ableitung von $f(x)$ in einfacher Weise durch Mo, $\mathfrak{T}r$ und E bestimmt ist.

Aus dieser angenäherten Formänderungsgleichung gewinnt man die Gleichung der Biegungslinie $y = f(x)$, indem man den Übergang von der abgeleiteten Funktion zur Stammfunktion (vergl. S. 73) zweimal hintereinander ausführt, d. h. erst von $f''(x)$ auf $f'(x)$ und dann von $f'(x)$ auf $f(x)$ schließt. Die dabei auftretenden Konstanten bestimmt man mit Hülfe solcher Stellen (x) des Balkens, für welche infolge der Art der Befestigung u. s. w. entweder die Neigung $f'(x) = tg\,\alpha$ oder die Durchbiegung $y = f(x)$ gegeben ist.

Die Bestimmung der Biegungslinie dient in allen Fällen dazu, das Maximum für den Zahlenwert der Durchbiegung zu gewinnen, welches bei Konstruktionen unter einer gewissen Grenze gehalten werden muß. Außerdem gestattet die Kenntnis der Biegungslinie die sogen. statisch-unbestimmten Aufgaben (vergl. S. 472 und 811) dieses Gebietes zu behandeln.

Die Festigkeitsgleichung giebt unmittelbar für jeden Querschnitt das Maximum der Spannung σ_w an, welches die ihn durchsetzenden Fasern zeigen, so daß mit ihrer Hülfe derjenige Querschnitt aufgesucht werden kann, in welchem überhaupt das Maximum der Spannung auftritt; die Spannung für diesen Querschnitt, welcher der gefährliche Querschnitt (Zerstörungs- oder Bruchquerschnitt) genannt wird, darf bei Konstruktionen höchstens den Wert der zulässigen Spannung erreichen.

Beide Gleichungen dienen demnach zur Dimensionierung, d. h. zur Bestimmung der Abmessungen eines Balkens, welche bei Konstruktionen der Erfahrung gemäß zulässig sind.

Da man aber in der Praxis zur Zeit noch meist der Dimensionierung mit Hülfe der Maximalspannung vor der Dimensionierung mit Hülfe der Maximaldurchbiegung den Vorzug giebt, so spielt thatsächlich die Festigkeitsgleichung bei der Bestimmung der zulässigen Abmessungen eine größere Rolle. (Vergl. S. 847.)

Wir werden nun in den folgenden Paragraphen die Größen $\mathfrak{T}r$ bezw. $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ und Mo, durch welche $\frac{1}{\varrho} \sim f''(x)$ und σ_w in den beiden Gleichungen Nr. 307) und Nr. 309), von der Konstanten E abgesehen, bestimmt werden, noch etwas näher betrachten, um dann deren Verwendung an Beispielen zeigen zu können.

Dabei handelt es sich zunächst um die vier Fälle der einfachen Befestigung eines prismatischen Balkens (Balkens von konstantem Querschnitt), der durch eine Einzellast oder durch gleichmäßige Belastung, wie sie z. B. dem Eigengewicht des Stabes bei homogenem Materiale entspricht, oder durch beides beansprucht wird.

In Bezug auf die Befestigung eines Balkenendes hat man dabei Unterstützung und Einspannung (Einklemmung) zu unterscheiden.

Über die Unterstützung, welche in statischer Hinsicht durch eine Kraft als Reaktion ersetzt werden kann, ist den früheren Bemerkungen (vgl. S. 368 u. f.) nichts hinzuzufügen. Als Unterstützungen eines Balkenendes hat man in der Praxis alle Befestigungen anzusehen, bei welchen nur der entsprechende Endpunkt der Achse (mit seitlichem Spielraum) festgehalten wird, so daß die Biegung der Achse bereits in diesem Endpunkte beginnen kann.

Zur Erläuterung der Einspannung diene Fig. 625, welche einen Freiträger darstellt, der bei E eingespannt und an seinem Ende durch $[P]$ belastet ist. Hier wird der Endpunkt der Achse bei E in seiner Lage festgehalten, wie bei einer Unterstützung, während außerdem die ursprüngliche Achse gezwungen wird, vor und nach der Biegung bei E in derselben Richtung auszutreten. In Fig. 625 b ist erläutert, wie die Einspannung einerseits als Stütze das eingeklemmte Ende durch die Reaktion $[R]$ hält und wie außerdem die Drehung des Balkens um E durch das Reaktionsmoment $[D]$ verhindert wird; dabei ist $R = P$ und $D = P.l$. Man kann diese statische Bedeutung der Einspannung auch durch Fig. 625 c veranschaulichen, in welcher diese durch zwei Stützen von der Entfernung k mit entgegengesetzten Reaktionen ersetzt ist; hier ist $D = K \,.\, k$, so daß die eine Stütze die Reaktion $[K + R]$, die andere die Reaktion $[\overline{K}]$ liefert. Im Hinblick auf eine wirkliche Konstruktion darf diese statische Veranschaulichung der Einspannung jedoch im allgemeinen nicht als deren Ersatz [1]) angesehen werden, da die Befestigung der Fig. 625 c eine Biegung des Stabes zuläßt, bei welcher EO in E vor und nach der Biegung verschiedene Richtungen annimmt. Ist die ursprüngliche Achse horizontal, so tritt EO bei E auch nach der Biegung wagerecht aus, wenn $k = l$ und also $K = P$ gemacht wird (Symmetrie), während dies für andere Werte von k nicht der Fall ist.

Fig. 625 a.

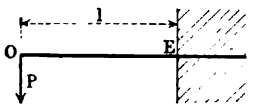


Fig. 625 b.

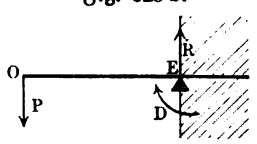
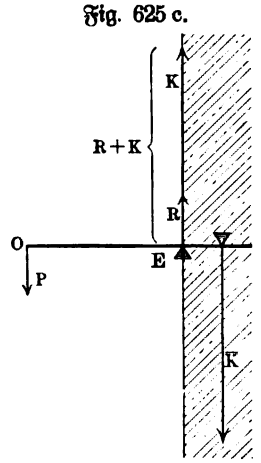


Fig. 625 c.



Als Einspannungen eines Balkenendes hat man in der Praxis alle Befestigungen anzusehen, bei welchen ein Endpunkt der Stabachse festliegt und außerdem dafür gesorgt ist, daß die ursprüngliche Achse vor und nach der Biegung in diesem Endpunkte dieselbe Richtung behält; dies gilt z. B. für Einmauerung und Verankerung oder für Einpressungen in feste Hohlkörper.

Während die Träger bei einer Einspannung selbstverständlich über den Einspannungspunkt E hinausreichen, denkt man sie bei einer Unterstützung, falls nichts Besonderes bemerkt wird, stets genau im Unterstützungspunkte aufhören, so daß dieser Punkt zugleich einer der äußersten Punkte

[1]) Vergl. dazu § 166.

der Balkenachse ist; in dem besonderen Falle, in dem ein Träger über einen Unterstützungspunkt hinausreicht, bezeichnet man den überschießenden Teil als „überkragendes Ende".

Die vier Fälle der einfachen Befestigung sind nun folgende:

1. Das eine Ende des Stabes ist eingespannt, das andere frei (Freiträger).
2. Beide Enden sind durch Unterstützung befestigt (Zweistützenträger).
3. Ein Ende ist durch Unterstützung, das andere Ende durch Einspannung befestigt.
4. Beide Enden sind eingespannt.

Bei beiderseits eingemauerten Trägern pflegt man der Sicherheit wegen im allgemeinen nur Unterstützung anzunehmen, also Fall 3 und Fall 4 so zu behandeln, als wenn der Fall 2 vorläge. Infolgedessen gewinnt der Fall 2 für die Praxis eine ganz besondere Bedeutung, zumal eine Befestigung nach Fall 1 in der Praxis verhältnismäßig selten ist.

Anderseits hat Fall 1 in theoretischer Beziehung eine sehr umfassende Bedeutung, da man verwickelte Trägerkonstruktionen durch Schnitte stets in Freiträger zerlegen kann.

Endlich mag noch bemerkt werden, daß jeder der ersten drei Fälle aus Fall 4 abgeleitet werden kann, indem man den Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$ und den Reaktionsmomenten $[D_1]$ und $[D_2]$ der beiden Enden teilweise die Sonderwerte Null giebt.

In Bezug auf die praktische Ausführung der Befestigung (Rollenlager u. s. w.) vergl. S. 478, außerdem die folgenden Anwendungen und Übungen.

Die angreifenden Kräfte werden, von den Reaktionen abgesehen, stets als Belastungen, d. h. also als von oben nach unten wirkende Kräfte, vorausgesetzt, wenn nicht im besondern bemerkt wird, daß eine oder die andere der angreifenden Kräfte eine andere Richtung hat. Von der allgemeinen Voraussetzung, daß die Achse des Balkens ursprünglich wagerecht gelagert ist, sind Abweichungen zulässig, welche innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der gegebenen Theorie liegen; so ist z. B. im Falle 1 eine schiefe Einspannung von kleiner Neigung, im Falle 2 ein geringer Höhenunterschied der Stützen ꝛc. erlaubt, falls dabei für die Biegungslinie $y = f(x)$ die Werte von $f'(x) = tg\,\alpha$ nicht größer werden, als den gemachten Voraussetzungen ($sin\,\alpha = tg\,\alpha = arc\,\alpha$; $cos\,\alpha = 1$) entspricht.

146. Das Trägheitsmoment und die Querschnittszahl für den Normalfall der Praxis. Die Größen $\frac{1}{\varrho} \sim f''(x)$ und σ_w in den beiden Gleichungen Nr. 307) und Nr. 309) des vorigen Paragraphen erscheinen, abgesehen von der Konstanten E, durch das Moment der äußeren Kräfte, welches eine dynamische Größe ist, bestimmt und durch die Größen Tr und $\frac{Tr}{w}$, welche beide nur von den Abmessungen des Balkens und zwar bloß von denen des Querschnittes abhängen, also lediglich geometrische

(und nicht phoronomische oder dynamische) **Größen** sind. Man bezeichnet $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ als die **Querschnittszahl** (Querschnittsmodul) oder auch als das **Widerstandsmoment des Querschnittes für die Einheit der Spannung** σ_w bezw. kurz als dessen Widerstandsmoment; letztere Beziehung rechtfertigt sich insofern, als $\sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ den Wert des Momentes der inneren (widerstehenden) Kräfte darstellt, welches mit dem Momente der äußeren Kräfte [*Mo*] bei zulässigen Konstruktionen im Gleichgewichte ist, so daß $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ für $\sigma_w = 1$ ein Maß jenes Momentes ist.

Für einen gegebenen Wert von [*Mo*] wird die thatsächlich vorhandene Spannung σ_w um so kleiner, je größer $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ ist, d. h. Querschnitte von gleicher Fläche sind im allgemeinen für größere Werte von $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ vorteilhafter.

Bei wagerechter Lagerung des Balkens bezeichnet $\mathfrak{Tr}$ im Normalfalle der Praxis stets das Trägheitsmoment, für welches die wagerechte Hauptachse des Querschnittes, welche ja dessen Biegungsachse ist, die Drehungsachse wäre, falls der Querschnitt als eine dünne sich drehende Platte aufgefaßt würde. Demgemäß sind die Werte der früher (vergl. S. 637 u. f.) bestimmten **achsialen Trägheitsmomente**, welche hier auch wohl als **äquatoriale Trägheitsmomente** bezeichnet werden, und zwar die **für die Hauptachsen des Querschnittes** ohne weiteres für $\mathfrak{Tr}$ zu verwenden, im Gegensatz zu den früher bestimmten polaren Trägheitsmomenten.

Die **Größe** w bezeichnet dann stets **die weiteste Entfernung** unter den Entfernungen der Umfangspunkte des Querschnittes von der Biegungsachse, und zwar ist dabei bei horizontaler Lagerung der Wert von w für den oberen und für den unteren, durch die Biegungsachse bestimmten Teil des Querschnittes zu unterscheiden. Sind diese beiden Werte einander gleich, so hat die Querschnittszahl $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ nur einen Wert, sonst ist auch $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ für den oberen und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ für den unteren Teil des Querschnittes zu unterscheiden.

Bei einer bestimmten Aufgabe läßt sich für jede Stelle des Balkens entscheiden, ob die gezogenen Fasern oberhalb oder unterhalb bezw. die gedrückten unterhalb oder oberhalb der Mittelschicht liegen; infolgedessen kann man auch $\frac{\mathfrak{Tr}}{w_1}$ für die Zugseite und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w_2}$ für die Druckseite unterscheiden, wobei nur darauf zu achten ist, daß ein spannungsloser Querschnitt ($Mo = 0$) im allgemeinen einen Wechsel dieser Seiten anzeigt.

Ist die zulässige Spannung k für Zug (k_1) und Druck (k_2) verschieden, so gilt bei **Ausnutzung des Materiales** für die Zugseite

$$Mo = k_1 \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w_1}$$

und für die Druckseite

$$Mo = k_2 \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w_2}.$$

Da die linken Seiten beider Gleichungen übereinstimmen, so können beide Gleichungen nur zusammen bestehen, wenn $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für die Zugseite $\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w_1}\right)$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für die Druckseite $\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w_2}\right)$ voneinander verschieden sind und zwar so, daß

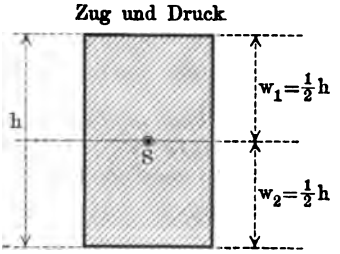
$$\frac{k_1}{w_1} = \frac{k_2}{w_2} \quad \text{oder} \quad k_1 : k_2 = w_1 : w_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 310)$$

ist.

Bei Ausnutzung des Materiales entspricht also einem Werte von k ein Wert von w, während bei Verschiedenheit der Werte von k für Zug und Druck auch w für die Zugseite und für die Druckseite verschieden sein muß.

Fig. 626.

Zug und Druck



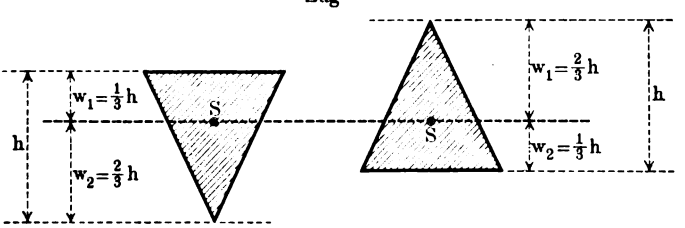
Druck und Zug

$k_1 = k_2$

Demgemäß hat man bei Ausnutzung des Materiales für Stoffe, bei denen k für Zug und Druck denselben Wert hat, Querschnitte zu wählen, welche oberhalb und unterhalb der zur Biegungsachse gewählten Hauptachse gleich hoch sind, für Stoffe, bei denen k für Zug (k_1) und Druck (k_2) verschiedene Werte hat, dagegen Querschnitte zu bilden, bei welchen sich die größten Ausdehnungen oberhalb (w_1) und unterhalb (w_2) jener Hauptachse verhalten wie $k_1 : k_2$. Für Schmiedeeisen, bei dem $k_1 = k_2$ ist, sind z. B. Querschnitte der ersten Art zu verwenden, für ein Material, bei dem $k_1 : k_2 = 1 : 2$ ist, würde auch $w_1 : w_2 = 1 : 2$ angesetzt werden müssen, d. h. hier müßte der Querschnitt für die Druckseite die doppelte Höhe der Zugseite haben.

Fig. 627 a. Fig. 627 b.

Zug



Druck

$k_1 : k_2 = 1:2$ $k_1 : k_2 = 2:1$

Für $k_1 = k_2$ ist z. B. das Rechteck (vergl. Fig. 626) ein entsprechender Querschnitt, während das Dreieck für die Fälle $k_1 : k_2 = 1 : 2$ und $k_1 : k_2 = 2 : 1$, wie Fig. 627 a und b zeigt, ein entsprechender Querschnitt wäre.

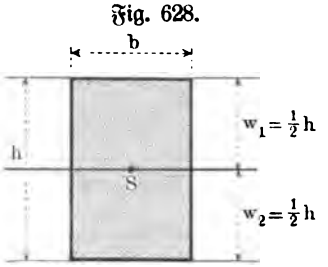
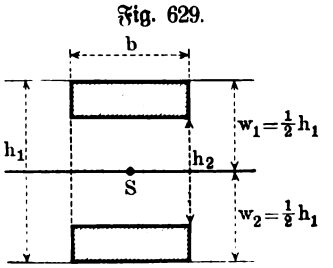
Hat ein Balken spannungslose Querschnitte, so könnte das Material bei

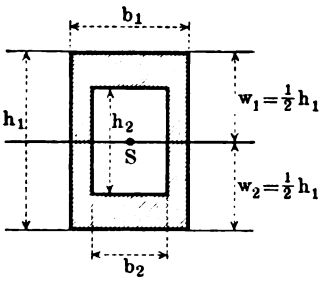
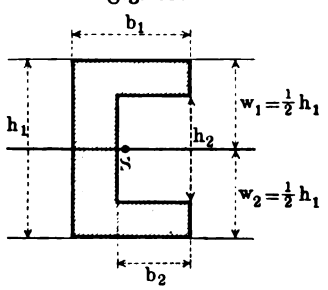
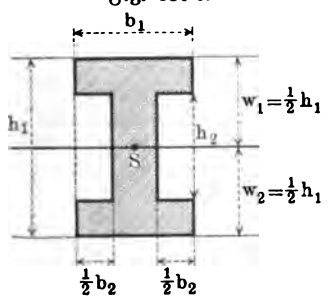
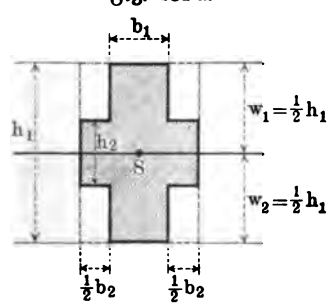
verschiedenen Werten von k_1 und k_2 für Zug und Druck nur ausgenutzt werden, wenn die Form des Querschnittes an einer solchen Stelle einer entsprechenden Änderung unterläge, und zwar würde dies nur für eine bestimmte Art der Belastung gelten. Bei prismatischen Balken läßt sich das Material, falls spannungslose Querschnitte vorhanden sind, bei verschiedenen Werten von k_1 und k_2 nur für Zug oder Druck ausnutzen, wobei selbstverständlich der kleinere Wert von k_1 oder k_2, welcher ja größere Abmessungen liefert, bestimmend ist.

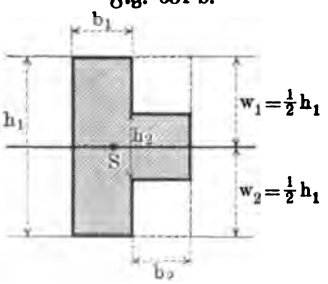
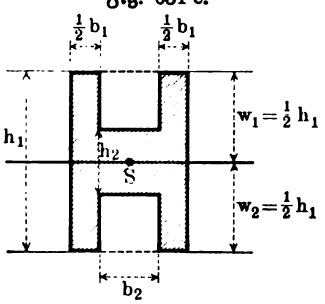
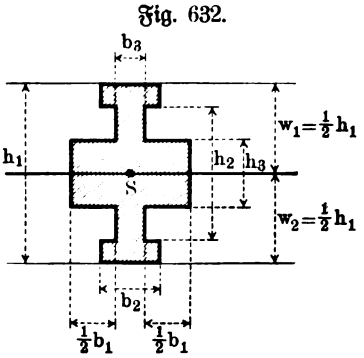
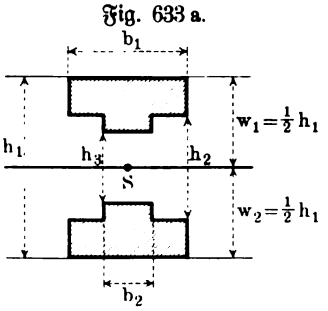
Über die Bestimmung des (achsialen) Trägheitsmomentes $\mathfrak{T}r$ ist den früheren Betrachtungen (vergl. S. 673 u. f.) nur wenig hinzuzufügen.

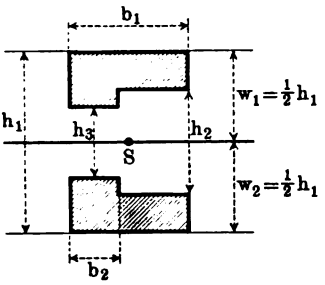
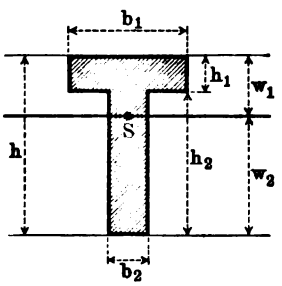
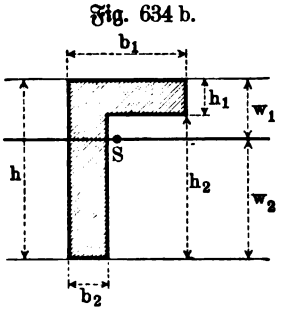
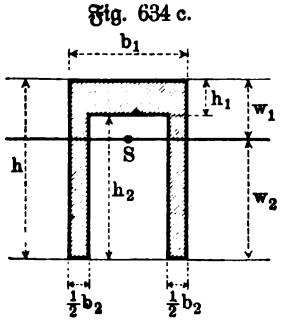
Zunächst ist zu bemerken, daß eine große Anzahl der thatsächlich in der Praxis verwandten Balkenquerschnitte aus Rechtecken gebildet erscheinen, so daß sie ohne weiteres durch wiederholte Anwendung der Formel $\mathfrak{T}r = \frac{bh^3}{12}$ bezw. $\mathfrak{T}r = \frac{b^3h}{12}$ behandelt werden können, gegebenen Falles unter Zuziehung der Formel Nr. 198). Da für $b < h$ der Wert $\frac{bh^3}{12}$ größer ist als $\frac{b^3h}{12}$, so wird man beim rechteckigen Balken für $b < h$ eine Lagerung wählen, bei der b wagerecht und h senkrecht ist, falls nicht andere Gründe für eine umgekehrte Lagerung sprechen.

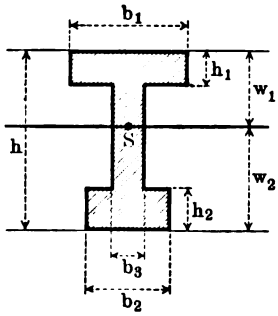
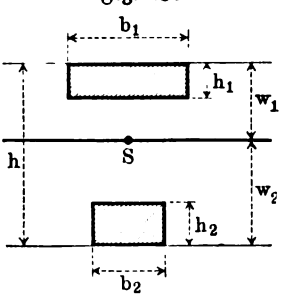
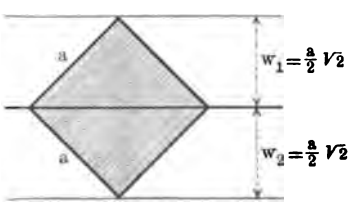
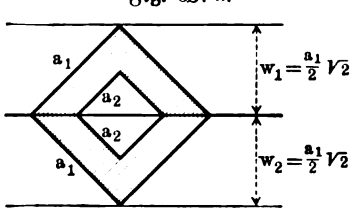
Die folgende Tabelle für $\mathfrak{T}r$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gilt für solche Querschnitte, welche auf Rechtecke zurückführbar sind, sie ist durchweg auf die wagerechte Hauptachse durch den Schwerpunkt (als Biegungsachse) bezogen.

Nr.		$\mathfrak{T}r$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$
1.	Fig. 628. 	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
2.	Fig. 629. 	$\frac{b(h_1^3 - h_2^3)}{12}$	$\frac{b(h_1^3 - h_2^3)}{6h_1}$

Nr.		$\mathfrak{T}r$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$
	Fig. 630 a.		
3.		$\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{12}$	$\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{6 h_1}$
	Fig. 630 b.		
			
	Fig. 630 c.		
			
	Fig. 631 a.		
4.		$\frac{b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3}{12}$	$\frac{b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3}{6 h_1}$

Nr.		$\mathfrak{T}r$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$
	Fig. 631 b. 	Vergl. vorige Seite.	Vergl. vorige Seite.
	Fig. 631 c. 	Vergl. vorige Seite.	Vergl. vorige Seite.
	Fig. 632. 		
5.		$\frac{b_1h_3^3+b_2h_1^3-(b_2-b_3)h_2^3}{12}$	$\frac{b_1h_3^3+b_2h_1^3-(b_2-b_3)h_2^3}{6h_1}$
	Fig. 633 a. 		
6.		$\frac{b_1(h_1^3-h_2^3)+b_2(h_2^3-h_3^3)}{12}$	$\frac{b_1(h_1^3-h_2^3)+b_2(h_2^3-h_3^3)}{6h_1}$

Nr.		Tr	$\frac{Tr}{w}$
	Fig. 633 b.  	Vergl. vorige Seite.	Vergl. vorige Seite.
7.	Fig. 634 a.  Fig. 634 b.  Fig. 634 c.  	$\frac{b_1 w_1^3 + b_2 w_2^3 - (b_1 - b_2)(w_1 - h_1)^3}{3}$	$\frac{Tr}{w_1}$ und $\frac{Tr}{w_2}$ gemäß $w_1 = \frac{1}{2}\frac{b_2 h^2 + (b_1 - b_2) h_1^2}{b_2 h + (b_1 - b_2) h_1}$ $w_2 = h - w_1.$

Nr.		Tr	$\frac{Tr}{w}$
8.	Fig. 635. 	$\frac{b_1 w_1^3 + b_2 w_2^3 - (b_1 - b_3)(w_1 - h_1)^3 - (b_2 - b_3)(w_2 - h_2)^3}{3}$	$\frac{Tr}{w_1}$ und $\frac{Tr}{w_2}$ gemäß $w_1 = \frac{1}{2}\frac{b_3 h^2 + (b_1 - b_3) h_1^2 + (b_2 - b_3) h_2 (2h - h_2)}{b_3 h + (b_1 - b_3) h_1 + (b_2 - b_3) h_2}$ $w_2 = h - w_1$
9.	Fig. 636. 	$\frac{b_1 [w_1^3 - (w_1 - h_1)^3] + b_2 [w_2^3 - (w_2 - h_2)^3]}{3}$	$\frac{Tr}{w_1}$ und $\frac{Tr}{w_2}$ gemäß $w_1 = \frac{1}{2}\frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h - h_2)}{b_1 h_1 + b_2 h_2}$ $w_2 = h - w_1$
10 a.	Fig. 637 a. 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{Tr}{w}$ gemäß $w = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.
10 b.	Fig. 637 b. 	$\frac{a_1^4 - a_2^4}{12}$	$\frac{Tr}{w}$ gemäß $w = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{2}$.

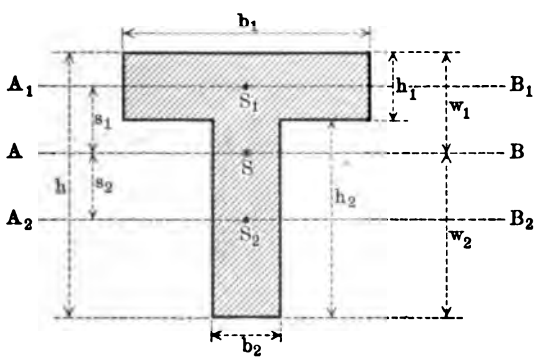
Zu vorstehender Tabelle bemerken wir, daß die verschiedenen Figuren unter 3., ebenso unter 4. und 6. und 7. ineinander übergehen, wenn man bestimmte Flächenteile parallel zur Biegungsachse verschiebt, wodurch das Trägheitsmoment in Bezug auf diese nicht geändert wird (vergl. S. 664 und 665).

Bei Nr. 7 ist zu beachten, daß zunächst die Lage des Schwerpunktes S nach dem Momentensatze bestimmt werden muß (vergl. auch Fig. 281), wobei man gemäß Fig. 638 erhält $(b_1 h_1) \cdot s_1 = (b_2 h_2) \cdot s_2$ neben $s_1 + s_2 = \frac{1}{2} h$; es ist dann $w_1 = s_1 + \frac{1}{2} h_1$ und $w_2 = s_2 + \frac{1}{2} h_2$. Man bezieht nun die Trägheitsmomente der Rechtecke $b_1 h_1$ und $b_2 h_2$ auf ihre Schwerpunktsachsen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ und geht dann zu der Parallelachse AB über, wobei man für das gesuchte Trägheitsmoment erhält

$$\frac{b_1 h_1^3}{12} + (b_1 h_1) s_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + (b_2 h_2) s_2^2.$$

Statt dessen kann man auch das Trägheitsmoment für das Rechteck $b_2 w_2$ auf die Grundlinie AB beziehen, was $\frac{1}{3} b_2 w_2^3$ liefert, ebenso das Trägheitsmoment des Rechtecks $b_1 w_1$, was $\frac{1}{3} b_1 w_1^3$ giebt, und endlich das Trägheitsmoment des Rechtecks $(b_1 - b_2)(w_1 - h_1)$ mit $\frac{1}{3}(b_1 - b_2)(w_1 - h_1)^3$ in Abzug bringen.

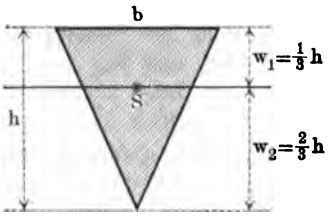
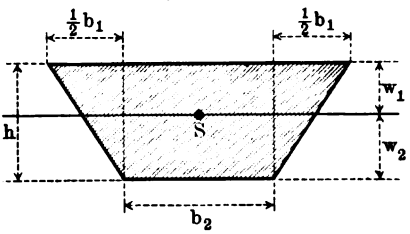
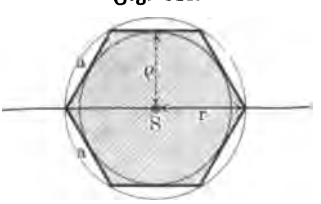
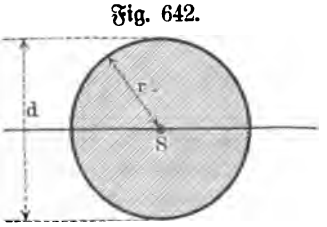
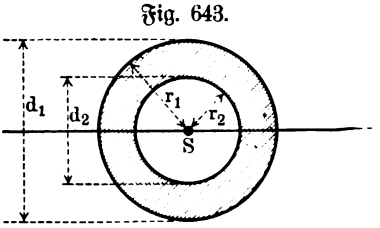
Fig. 638.

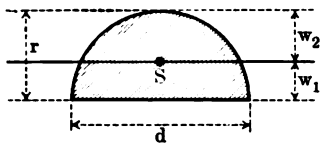
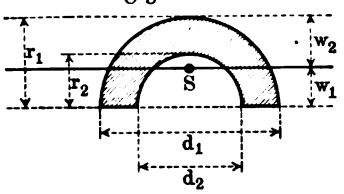
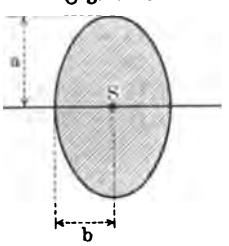
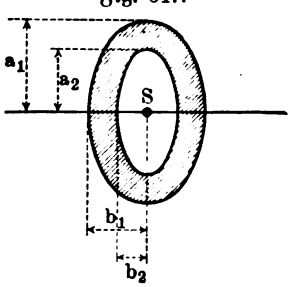
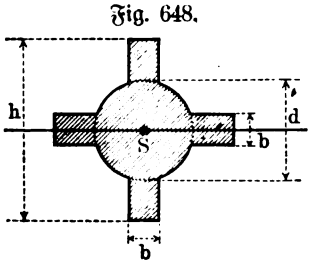


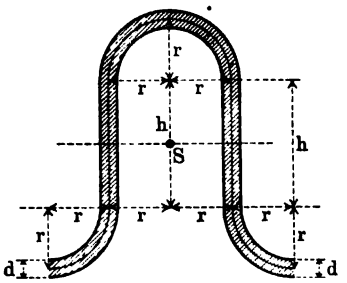
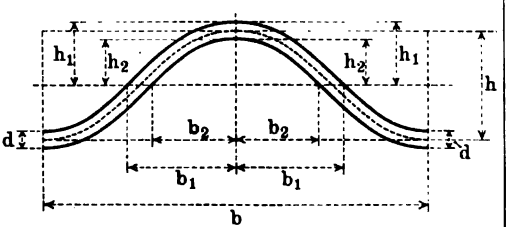
Entsprechende Betrachtungen gelten für Nr. 8 und Nr. 9 der Tabelle.

Bei Nr. 10 ist daran zu erinnern, daß ein Querschnitt, welcher für die beiden Hauptachsen von S dasselbe Trägheitsmoment hat, dieses Trägheitsmoment für alle Achsen durch S zeigt (vergl. S. 652). In diesem Falle ist jede Achse durch S als Biegungsachse verwendbar, aber der Wert von w muß dabei für jede Lage berechnet werden. Diese Bemerkung bezieht sich unter anderem auf alle regelmäßigen Vielecke, also auch auf Nr. 13 der folgenden Tabelle.

Wir setzen die gegebenen Tabellen noch für einige gebräuchliche Querschnitte fort.

Nr.		$\mathfrak{T}r$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$
11.	Fig. 639. 	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w_1}=\frac{bh^2}{12}$ $\frac{\mathfrak{T}r}{w_2}=\frac{bh^2}{24}$
12.	Fig. 640. 	$\frac{6b_2^2+6b_1b_2+b_1^2}{36(2b_2+b_1)}\cdot h^3$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gemäß $w_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{3b_2+b_1}{2b_2+b_1}\cdot h$ $w_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{3b_2+2b_1}{2b_2+b_1}\cdot h$
13.	Fig. 641. 	Für F als Fläche $\frac{F}{24}(6r^2-a^2)$ oder $\frac{F}{48}(12\varrho^2+a^2)$	w ist abhängig von der Stellung
14.	Fig. 642. 	$\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi r^3}{4}$
15.	Fig. 643. 	$\frac{\pi}{64}(d_1^4-d_2^4)$	$\frac{\pi}{32}\frac{d_1^4-d_2^4}{d_1}$

Nr.		$\mathfrak{T}r$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$
16.	Fig. 644. 	$r^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$ $= 0{,}1098\, r^4$	$w_1 = 0{,}4244\, r$ $w_2 = 0{,}5756\, r$ $\frac{\mathfrak{T}r}{w_1} = 0{,}2587\, r^3$ $\frac{\mathfrak{T}r}{w_2} = 0{,}1908\, r^3$
17.	Fig. 645. 	$0{,}1098\,(r_1^4 - r_2^4)$ $-\frac{0{,}283\, r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2}$ $\sim 0{,}3(r_1 - r_2)\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gemäß $w_1 = \frac{4\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{3\pi\,(r_1 + r_2)}$ $w_2 = r - w_1$
18.	Fig. 646. 	$\frac{\pi a^3 b}{4}$ $= 0{,}7854\, a^3 b$	$\frac{\pi a^2 b}{4} = 0{,}7854\, a^2 b$
19.	Fig. 647. 	$\frac{\pi}{4}\,(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$	$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2}{a_1}$
20.	Fig. 648. 	$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}\, d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$	$\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gemäß $w = {}^1/_2\, h$

Nr.		Tr	$\frac{Tr}{w}$
21.	Fig. 649. 	$d\left(r^2\pi + 4r^2h + \frac{\pi}{2}rh^2 + \frac{1}{6}h^2\right)$	$\frac{Tr}{w}$ gemäß $w = \frac{2r + h + d}{2}$
22.	Fig. 650. 	$\frac{64}{105}(b_1h_1^3 - b_2h_2^3)$ für $h_1 = \frac{1}{2}(h + d)$ $h_2 = \frac{1}{2}(h - d)$ $b_1 = \frac{1}{4}(b + 2{,}6\,d)$ $b_2 = \frac{1}{4}(b - 2{,}6\,d)$	$\frac{Tr}{w}$ gemäß $w = \frac{h + d}{2}$

Zu Nr. 21 und 22 der Tabelle ist zu bemerken, daß es sich bei Nr. 21 um ein Wellblech handelt, dessen Welle aus Kreisbogen, bei Nr. 22 um ein Wellblech, dessen Welle aus Parabelbogen konstruiert ist.

Handelt es sich um Querschnitte, deren Trägheitsmomente durch die bisherigen Betrachtungen nicht gefunden werden können, so bestimmt man diese auf graphischem Wege, meist zugleich mit Rücksicht auf eine graphische Bestimmung des Schwerpunktes.

Unter der großen Zahl von Methoden zur graphischen Bestimmung von Tr haben in der Praxis namentlich die Methoden von Nehls und von Mohr Eingang gefunden.

Die Methode von Nehls beruht auf einer einfachen Verwendung senkrechter und centraler Projektionen von beliebig-vielen Umfangspunkten der Fläche. Soll das Trägheitsmoment der schraffierten Fläche in Fig. 651 für die Achse UV bestimmt werden, so zerlegt man die Fläche zunächst durch ein Lot $O'O$ zu UV in zwei Teile und behandelt jeden Teil für sich. Für die weitere Betrachtung wählen wir den rechten Teil und denken uns diesen in Parallelstreifen zur Achse UV zerlegt. Hat ein über $PQ = x$ gelegener Streifen die Höhe η, so ist sein Trägheitsmoment für UV als Achse bei einem Abstande y von dieser an der Grenze gegeben durch

$$(x \,.\, \eta) \,.\, y^2.$$

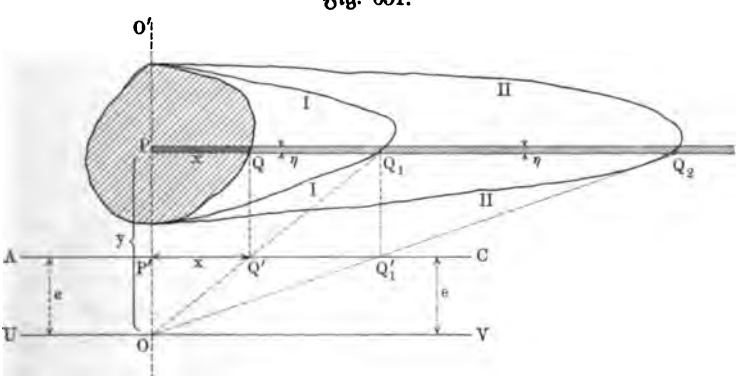
Projiziert man nun P und Q senkrecht auf eine Gerade AC, die zu

UV im Abstande e parallel ist, als P' und Q' und projiziert man ferner Q' aus O auf PQ central in Q_1, so ist $PQ_1 : P'Q' = y : e$, d. h. man hat $PQ_1 = \frac{P'Q' \cdot y}{e} = \frac{x \cdot y}{e}$. Während die Fläche über PQ bei einer Höhe η die Größe $x \cdot \eta$ hat, ist die entsprechende Fläche von der Höhe η über PQ_1 gegeben durch $\frac{x \cdot y}{e} \cdot \eta$.

Leitet man aus Q_1 einen Punkt Q_2 so ab, wie Q_1 aus Q abgeleitet wurde, so ist $PQ_2 = P'Q_1' \cdot \frac{y}{e} = PQ_1 \cdot \frac{y}{e} = \frac{x \cdot y^2}{e^2}$ und man hat für die entsprechende Fläche von der Höhe η über PQ_2 den Wert $\frac{x \cdot y^2}{e^2} \cdot \eta$.

Bestimmt man nun zu jedem Punkte Q der rechtsseitigen Begrenzung der schraffierten Fläche je einen Punkt Q_1 und Q_2, so entstehen zwei Linien I und II.

Fig. 651.



Die Fläche F_I zwischen OO' und I hat den Wert $\frac{1}{e} \Sigma(x\eta) \cdot y$, d. h. sie stellt für $e = 1$ das Massenmoment des rechten Teiles der schraffierten Fläche für die Achse UV dar.

Die Fläche F_{II} zwischen OO' und II hat den Wert $\frac{1}{e^2} \Sigma(x\eta) \cdot y^2$, d. h. sie stellt für $e = 1$ das Trägheitsmoment des rechten Teiles der schraffierten Fläche für die Achse UV dar.

Man hat also neben $\Sigma(x\eta) \cdot y = eF_I$

$$\mathfrak{T}r = \Sigma(x\eta) y^2 = e^2 \cdot F_{II}.$$

Die Flächen F_I und F_{II} sind durch Planimeter auszuwerten.

Bei Anwendungen macht man von vornherein e gleich der Einheit des Maßstabes (z. B. 1 cm), wobei $\mathfrak{T}r = F_{II}$ wird.

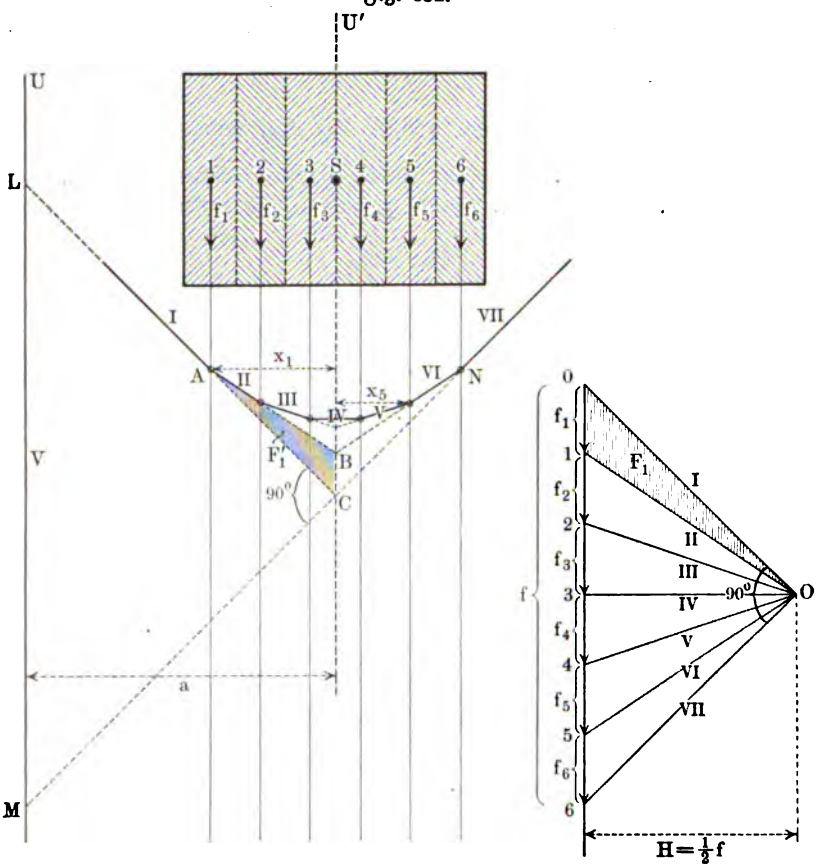
Die geradlinige Begrenzung OO' kann man natürlich auch auf anderem Wege herstellen, als hier angegeben. Vergl. dazu auch Fig. 261.

Die Methode von Mohr ist graphostatisch, sie liefert $\mathfrak{T}r$ zunächst für eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt als Produkt zweier Flächen.

Man zerlegt hier die Fläche, für welche Tr in Bezug auf die Achſe UV beſtimmt werden ſoll, in Streifen, parallel zu UV, und wendet auf dieſe zunächſt das graphoſtatiſche Verfahren zur Beſtimmung des Schwerpunktes der gegebenen Fläche einmal an. (Vergl. S. 449.)

Iſt dieſes durchgeführt, wie es Fig. 652 für die Fläche des Rechtecks angiebt, ſo beſtimmen die beiden Seiten I und II des Seilpolygons mit der

Fig. 652.



Schwerachſe $U'S$ ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck $O\,0\,1$ des Kräfteplans ähnlich iſt. Man hat für die entſprechenden Flächen

$$F_1 : F_1' = H^2 : x_1^2,$$

falls man die Höhen der Dreiecke bezw. aus O und A mit H und x_1 bezeichnet.

Demnach gilt

$$F_1 \,.\, x_1^2 = F_1' \,.\, H^2.$$

Da $\overline{0\,1} = f_1$ die erſte Teilfläche der gegebenen Fläche darſtellt, ſo iſt $F_1 x_1^2 = \frac{1}{2} f_1 \,.\, H \,.\, x_1^2$, d. h. man hat

$$f_1 \,.\, x_1^2 = 2\,H \,.\, F_1'.$$

Je schmaler die Parallelteilung genommen ist, um so genauer stellt $f_1 \cdot x_1^2$ das Trägheitsmoment der ersten Teilfläche der gegebenen Fläche dar, in Bezug auf die Schwerachse $U'S$, die zu UV parallel ist.

Geht man zu F_2 und F_2' über u. s. f., so bildet sich bei Addition der Ergebnisse

$$\Sigma f_p x_p^2 = 2H \cdot \Sigma F_p'.$$

Dabei stellt $\Sigma F_p'$ die Fläche F' dar, welche durch das Seilpolygon ANC gebildet wird, während $\Sigma f_p \cdot x_p^2$ das Trägheitsmoment der gegebenen Fläche für $U'S$ in beliebiger Annäherung darstellt.

Man hat also in beliebiger Annäherung

$$\mathfrak{Tr} = 2H \cdot F'.$$

Nimmt man $H = \frac{1}{2} f$, wobei $f = \Sigma f_p$ die gegebene Fläche darstellt, so ist also

$$\mathfrak{Tr} = f \cdot F'.$$

Gewöhnlich legt man den Pol O senkrecht über die Mitte von $\overline{0n}$, d. h. hier von $\overline{0\,6}$, so daß er auf einem Kreise um $\overline{0n}$ als Durchmesser liegt.

Für die Achse UV gilt dann weiter

$$\mathfrak{Tr}_{UV} = \mathfrak{Tr} + a^2 \cdot f = f(F' + a^2).$$

In Fig. 652 ist a^2 durch $\triangle CLM$ dargestellt, so daß $F' + a^2$ der ganzen Fläche $LANCM$ entspricht.

Mit Hülfe der graphischen Methoden lassen sich für eine beliebige ebene Fläche, die etwa als Querschnitt eines Stabes gegeben wird, der Schwerpunkt und ebenso die Trägheitsmomente für beliebige Achsen mit hinreichender Genauigkeit bestimmen.

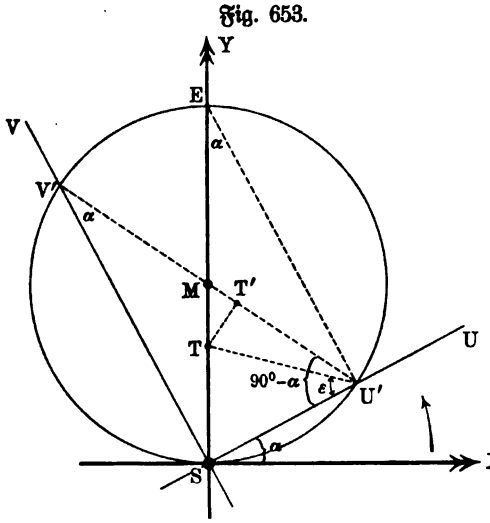
Da die Gleichung einer Trägheitsellipse für einen beliebigen Punkt P als Centrum von drei Größen abhängt, nämlich von den beiden Trägheitsmomenten für ein rechtwinkliges Kreuz durch P und von dem Deviationsmoment (Centrifugalmoment) des Kreuzes (vergl. S. 650), so ist auch in graphischer Hinsicht durch die Bestimmung dieser drei Größen zunächst für jede Achse durch P das Trägheitsmoment gegeben. Da für die graphische Bestimmung des Deviationsmomentes keine Methode bekannt ist, welche mit den einfachen Methoden für die graphische Bestimmung der Trägheitsmomente zu vergleichen wäre, so kann man die Bestimmung des Deviationsmomentes umgehen, indem man das Trägheitsmoment noch für eine dritte Achse durch P bestimmt. (Vergl. Formel Nr. 204.)

Bestimmt man $\mathfrak{Tr}$ für drei verschiedene Achsen durch einen beliebigen Punkt P, so erhält man durch Auftragen der Strecke $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}}}$, wo C eine beliebige Größe von der Dimension l^3 ist (vergl. S. 651), für jeden Wert von $\mathfrak{Tr}$ zwei gegenüberliegende Punkte einer bestimmten Trägheitsellipse vom Mittelpunkte P, deren weitere Ausführung dann auf rein konstruktivem Wege geschehen kann, einschließlich der Bestimmung der Hauptachsen u. s. w.

Wählt man den Schwerpunkt S als Punkt P, so gelangt man zu einer Centralellipse, für welche man die beiden Festpunkte C_1 und C_2 (vergl.

S. 659) konstruieren kann. Die Entfernung $SC_1 = SC_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi}{F}}$ kann als mittlere Proportionale aus $\frac{\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi}{K}$ und $\frac{K}{F}$ konstruiert werden, wobei K wieder eine beliebige Größe von der Dimension l^3 bezeichnet. Mit Hülfe der Festpunkte kann man leicht von der Centralellipse mit dem Centrum S zu einer beliebigen Ellipse mit dem Mittelpunkte P übergehen (vergl. S. 659), wozu noch bemerkt werden mag, daß die Hauptachsen für P die Symmetralen für die beiden Geraden PC_1 und PC_2 sind, falls man mit der Culmannschen Ellipse (vergl. S. 660) arbeitet. Für den Übergang von einer beliebigen Ellipse (P) mit den Brennpunkten F_1 und F_2 zur Centralellipse (S) gilt ebenso, daß die Hauptachsen durch S die Symmetralen der Brennstrahlen SF_1 und SF_2 sind, falls man auch hier mit der Culmannschen Ellipse arbeitet.

Fig. 653.



Alle diese Beziehungen werden in graphischer Hinsicht äußerst übersichtlich durch die folgenden, von Mohr und Land herrührenden Betrachtungen. Trägt man auf einer Achse des centralen Hauptkreuzes vom Schwerpunkt S aus eine Strecke SE auf, welche mit dem Werte des polaren Trägheitsmomentes $\mathfrak{Tr}_0 = \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y$ für S übereinstimmt, so heißt der Kreis, dessen Durchmesser SE ist, ein Trägheitskreis für S; es giebt natürlich vier solche Kreise. Teilt man SE durch Punkt T im Verhältnisse $ST : TE = \mathfrak{Tr}_x : \mathfrak{Tr}_y$, so heißt T der zugehörige Trägheitshauptpunkt (vergl. Fig. 653).

Für eine beliebige Achse SU stellt dann $U'T'$ das Trägheismoment dar, falls $U'T'$ die Projektion von $U'T$ auf den Durchmesser $U'M$ ist; ebenso stellt natürlich $V'T'$ das Trägheitsmoment dar für die Achse SV, die auf SU senkrecht steht. Außerdem stellt TT' das Deviationsmoment (Centrifugalmoment) dar [1]) für das Achsenkreuz USV.

Wir beweisen diese Beziehungen auf folgendem Wege. Bildet SU mit SX den Winkel α, so ist $\measuredangle SV'M = \alpha$ und $\measuredangle SU'T' = 90^0 - \alpha$. Man hat also, falls $\measuredangle TU'S$ durch ε bezeichnet wird,

[1]) Überhaupt bestimmt das Lot von T auf eine Sehne das Deviationsmoment für das (schiefe) Kreuz, welches durch S und die Endpunkte der Sehne geht, und deshalb bestimmen die Endpunkte jeder Sehne durch T mit S konjugierte Richtungen der Centralellipse, weil für solche das Deviationsmoment verschwindet.

$$U'T' = U'T \cdot \cos(90^0 - \alpha - \varepsilon) = U'T \cdot \sin(\alpha + \varepsilon)$$
$$= U'T \cdot \sin\alpha\cos\varepsilon + U'T \cdot \cos\alpha\sin\varepsilon.$$

Nach dem Sinussatze folgt ferner aus $\triangle U'TE$ und aus $\triangle U'TS$ bezw.

$$U'T \cdot \cos\varepsilon = TE \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad U'T \cdot \sin\varepsilon = TS \cdot \cos\alpha,$$

so daß

$$U'T' = TE \cdot \sin^2\alpha + TS \cdot \cos^2\alpha$$
$$= \mathfrak{Tr}_x \cdot \cos^2\alpha + \mathfrak{Tr}_y \cdot \sin^2\alpha$$

ist, also $\mathfrak{Tr}_\alpha$ darstellt (vergl. Formel Nr. 205).

Ebenso ist das Trägheitsmoment für SV, das mit SX den Winkel $90^0 + \alpha$ bildet, gegeben durch

$$V'T' = \mathfrak{Tr}_{90^0+\alpha} = \mathfrak{Tr}_x \cdot \sin^2\alpha + \mathfrak{Tr}_y \cdot \cos^2\alpha.$$

Ferner hat man

$$TT' = U'T \cdot \sin(90^0 - \alpha - \varepsilon) = U'T \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)$$
$$= U'T \cdot \cos\alpha\cos\varepsilon - U'T \cdot \sin\alpha\sin\varepsilon,$$

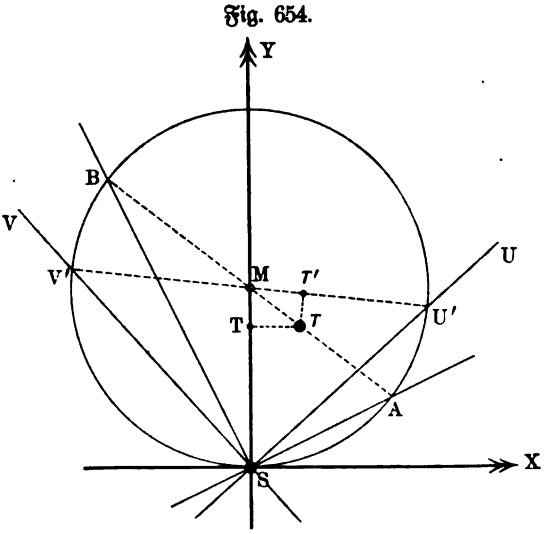
so daß

$$TT' = TE \cdot \cos\alpha\sin\alpha - TS \cdot \cos\alpha\sin\alpha = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_x - \mathfrak{Tr}_y)\sin 2\alpha$$

ist. Demnach stellt TT' das Deviationsmoment für das Kreuz USV dar (vergl. S. 654).

Man bemerkt leicht, daß sich die Konstruktion der Fig. 653 auch erweitern läßt, falls SX und SY zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt sind. Man hat hier in T senkrecht zu SY eine Strecke TT aufzutragen, welche dem Deviationsmomente D des Kreuzes XSY entspricht, und zwar so, daß der Sinn TT der positiven X-Achse entspricht, wenn D positiv ist, sonst umgekehrt.

Fig. 654.

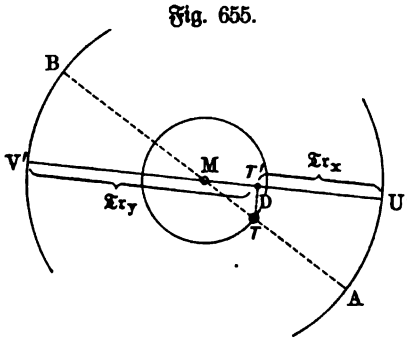


Benutzt man nun T in Fig. 654 statt T in Fig. 653 als Trägheitshauptpunkt, so läßt sich die Konstruktion der Fig. 653 auf Fig. 654 unmittelbar übertragen. Es ist jetzt $U'T'$ das Trägheitsmoment für die Achse SU, falls T' die Projektion von T auf den Durchmesser $U'M$ ist, ebenso $V'T'$ das Trägheitsmoment für die Achse SV, während TT' das Deviationsmoment für das Kreuz USV darstellt.

Hiermit sind nun die Mittel gegeben, durch die Bestimmung des Trägheitsmomentes für drei beliebige Achsen durch S alle anschließenden Aufgaben graphisch zu behandeln. Bestimmt man in Fig. 654 neben $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ auch noch das Trägheitsmoment für die Achse SU, so kann man diesem entsprechend die Strecke $U'T'$ auf dem Durchmesser abtragen und damit Punkt T gewinnen, also auch das durch TT' dargestellte Deviationsmoment für das Kreuz USV und das durch TT dargestellte Deviationsmoment für das Kreuz XSY. Ist T so gegeben, so lassen sich für jedes beliebige Achsenkreuz durch S leicht die Trägheitsmomente und die Deviationsmomente bestimmen [1]).

Um von T aus die Hauptachsen zu finden, hat man ein rechtwinkliges Kreuz durch S zu bestimmen, für welches das Deviationsmoment $TT' = 0$ ist, d. h. man hat den Durchmesser MT zu ziehen und dessen Schnittpunkte A und B mit S zu verbinden; es stellt dann AT das Trägheitsmoment für die Hauptachse SA und BT das Trägheitsmoment für die Hauptachse SB dar.

Fig. 655.



Um die erweiterte Konstruktion der Fig. 654 zu rechtfertigen, kann man auch auf die Invarianten der Drehung (vergl. S. 652) zurückgreifen, welche für zwei rechtwinklige Kreuze durch einen Punkt S gelten. Bezeichnet man für die Kreuze die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment durch $\mathfrak{Tr}_x$, $\mathfrak{Tr}_y$, D bezw. $\mathfrak{Tr}'_x$, $\mathfrak{Tr}'_y$, D', so gilt

$$1)\quad \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y = \mathfrak{Tr}'_x + \mathfrak{Tr}'_y$$

$$2)\quad \mathfrak{Tr}_x . \mathfrak{Tr}_y - D^2 = \mathfrak{Tr}'_x . \mathfrak{Tr}'_y - D'^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß die Summe der beiden Trägheitsmomente für jedes Kreuz denselben Wert hat, so daß sich diese Summe durch jeden Durchmesser eines bestimmten Kreises veranschaulichen läßt. Stellt $U'V'$ in Fig. 655 einen solchen Durchmesser dar, welcher durch T' in $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ zerlegt wird, so gilt für M als Mittelpunkt

$$MT' = MU' - U'T' = \frac{\mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y}{2} - \mathfrak{Tr}_x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_x).$$

Sucht man $\dfrac{\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_x}{2}$ aus Gleichung 1) und 2) herzustellen, so erhält man

$$3)\quad \left(\frac{\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_x}{2}\right)^2 + D^2 = \left(\frac{\mathfrak{Tr}'_y - \mathfrak{Tr}'_x}{2}\right)^2 + D'^2.$$

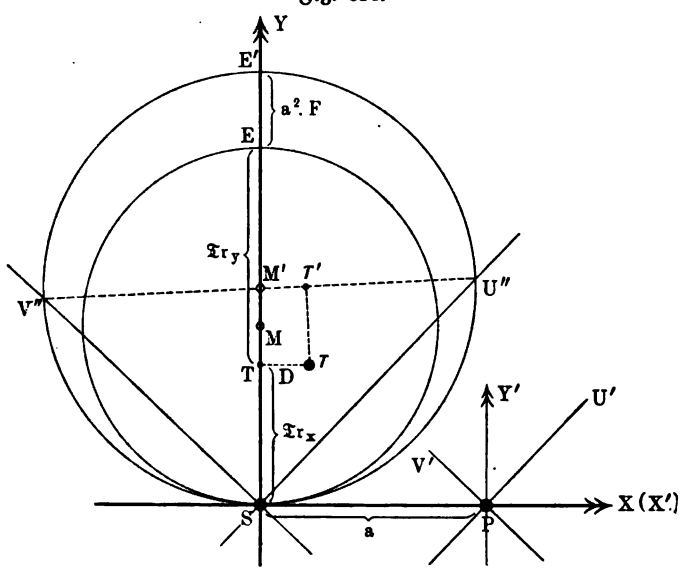
Trägt man also D in T' senkrecht zu $U'V'$ auf als $T'T$, so ist MT für alle Kreuze durch S eine Konstante. Legt man nun in T auf dem Durchmesser MT die Trägheitsmomente der Hauptachsen TA und TB aneinander, denen $D = 0$ entspricht, so bemerkt man, daß die Projektion T' von T auf einen beliebigen Durchmesser $U'V'$ diesen in $T'U' = \mathfrak{Tr}_x$ und $T'V' = \mathfrak{Tr}_y$ zerlegt, während $TT' = D$ ist. Damit ist die Konstruktion der Fig. 654 wieder erreicht.

[1]) Auch die Beziehung der Anmerkung auf S. 916 bleibt weiter bestehen.

Um von einem Kreuze durch S zu einem Kreuze durch einen beliebigen Punkt P überzugehen, nimmt man SP als X-Achse und ordnet ihr, senkrecht dazu, eine Y-Achse zu. Läßt man dann in Fig. 656 SE' dem Werte des polaren Trägheitsmomentes von P entsprechen, so hat man eine beliebige Achse durch P parallel nach S zu verlegen, für diese mit dem neuen Kreise vom Durchmesser SE' die Konstruktion durchzuführen, die bisher am Kreise vom Durchmesser SE durchgeführt wurde, um unmittelbar die gesuchten Werte für die Achse durch P zu erhalten.

Bezeichnet man die Größen $\mathfrak{Tr}_x$, $\mathfrak{Tr}_y$, $\mathfrak{Tr}_0$ und D für P durch $\mathfrak{Tr}'_x$, $\mathfrak{Tr}'_y$, $\mathfrak{Tr}'_0$ und D', so ist $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}'_x$, $\mathfrak{Tr}'_y = \mathfrak{Tr}_y + a^2 . F$, $\mathfrak{Tr}'_0 = \mathfrak{Tr}_0 + a^2 F$, $D = D'$, letzteres, weil PS Schwerachse ist (vergl. S. 658); infolgedessen haben ST und TT für S und P dieselbe Bedeutung, während TE durch TE' ersetzt erscheint.

Fig. 656.



Es mag noch bemerkt werden, daß bei den Fig. 653 und Fig. 654 zwar von dem Schwerpunkte S ausgegangen wurde, daß aber bei ihm statt S auch ein beliebiger Punkt P eintreten kann, ohne daß sich an dem Ergebnisse irgend etwas ändert.

Für die gangbaren Querschnitte der Konstruktionsglieder sind die vorstehenden Untersuchungen durchgeführt, so daß man ihre Ergebnisse aus den entsprechenden Tabellen entnehmen kann. In Bezug auf die Träger aus Walzeisen hat man sich in Deutschland über Querschnitte von bestimmten Abmessungen geeinigt, welche man als Normalprofile[1]) bezeichnet.

147. Das Moment der äußeren Kräfte und die Vertikalkraft für den Normalfall der Praxis. Um den Wert Mo des Momentes der äußeren

[1]) Vergl. „Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen", Aachen.

Kräfte für die beiden Gleichungen des § 145 zu bestimmen, hat man zunächst mit Hülfe des Systems der Belastungen des Balkens den Einfluß der Befestigung des Balkens durch Kräfte darzustellen, und die so gewonnenen Reaktionen bezw. Reaktionsmomente der Gruppe der gegebenen angreifenden Kräfte (Belastungen) hinzuzufügen.

Gelingt diese Bestimmung nicht mit Hülfe der gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen, so ist die Aufgabe statisch-unbestimmt (vergl. S. 472), sie wird aber lösbar, falls man die Formänderungsgleichung zu Hülfe nimmt.

Nachdem die Reaktionen den gegebenen Kräften hinzugefügt sind, geschieht die Bestimmung von *Mo* durch die Methode der Schnitte (vergl. S. 342), wobei zugleich für jeden Querschnitt eine bestimmte Vertikalkraft (Querkraft) oder Schubkraft $[V]$ gewonnen wird.

Obwohl die (vertikalen) Schubspannungen, welche der Vertikalkraft $[V]$ entsprechen, in der Theorie der Biegung zunächst nicht berücksichtigt werden, so ist es doch zweckmäßig, neben $[Mo]$ auch $[V]$ zu betrachten, weil die Beziehungen zwischen diesen beiden Größen gelegentlich auch für die Theorie der Biegung ausgenutzt werden können.

Dazu ist noch zu bemerken, daß man die Vorzeichen von *Mo* und *V* innerhalb der Biegungstheorie meist zu der Art der durch sie bewirkten Formänderung des Balkens in Beziehung zu setzen pflegt. Bezeichnet man Senkungen von Punkten der Balkenachse als positive Durchbiegungen und entsprechende Hebungen als negative Durchbiegungen, so ist es zweckmäßig, auch die nach unten gerichteten Kräfte als positiv und die nach oben gerichteten Kräfte als negativ anzusehen. Giebt man demgemäß auch der positiven Halbachse der senkrechten Koordinate (y) stets die Richtung von oben nach unten, so wird die Krümmung der Biegungslinie $y = f(x)$ durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$ folgendermaßen bestimmt: ein positiver Wert von $f''(x)$ weist darauf hin, daß ein unterhalb des Balkens stehender Beobachter in die Höhlung des gebogenen Balkens hineinschaut, während ein negativer Wert von $f''(x)$ dasselbe für einen oberhalb stehenden Beobachter anzeigt. Da nun $f''(x)$ nach der Formänderungsgleichung zu *Mo* proportional ist, so ist es ferner zweckmäßig, die Vorzeichen von *Mo* mit dem Vorzeichen von $f''(x)$ in Übereinstimmung zu halten, und demnach Momente als positiv anzusehen, wenn sie die wagerechte Achse des Balkens nach unten biegen, als negativ im umgekehrten Falle.

Da bei einem Freiträger mit Endbelastung ersteres der Fall ist, so pflegt man die, einem positiven Momente entsprechende Biegung auch kurz als Freiträgerbiegung zu bezeichnen.

Da einer Nullstelle des Momentes ($Mo = 0$) gemäß der Formänderungsgleichung der Wert $f''(x) = 0$ bezw. $\frac{1}{\varrho} = 0$ oder $\varrho = \infty$ entspricht, so hat die Biegungslinie im allgemeinen[1]) an einer Stelle, für

[1]) Ein Wendepunkt wird für die Stelle x durch $f''(x) = 0$ angezeigt, wenn $f'''(x)$ für diese Stelle von Null verschieden ist.

welche $Mo = 0$ ist, einen Übergang von einer Krümmung positiven Momentes zu einer Krümmung negativen Momentes, d. h. einen sogen. Wendepunkt (Inflexionspunkt).

Obige, von der allgemeinen Regel (Uhrzeigerbewegung gilt als positiv) abweichende Bestimmung des Vorzeichens für Mo fordert keine besondere Aufmerksamkeit, solange man $[Mo]$ lediglich auf der einen Seite (z. B. der linken) eines Schnittes durch den Balken betrachtet. Berücksichtigt man aber die Werte von $[Mo]$ auf beiden Seiten eines solchen Schnittes, so hat man dabei zu beachten, daß für den Schnitt selbst Gleichgewicht vorhanden ist und daß infolgedessen das Moment für die Schnittstelle, berechnet aus dem linken Balkenstücke, durch das, aus dem rechten Balkenstück gewonnene Moment stets aufgehoben wird.

Natürlich kann man die Hebungen der Balkenachse auch als positiv ansehen, und von dieser Festsetzung aus alle Vorzeichen umgekehrt bestimmen, als eben geschehen.

Die Bildung des Momentes für gegebene Fälle zeigt, daß Mo nur bei bestimmten Arten der Belastung für den ganzen Balken durch einen Rechnungsausdruck darstellbar ist, der als Funktion von x erscheint. Bei anderen Arten der Belastung gilt eine bestimmte Darstellung des Momentes nur für eine bestimmte Strecke der Balkenachse, und demgemäß erhält sowohl die Festigkeitsgleichung als auch die Formänderungsgleichung für bestimmte Strecken der Balkenachse je eine besondere Gestalt.

Um diese Beziehungen beurteilen zu können, müssen wir die Belastungen, welche in der Technik verwendet werden, etwas genauer betrachten.

Unter diesen Betrachtungen sind zunächst die sogen. Einzellasten (konzentrierte Lasten) hervorzuheben, welche unmittelbar durch Kräfte (Strecken) dargestellt werden können. Da jede Belastung durch Vermittelung einer Auflagerfläche, welche bei Verwendung von Schneiden u. s. w. allerdings eine sehr geringe Ausdehnung hat, auf den Balken wirkt, so bezeichnet die Einführung einer Einzellast stets eine gewisse Annäherung (vergl. S. 272). Infolgedessen darf man auch andere Arten der Belastung stets auf Einzellasten zurückführen, indem man die Achse des Balkens in gleiche Teile zerlegt, den Schwerpunkt der Belastung jedes Teiles aufsucht und die Belastungen als in diesen Schwerpunkten einwirkende Einzellasten ansieht.

Die Einteilung wird natürlich durch den Grad der nötigen Genauigkeit bedingt, und zwar ist dabei für die Praxis eine Einteilung der Balkenachse in Centimeter im allgemeinen ausreichend. Man wendet dieses Verfahren meist an, wenn für einzelne Strecken des Balkens besondere Belastungen (Streckenbelastung) in Rechnung zu stellen sind.

Für eine elementare Teilung der Achse gelangt man natürlich bei der Zurückführung auf Einzellasten zu strengen Ergebnissen.

Für die genauere Behandlung von Belastungen, welche nicht in Einzellasten bestehen, leistet die Einführung der Belastungslinie (vergl. S. 503) gute Dienste. Die Bedeutung dieser Linie (vergl. Fig. 657 a. f. S.) besteht darin, daß sie für jede (noch so kleine) Strecke $B_1 B_2 = \zeta$ der Balkenachse

Da sich $Q = z\gamma$ im Schwerpunkt C des Rechtecks über OS verdichtet, so ist das Moment von $[Q]$ für S gegeben als $+ Q \cdot \frac{z}{2} = + \frac{1}{2}\gamma \,.\, z^2$, so daß man für S hat

$$Mo = - R_1 z + \tfrac{1}{2}\gamma z^2.$$

Man bemerkt leicht, daß auch die Ableitung von Mo nach z den Wert von V liefert, während wiederum die Ableitung von $V = - R_1 + Q$ mit der Ableitung von Q übereinstimmt und also γ giebt.

Fig. 660 a.

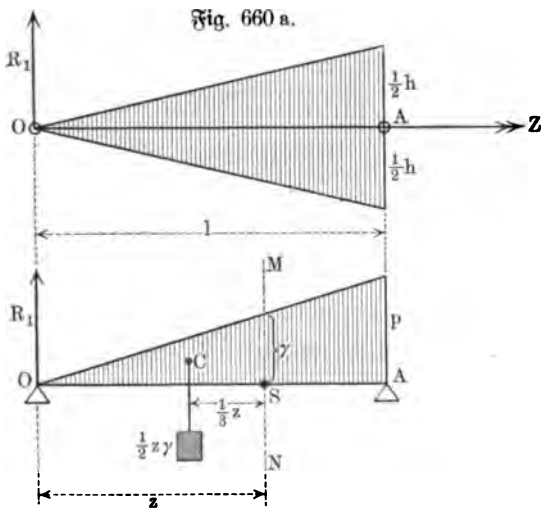


Fig. 660 b.

Wir betrachten ferner noch die sogen. Dreiecksbelastung, bei welcher die Belastung von dem einen Ende des Balkens aus, von Null an, proportional zu z zunimmt; sie entspricht z. B. dem Eigengewichte eines geraden dreiseitigen Prismas aus homogenem Materiale, dessen Mittelschnitt in Fig. 660 a bei horizontaler Lagerung der Achse dargestellt ist. Bei einer Dicke d und bei einem specifischen Gewichte σ ist dessen Gewicht $\frac{1}{2}hld \,.\, \sigma$.

Fig. 660 b stellt für diesen Fall die Belastung der Achse dar. Es ist für OS gegeben $Q = \frac{1}{2}z\gamma$ bei $\gamma = p \cdot \frac{z}{l}$, d. h. man hat $Q = \frac{1}{2}\frac{p}{l} \cdot z^2$. Für die Länge l erhält man $Q = \frac{1}{2}pl = \frac{1}{2}hld\sigma$, so daß $p = hd\sigma$ zu setzen ist.

Aus $Q = \frac{1}{2}\frac{p}{l} \cdot z^2 = \varphi(z)$ folgt $\varphi'(z) = \frac{p}{l} \cdot z = \gamma$ und man hat ferner $V = - R_1 + \frac{1}{2}\frac{p}{l} \cdot z^2$.

Da sich $Q = \frac{1}{2}\frac{p}{l} \cdot z^2$ im Schwerpunkte C des Dreiecks über OS verdichtet, so ist das Moment von $[Q]$ für S gegeben als $+ Q \cdot \frac{z}{3} = + \frac{1}{6}\frac{p}{l} \cdot z^3$, so daß man für S hat

$$Mo = - R_1 z + \tfrac{1}{6}\frac{p}{l} \cdot z^3.$$

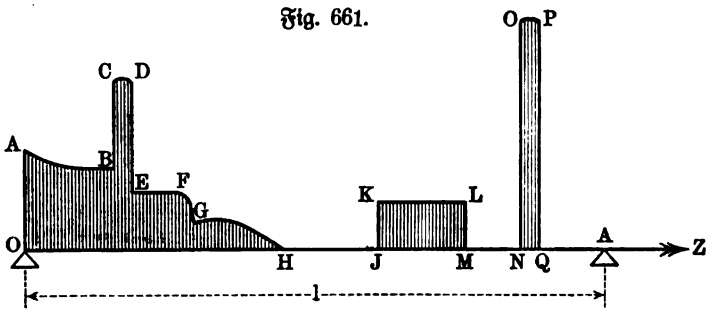
Man hat wieder V als Ableitung von Mo gegeben, während die Ableitung von V wiederum γ liefert.

Die Gleichungen $V = E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, f'''(z)$ und $\gamma = E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, f^{\mathrm{IV}}(z)$ gelten für den prismatischen Balken, der durch sein eigenes Gewicht gleichmäßig belastet

ist, sie gelten aber nicht für das, durch sein Eigengewicht belastete dreiseitige Prisma (Veränderlichkeit von Tr). Für die ganze letzte Betrachtung haben sie nur Gültigkeit, wenn OZ die Achse eines prismatischen Balkens (Konstanz von Tr) ist, der außerdem eine Dreieckslast trägt.

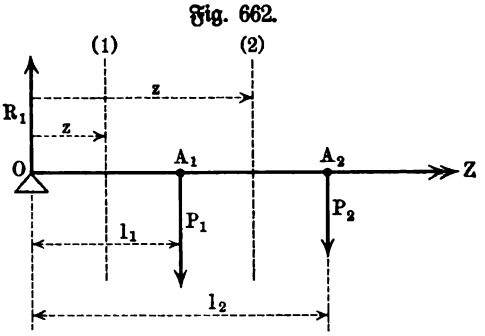
Die vorstehenden Untersuchungen gelten für jede Strecke des Balkens, welche stetig belastet ist, gemäß folgender Festsetzung:

Fig. 661.



Solange der Unterschied zweier Ordinaten B_1B_1' und B_2B_2' der Belastungslinie, welche den Abstand ξ voneinander haben, für $lim\,\xi = 0$ verschwindet, bezeichnet man die Belastung als stetig[1]), vorausgesetzt, daß nicht neben der Belastung, welche durch die Belastungslinie dargestellt wird, noch Einzellasten in Frage kommen. Unstetigkeiten der Belastung entsprechen also entweder Einzellasten oder einer sprungweise vor sich gehenden Änderung der Ordinaten der Belastungslinie, wie sie Fig. 661 für den Übergang von AB nach BC, von DE nach EF, von FG nach GH, von HJ nach JK u. s. w. darstellt; dabei bildet eine Unstetigkeit, wie sie $BCDE$ oder $NOPQ$ bezeichnet, den Übergang zu der Unstetigkeit von Einzellasten.

Fig. 662.



Wir betrachten zunächst die Unstetigkeiten, welche Einzellasten entsprechen, gemäß Fig. 662. Für den Schnitt 1 ist $V = -R_1$, für den Schnitt 2 ist dagegen $V = -R_1 + P_1$ u. s. w., d. h. V behält den Wert $-R_1$ für die Strecke OA_1 bei, nimmt dann sprungweise den Wert $-R_1 + P_1$ an und behält diesen für die Strecke A_1A_2 bei u. s. w.

Für den Schnitt 1 ist $Mo = -R_1 z$, für den Schnitt 2 ist dagegen $Mo = -R_1 z + P_1(z - l_1)$ u. s. w., d. h. Mo wird für die Strecke

[1]) Auf den Begriff der Stetigkeit einer Linie hier näher einzugehen, liegt keine Veranlassung vor.

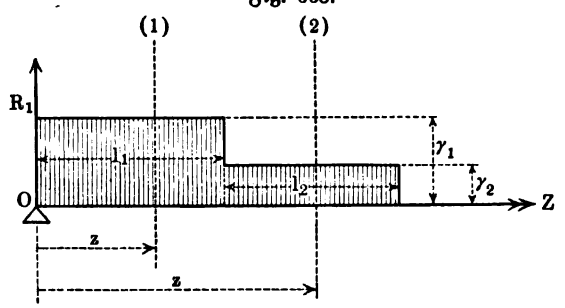
OA_1 durch eine andere Funktion von z dargestellt, als für die Strecke A_1A_2 u. s. w.

Die Unstetigkeiten, welche einer endlichen Änderung der Ordinaten der Belastungslinie entsprechen, lassen sich alle, so mannigfache Formen sie auch annehmen können, durch das Beispiel der Fig. 663 erläutern, in welcher einer gleichmäßigen Belastung (γ_1) der Strecke l_1 eine andere gleichmäßige Belastung (γ_2) der Strecke l_2 folgt.

Für den Schnitt 1 ist hier $V = -R_1 + z\gamma_1$, dagegen für den Schnitt 2 hat man $V = -R_1 + l_1\gamma_1 + (z - l_1)\gamma_2$.

Für den Schnitt 1 ist $Mo = -R_1 z + \frac{1}{2}\gamma_1 z^2$, dagegen für den Schnitt 2 hat man $Mo = -R_1 z + l_1\gamma_1(z - \frac{1}{2}l_1) + \frac{1}{2}(z - l_1)^2\gamma_2$.

Fig. 663.



Man sieht, daß die abgeleiteten Beziehungen innerhalb der Strecken der Achse, welche durch Unstetigkeitspunkte getrennt werden, bestehen bleiben, für diese Grenzpunkte selbst aber ihre Bedeutung verlieren.

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß gerade die Unstetigkeitsstellen von $[V]$ für die Theorie der Biegung eine große Bedeutung haben.

148. Die Verwertung der Festigkeitsgleichung und der Formänderungsgleichung für den Normalfall der Praxis. Die Festigkeitsgleichung

$$Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$$

gestattet die Spannung σ_w in der äußersten Faserschicht für jede Stelle (a) des Balkens zu bestimmen, falls für diese Stelle das Moment der äußeren Kräfte Mo und die Querschnittszahl $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gegeben sind.

Da das Maximum von σ_w höchstens die zulässige Spannung k erreichen darf, so muß dieses Maximum bestimmt werden.

Bei dem prismatischen Balken hat $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für jede Stelle denselben Wert, so daß hier σ_w zu Mo proportional ist, und demnach hier die Stelle, für welche Mo sein Maximum Mo_{max} erreicht, zugleich die Stelle ist, für welche σ_w sein Maximum erreicht.

Bei Ausnutzung des Materials gilt demnach für den prismatischen Balken

$$Mo_{max} = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 312)$$

Bei Balken von veränderlichem Querschnitte muß das Maximum von $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}$ bestimmt werden, so daß hier

$$\left(\frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}\right)_{max} = k \quad \ldots \ldots \ldots \quad 313)$$

zu setzen ist.

Man kann diese Maximalbestimmungen auf zeichnerischem Wege ausführen, indem man in jedem Punkte der Balkenachse Mo bezw. $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}$ als Ordinate aufträgt und die Maxima bezw. Minima der damit gewonnenen Linien aufsucht.

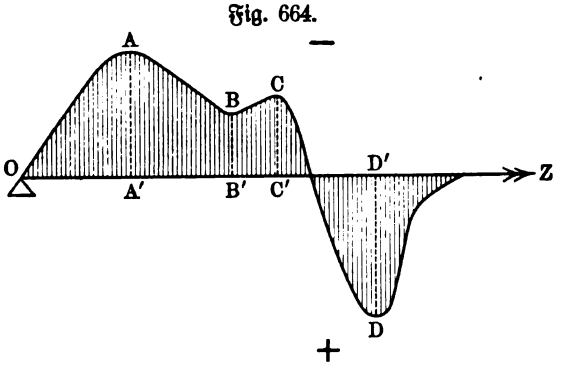
Dabei leisten auch die graphostatischen Konstruktionen (vergl. S. 367 u. f.) gute Dienste.

Die eingeführten Linien werden bezw. als „Momentenlinie“ und als „verzerrte Momentenlinie“ bezeichnet, entsprechend werden auch die zugehörigen Flächen benannt.

Natürlich handelt es sich in beiden Fällen um die Bestimmung des maximalen Zahlenwertes von Mo bezw. $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}$, da die Vorzeichen von Mo lediglich dessen Drehungssinn bezw. die Art der Biegung angeben.

Sind mehrere Maxima des Zahlenwertes vorhanden, so hat man unter diesen (relative Maxima) den größten (absolutes Maximum) aufzusuchen, um ihn für die Festigkeitsgleichung zu verwenden. Stellt z. B. die Linie der Fig. 664 die Momentenlinie für einen Balken dar, so bezeichnen AA', BB', CC' und DD' relative Maxima des Zahlenwertes von Mo; unter ihnen ist DD' das absolute Maximum, welches für die Festigkeitsgleichung zu verwenden ist.

Fig. 664.



Um das Maximum von Mo auf rechnerischem Wege zu bestimmen, hat man vor allem zu beachten, daß ein bestimmter Rechnungsausdruck für Mo im allgemeinen nur für eine bestimmte Strecke der Achse des Balkens gilt, innerhalb welcher keine Unstetigkeitsstellen der Belastung liegen.

Läßt sich Mo für jede Strecke der Balkenachse, welche zwischen zwei Unstetigkeitsstellen der Belastung liegt, durch je einen Rechnungsausdruck darstellen, der als Funktion von x erscheint, so hat man für jede dieser Funktionen innerhalb des Bereiches ihrer Gültigkeit die Maximal- und Minimalstellen zu bestimmen und außerdem die Werte des Momentes für die Unstetigkeitsstellen festzustellen.

Hat *Mo* als Funktion von *z* eine Ableitung, so zeigt deren Annullierung bekanntlich die Stellen an, an welchen Maxima oder Minima von *Mo* liegen können. Scheidet man unter diesen Stellen die aus, welche nicht innerhalb der Strecke liegen, für welche die Darstellung von *Mo* gilt, so ist für jede der übrigen des weiteren zu untersuchen bezw. zu erschließen, ob ihr wirklich ein Maximum des Zahlenwertes von *Mo* entspricht, ganz abgesehen von dessen Vorzeichen.

Die Werte von *Mo* für die so gefundenen (relativen) Maximalstellen und die Werte von *Mo* für die Unstetigkeitsstellen hat man dann zu einer Gruppe von Werten zusammenzufassen, innerhalb welcher schließlich das absolute Maximum von *Mo* zu bestimmen ist.

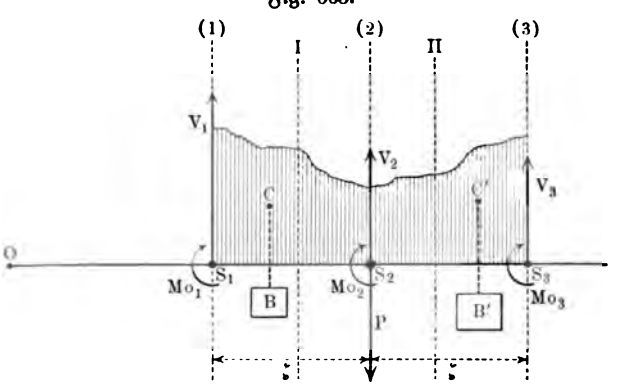
Diese Untersuchung, deren Umständlichkeit mit der Anzahl der Unstetigkeitsstellen der Belastung wächst, läßt sich meist sehr erheblich vereinfachen, wenn man neben dem Momente *Mo* noch die Vertikalkraft *V* berechnet.

Da gemäß S. 923 innerhalb einer Strecke, für welche *Mo* durch eine ableitbare Funktion von *z* dargestellt wird, die Vertikalkraft als Ableitung von *Mo* erscheint, so kann man innerhalb dieser Strecke die Maximal- und Minimalstellen von *Mo* auch durch die einfachere Gleichung $V = 0$ finden.

Es ist nun von besonderer Wichtigkeit, daß die Gleichung $V = 0$ auch für eine Strecke des Balkens, welche Unstetigkeiten der Belastung enthält, die Stellen anzeigt, an denen Maxima oder Minima von *Mo* liegen können, falls man einen Sprung von positiven Werten der Vertikalkraft [*V*] zu negativen Werten oder umgekehrt als eine Nullstelle von *V* ansieht.

Um dies zu beweisen, greifen wir ein Gebiet der Balkenachse heraus, für welches [*Mo*] sein Vorzeichen nicht wechselt. Liegt in diesem ein Maximum Mo_{max} des Zahlenwertes von *Mo*, so sind die Werte von [*Mo*] in einer gewissen Umgebung links und rechts von der Maximalstelle alle kleiner oder alle größer als Mo_{max}. Bezeichnet man mit Mo_1 einen Wert des Gebietes, das links von Mo_{max} liegt, und mit Mo_3 einen Wert des Gebietes, das rechts von Mo_{max} liegt, so haben also die beiden Größen

Fig. 665.



$$Mo_{max} - Mo_1 \quad \text{und} \quad Mo_{max} - Mo_3$$

stets dasselbe Vorzeichen.

Wir betrachten nun in einem Gebiete, in dem [*Mo*] sein Vorzeichen nicht

wechselt, drei Schnitte gleichen Abstandes 1, 2, 3, von denen der mittlere mit einer Unstetigkeitsstelle der Belastung, dargestellt durch die Einzelkraft $[P]$, zusammenfallen kann, während wir für die anderen beiden voraussetzen, daß sie mit keiner Unstetigkeitsstelle der Belastung zusammenfallen (Fig. 665). Zwischen S_1 und S_2 und zwischen S_2 und S_3 lassen wir ganz beliebige Belastungen zu, und zwar mag sich die Gesamtbelastung B für die Strecke S_1S_2 in C und die Gesamtbelastung B' für die Strecke S_2S_3 in C' verdichten. Haben C von 2 und C' von 3 bezw. die Abstände $\frac{1}{n}\xi$ und $\frac{1}{n'}\xi$, so gilt neben $V_2 = V_1 - B - P$

$$Mo_2 = Mo_1 + V_1\xi - \frac{B}{n}\cdot\xi$$

und

$$Mo_3 = Mo_2 + V_2\xi - \frac{B'}{n'}\cdot\xi = Mo_2 + V_1\xi - B\xi - P\xi - \frac{B'}{n'}\cdot\xi.$$

Daraus folgt

$$Mo_2 - Mo_1 = +\xi\left(V_1 - \frac{B}{n}\right) \text{ und } Mo_2 - Mo_3 = -\xi\left(V_1 - B - P - \frac{B'}{n'}\right).$$

Für $V_1 - \frac{B}{n} = V_I$ und $V_1 - B - P - \frac{B'}{n'} = V_{II}$ hat man also

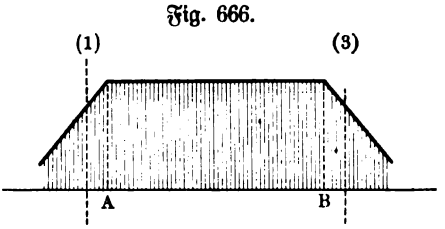
$$Mo_2 - Mo_1 = +\xi\,.\,V_I \quad \text{und} \quad Mo_2 - Mo_3 = -\xi\,.\,V_{II}.$$

Haben nun die Werte $Mo_2 - Mo_1$ und $Mo_2 - Mo_3$ dasselbe Vorzeichen, so haben auch $+V_I$ und $-V_{II}$ dasselbe Vorzeichen, d. h. V_I und V_{II} sind entgegengesetzte Größen.

Bei stetiger Belastung von S_1S_2 und von S_2S_3 bezeichnet V_I eine Vertikalkraft zwischen 1 und 2, und V_{II} eine Vertikalkraft zwischen 2 und 3 so daß $[V]$ in diesem Falle zwischen den entsprechenden Stellen I und II der Fig. 665 sein Vorzeichen wechseln muß.

Bei unstetiger Belastung von S_1S_2 und S_2S_3 können die Übergänge von $[V_1]$ zu $[V_2]$ bezw. von $[V_2]$ zu $[V_3]$ erfolgen, ohne daß $[V]$ dabei die Werte V_I bezw. V_{II} annimmt; in diesem Falle tritt statt der Stellen I bezw. II eine der zunächst gelegenen Unstetigkeitsstellen der Belastung ein. Demnach gilt der Satz: Wenn in einem Gebiete, in dem $[Mo]$ sein Vorzeichen nicht wechselt, für drei aufeinander folgende Schnitte 1, 2, 3 die Größen

Fig. 666.



$$Mo_2 - Mo_1 \quad \text{und} \quad Mo_2 - Mo_3$$

dasselbe Vorzeichen haben, so wechselt $[V]$ zwischen den äußeren Schnitten 1 und 3 mindestens einmal sein Vorzeichen.

Läßt man nun den Schnitt 2 mit einer Stelle zusammenfallen, für welche der Zahlenwert von $[Mo]$ ein Maximum (oder Minimum) hat, so kann man im allgemeinen links und rechts in unendlich-kleiner Entfernung vom Schnitt 2 Schnitte 1 und 3 legen, für welche

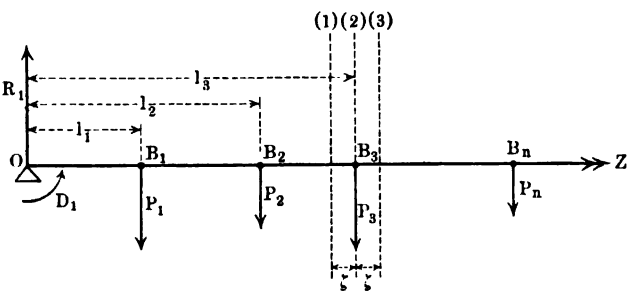
$$Mo_2 - Mo_1 \quad \text{und} \quad Mo_2 - Mo_3$$

dasselbe Vorzeichen haben und zwischen denen also $[V]$ sein Vorzeichen wechseln muß.

Eine besondere Betrachtung fordert nur der durch Fig. 666 (a. v. S.) dargestellte Fall, in welchem Mo für die Strecke AB einen konstanten Wert hat, während die Werte von Mo links und rechts von AB beide Male kleiner werden. Hier zeigt die oben gegebene Betrachtung, daß $[V]$ für alle Schnitte zwischen A und B den Wert Null hat, so daß $[V]$ für A und B verschiedene Vorzeichen erhält.

Bei einem prismatischen Balken zeigt hier die Festigkeitsgleichung $Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$, daß für die schubfreie Strecke AB die Spannung σ_w eine Konstante ist, die Formänderungsgleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E \,.\, \mathfrak{T}r}$ ebenso, daß ϱ für AB eine Konstante und die Biegungslinie für AB also ein Kreisbogen ist.

Fig. 667.



Sehen wir von dem Sonderfalle der Fig. 666 ab, so gilt also der Satz: An jeder Maximalstelle oder Minimalstelle von Mo wechselt $[V]$ sein Vorzeichen.

Es läßt sich nun auch umgekehrt zeigen, daß an einer solchen Wechselstelle für $[V]$, die in erweitertem Sinne auch noch als Nullstelle bezeichnet werden kann, bei den in der Technik üblichen Belastungen auch wirklich ein Maximum oder Minimum von Mo vorhanden ist.

Wir führen den Beweis zunächst für Einzellasten (vergl. Fig. 667) und erinnern dabei daran, daß sich jede Art der Belastung in beliebiger Annäherung (vergl. S. 921) durch Einzellasten darstellen läßt.

Da $[V]$ zwischen je zwei Einzellasten einen konstanten Wert hat, so kann eine Wechselstelle von $[V]$ nur mit einem Belastungspunkte B_n zusammenfallen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $[V]$ wirklich den Wert Null annimmt oder von positiven Werten zu negativen bezw. umgekehrt springt. Im ersten Falle behält $[V]$ den Wert Null bis zur nächsten Belastungsstelle B_{n+1}; im zweiten Falle kann man sich den Belastungspunkt B_n durch zwei unendlich-nahe Belastungspunkte B_n' und B_n'' ersetzt denken, deren erster einen Teil P_n' von P_n und deren zweiter die Belastung

$P_n'' = P - P_n'$ trägt und zwar so, daß $[V]$ durch Berücksichtigung von P_n'' zu Null wird.

Die Allgemeinheit des Beweises leidet nicht, wenn wir annehmen, daß z. B. B_3 in Fig. 667 eine Wechselstelle von $[V]$ ist. Es ist dann entweder $R_1 - P_1 - P_2 - P_3 = 0$ oder es haben $R_1 - P_1 - P_2$ und $R_1 - P_1 - P_2 - P_3$ entgegengesetztes Vorzeichen. Der Wert Mo_2 des Momentes für B_3 bestimmt sich als

$$Mo_2 = D_1 - R_1 l_3 + (l_3 - l_1) P_1 + (l_3 - l_2) P_2.$$

Für eine Stelle 1, die innerhalb $B_2 B_3$ um ζ vor B_3 liegt, gilt

$$Mo_1 = D_1 - R_1 (l_3 - \zeta) + (l_3 - l_1 - \zeta) P_1 + (l_3 - l_2 - \zeta) P_2$$
$$= Mo_2 + \zeta (R_1 - P_1 - P_2).$$

Für eine Stelle 3, die innerhalb $B_3 B_4$ um ζ hinter B_3 liegt, gilt

$$Mo_3 = D_1 - R_1 (l_3 + \zeta) + (l_3 - l_1 + \zeta) P_1 + (l_3 - l_2 + \zeta) P_2 + P_3 . \zeta$$
$$= Mo_2 + \zeta (P_1 + P_2 + P_3 - R_1).$$

Ist $R_1 = P_1 + P_2 + P_3$, so ist $Mo_3 = Mo_2$, d. h. Mo_2 bleibt von B_3 an bis B_4 konstant, so daß der Sonderfall der Fig. 666 vorliegt.

Haben $R_1 - P_1 - P_2$ und $R_1 - P_1 - P_2 - P_3$ entgegengesetztes Vorzeichen, so haben

$$Mo_1 - Mo_2 \quad \text{und} \quad Mo_3 - Mo_2$$

dasselbe Vorzeichen.

Um den Beweis für **beliebige Belastungen** zu führen, ziehen wir die Gleichungen auf S. 929 heran, entsprechend Fig. 665. Diese Gleichungen

$$Mo_2 - Mo_1 = +\zeta . V_I \quad \text{und} \quad Mo_2 - Mo_3 = -\zeta . V_{II}$$

zeigen unmittelbar den gesuchten Zusammenhang zwischen der Wechselstelle für $[V]$ und der Maximal- oder Minimalstelle von $[Mo]$.

Fig. 668 a.

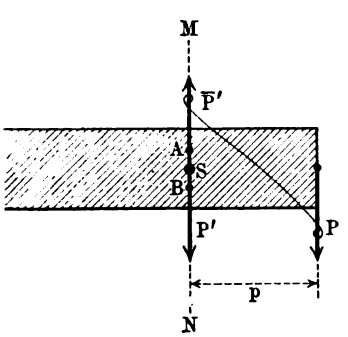
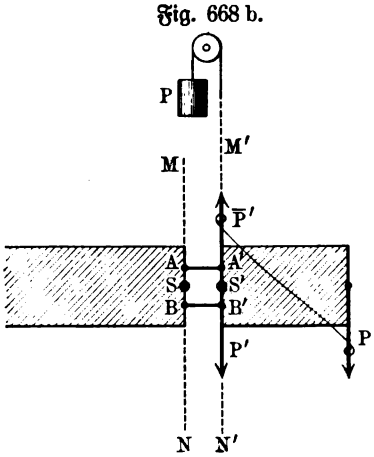


Fig. 668 b.

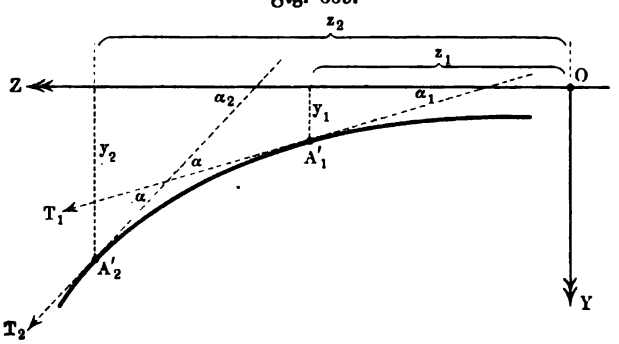


Neben den Maximal- und Minimalstellen von Mo haben auch die **Nullstellen von** Mo eine besondere Bedeutung, da an ihnen gemäß der Festigkeitsgleichung $\sigma = 0$ ist. Diese Stellen, für welche die Biegungs-

linie im allgemeinen einen Wendepunkt (vergl. S. 920) zeigt, sind also frei von Biegungsspannungen; ein thatsächlich im Materiale ausgeführter Schnitt an einer solchen Stelle (im Querschnitt) zerstört keine Biegungsspannungen und infolgedessen sind in solchen Schnitten für die Herstellung des Gleichgewichtes keine Momente anzubringen, wohl aber im allgemeinen Schubkräfte. Im Gegensatz dazu sind an den Maximal- und Minimalstellen von Mo, wenn für sie $V = 0$ ist, keine Schubkräfte anzubringen.

Verdichtet sich der Zug für den Balken der Fig. 668 a (a. v. S.) in A und der Druck in B, so können bei einem wirklich ausgeführten Schnitte (vergl. Fig. 668 b a. v. S.) zwei eingelenkte Stangen AA' und BB' die Verbindung herstellen, soweit das Moment $[Pp]$ in Frage kommt, während außerdem noch die Schubkraft $[P']$ etwa durch ein, über eine Rolle geführtes Gewichtsstück $[P]$ zu überwinden ist. Für Stellen, an denen $V = 0$ ist, sind nur die eingelenkten Stangen erforderlich, für Stellen, an denen $Mo = 0$ ist, ist nur das Gewichtsstück $[P]$ nötig, um den wirklich ausgeführten Schnitt unschädlich zu machen.

Fig. 669.

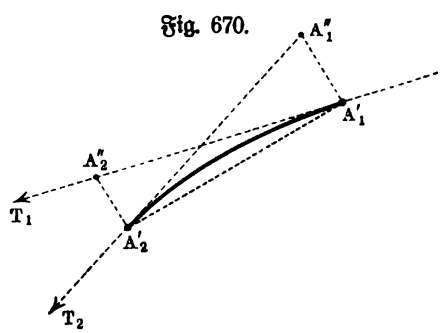


Die angenäherte Formänderungsgleichung

$$E \cdot \mathfrak{T}r \cdot f''(z) = Mo$$

dient zur Bestimmung der Gleichung der Biegungslinie $y = f(z)$, wenn Mo als Funktion von z gegeben ist und ebenso $\mathfrak{T}r$ für jede Stelle des Balkens bekannt ist. Vergl. S. 899.

Fig. 670.



Geht eine (endliche) Strecke A_1A_2 der Balkenachse bei der Biegung in die Kurve $A_1'A_2'$ über, so bestimmen (vergl. Fig. 669) die Tangenten der Kurve in A_1' und A_2' einen Winkel α, welcher die Winkelabweichung des gebogenen Stückes $A_1'A_2'$ gegenüber der Strecke A_1A_2 darstellt.

Gehört $A_1'A_2'$ einer Kurve an, deren Gleichung $y = f(z)$ ist, so ist

$$tng\,\alpha_1 = f'(z_1) \quad \text{und} \quad tng\,\alpha_2 = f'(z_2)$$

und demnach gilt für $tng\,\alpha \sim arc\,\alpha$

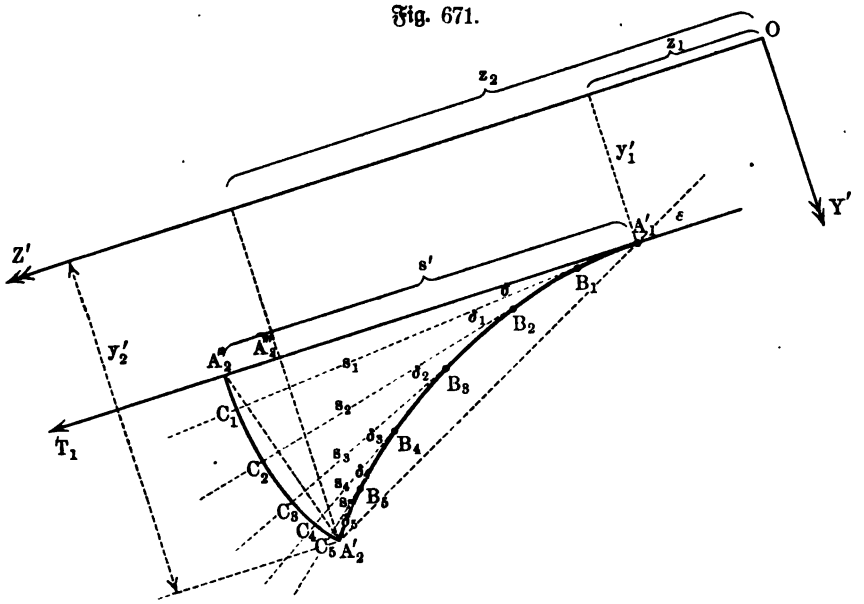
$$tng\,\alpha = tng\,(\alpha_2 - \alpha_1) \sim f'(z_2) - f'(z_1).$$

Nimmt man also die Balkenachse als Z-Achse, so stellt die Gleichung der gebogenen Mittellinie des Stabes (Biegungslinie) $y = f(z)$ mittels ihrer Ableitungen $tng\,\alpha_1 = f'(z_1)$ und $tng\,\alpha_2 = f'(z_2)$ angenähert die Winkelabweichung α für ein beliebiges Stück $A_1'A_2'$ der Biegungslinie dar, gemäß der Beziehung

$$arc\,\alpha \sim tng\,\alpha = f'(z_2) - f'(z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 314)$$

Trägt man (vergl. Fig. 670) auf der Tangente von A_1' eine Strecke $A_1'A_2''$ von der Länge s' des Kurvenstückes $A_1'A_2'$ auf, so stellt die Strecke $A_2'A_2''$ die lineare Abweichung von A_2' gegen A_1' dar, welche der Biegung von A_1A_2 entspricht. Ebenso stellt $A_1'A_1''$ die lineare Abweichung von A_1' gegen A_2' dar, welche derselben Biegung entspricht.

Fig. 671.



Verfolgt man den Vorgang der Biegung gemäß Fig. 671 etwas näher, so erscheint $A_2'A_2''$ als Sehne der Kurve $A_2''C_1C_2 \ldots A_2'$, welche als Evolvente zur Kurve $A_1'A_2'$ als Evolute gehört. Man hat

$$A_2''C_1C_2 \ldots A_2' = s' \,.\, arc\,\delta + s_1 \,.\, arc\,\delta_1 + s_2 \,.\, arc\,\delta_2 + \cdots$$

und dieser Ausdruck stellt innerhalb der hier angeführten Annäherung auch die Sehne $A_1'A_2''$ dar, welche die lineare Abweichung von A_2' gegen A_1' mißt.

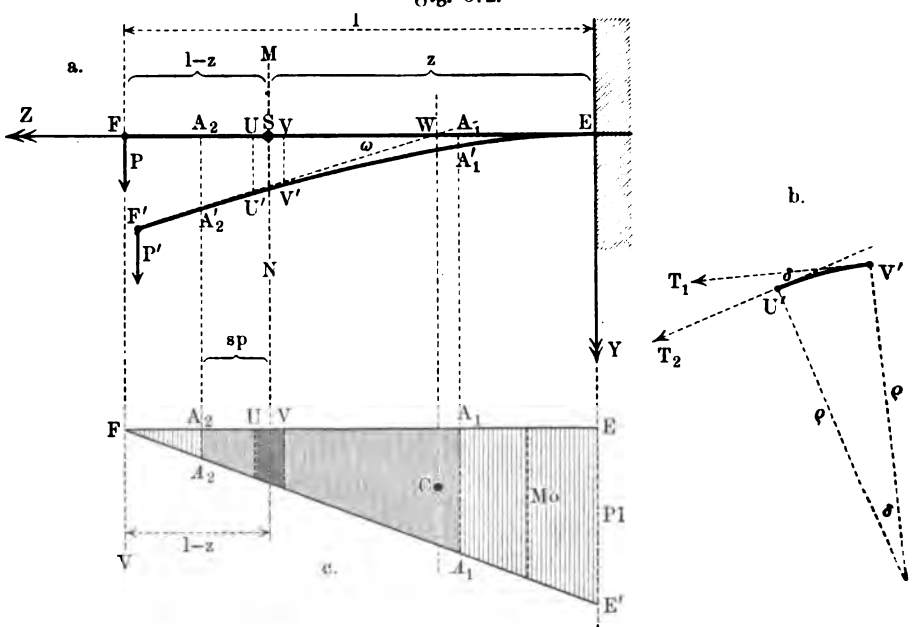
Bezeichnet man den Winkel $T_1A_1'A_2'$, der stets kleiner als α in Fig. 669 ist, durch ε, so ist die Sehne $A_2'A_2'' \sim 2s' \,.\, sin\frac{\varepsilon}{2}$, weil $\triangle\, A_2''A_1'A_2'$ über $A_2''A_2'$ als gleichschenklig zu betrachten ist, und es gilt auch $A_2'A_2'' \sim s' \,.\, arc\,\varepsilon$. Da das Lot $A_2'A_2'''$ von A_2' auf $A_1'T_1$ durch $s' \,.\, sin\,\varepsilon \sim s' \,.\, arc\,\varepsilon$ gegeben ist, so ist auch die Einführung von $A_2'A_2'''$ statt der Sehne $A_2'A_2''$ erlaubt.

Gehört $A_1' A_2'$ einer Kurve an, deren Gleichung $y' = f(z')$ ist für eine, zur Tangente $A_1' T_1$ parallele Z'-Achse, so ist $y_1' = f(z_1')$ und $y_2' = f(z_2')$ und man hat

$$A_2' A_2''' = f(z_2') - f(z_1').$$

Geht man also von einem Punkte A_1' der Biegungslinie aus, in welchem die Tangente zu der ursprünglichen, als Z-Achse eingeführten Balkenachse parallel ist, so stellt die Gleichung der Biegungslinie $y = f(z)$ vermittelst der Senkungen oder Hebungen $y_1 = f(z_1)$ und $y_2 = f(z_2)$, welche als

Fig. 672.



Durchbiegungen bezeichnet werden, angenähert die lineare Abweichung von A_2' gegen A_1' für ein beliebiges Stück $A_1' A_2'$ der Biegungslinie dar, gemäß der Beziehung

$$f(z_2) - f(z_1) = s' \,.\, arc\,\delta + s_1 \,.\, arc\,\delta_1 + s_2 \,.\, arc\,\delta_2 + \cdots \qquad 315)$$

Man kann auch von der genauen Formänderungsgleichung

$$\varrho = \frac{E\mathfrak{T}}{Mo}$$

ausgehen und Winkelabweichung und lineare Abweichung auf folgendem Wege zunächst graphisch und dann rechnerisch bestimmen.

Wenn ein Element der Balkenachse (vergl. Fig. 672 a) bei der Biegung in $U'V'$ übergeht, so ist gemäß Fig. 672 b

$$\varrho \,.\, arc\,\delta = U'V'$$

und also

$$arc\,\delta = \frac{U'V'}{\varrho} = \frac{U'V' \,.\, Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Zieht man in U' und V' die Tangenten, so bilden diese gleichfalls den Winkel δ, welcher also die, der Biegung von UV entsprechende Winkelabweichung darstellt. Bestimmt man diese für eine endliche Strecke A_1A_2 der Achse von Element zu Element, so stellt

$$\Sigma\, arc\,\delta = \frac{1}{E}\Sigma\frac{U'V' \,.\, Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

die Winkelabweichung dar, welche der Biegung der betrachteten Strecke entspricht.

Bei der Annäherung, welche allen diesen Betrachtungen zu Grunde liegt (vergl. S. 897), darf man statt $U'V'$ die Projektion UV auf die ursprüngliche Balkenachse einführen.

Trägt man beim prismatischen Balken, für welchen $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ eine Konstante ist, für jede Stelle (z) der Achse, senkrecht zu dieser den zugehörigen Wert von Mo als Ordinate auf, so stellt $UV \,.\, Mo \sim U'V' \,.\, Mo$ einen Streifen der so gebildeten Momentenfläche (vergl. Fig. 672 c) dar und demgemäß beträgt für die Strecke A_1A_2 die Winkelabweichung

$$\Sigma\, arc\,\delta = \frac{1}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot F^{(2)}_{(1)},$$

falls die Fläche $A_1A_2A_2A_1$ über A_1A_2 durch $F^{(2)}_{(1)}$ bezeichnet wird.

Ist der Balken nicht prismatisch, so muß man für jede Stelle (z) der Achse $\frac{Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ als Ordinate auftragen, wobei sich

$$\Sigma\, arc\,\delta = \frac{1}{E} \cdot F^{(2)}_{(1)}$$

mit Hülfe der verzerrten Momentenfläche als Winkelabweichung für die Strecke A_1A_2 ergiebt.

Stellt Fig. 672 einen, bei E eingespannten prismatischen Balken dar, der am freien Ende F eine Belastung $[P]$ trägt, so wächst das Moment für Schnitte von F nach E proportional zur Entfernung des Schnittes vom freien Ende von 0 bis Pl und wird also durch FE' in Fig. 672 c dargestellt; es ist $Mo = P(l - z)$ für S. Die Winkelabweichung ω für die Strecke FE, welche durch die Tangenten in E und in F gegeben wird, ist also durch $\triangle\, FEE'$ bestimmt, d. h. es ist

$$arc\,\omega\,^{1}) = \frac{1}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \frac{(Pl) \,.\, l}{2} = \tfrac{1}{2}\frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Ebenso ist diese Abweichung für die Strecke $EA_1 = z_1$ bestimmt durch das Trapez EA_1A_1E', d. h. sie ist

$$\frac{1}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left[\frac{Pl^2}{2} - \frac{P(l - z_1)^2}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{P}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}(2lz_1 - z_1^2),$$

[1]) Bei Benutzung der Gleichung für $f''(z)$ erhält man $tng\,\omega = \tfrac{1}{2}\frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$.

während sie für die Strecke $EA_2 = z_2$ den entsprechenden Wert für z_2 hat u. s. w. Von E bis zum Schnittpunkte S bei MN beträgt diese Abweichung

$$\tfrac{1}{2}\frac{P}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}(2lz - z^2).$$

Da $f'(z)$ für $E = (0; 0)$ den Wert Null hat, weil die Tangente in E horizontal ist, so ist für die Strecke ES gemäß Gleichung Nr. 314)

$$f'(z) - f'(0) = f'(z) - 0 = \tfrac{1}{2}\frac{P}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}(2lz - z^2),$$

d. h. die Ableitung von $y = f(z)$ ist damit gegeben.

Durch die eingeführte graphische Darstellung ist auch die lineare Abweichung von A_2' gegen A_1' für die Biegung von A_1A_2 bestimmt.

In Gleichung Nr. 315) bedeuten s', s_1, s_2, ... die Abstände der einzelnen Elemente der Kurven $A_1'A_2'$ vom Ende A_2', so daß für ein Element $U'V'$ vom Abstande s_p anzusetzen ist

$$s_p \,.\, arc\,\delta = \frac{s_p \,.\, U'V' \,.\, Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Ersetzt man s_p und $U'V'$ bezw. durch ihre Projektion s_p und UV auf die Balkenachse, so stellt der Ausdruck $\bar{s}_p \,.\, (UV \,.\, Mo)$ für den prismatischen Balken (vergl. Fig. 672c) das Massenmoment des Flächenstreifens über UV für die Gerade A_2A_2 dar, so daß

$$s' \,.\, arc\,\delta + s_1 \,.\, arc\,\delta_1 + s_2 \,.\, arc\,\delta_2 + \cdots$$

das Massenmoment der Fläche $F_{(1)}^{(2)}$ für die Gerade A_2A_2 darstellt (abgesehen von der Konstanten $E\mathfrak{T}\mathfrak{r}$). Hat der Schwerpunkt der Fläche $F_{(1)}^{(2)}$ von A_2A_2 den Abstand $\bar{s}_2$, so ist also die lineare Abweichung von A_2' gegen A_1' für die Biegung von A_1A_2 gegeben durch

$$\frac{\bar{s}_2 \,.\, F_{(1)}^{(2)}}{E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Ebenso stellt $\frac{\bar{s}_1 \,.\, F_{(1)}^{(2)}}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ die lineare Abweichung von A_1' gegen A_2' für die Biegung von A_1A_2 dar, falls der Schwerpunkt von $F_{(1)}^{(2)}$ von A_1A_1 den Abstand s_1 hat. Ist der Balken nicht prismatisch, so muß wieder $\frac{Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ graphisch dargestellt werden.

Wir führen die Betrachtung für einen prismatischen Balken, gemäß Fig. 672, noch etwas weiter. Für das Trapez, welches in Fig. 672c durch EE' und den Schnitt MN gebildet wird, ist der Abstand des Schwerpunktes von FF gegeben als $\frac{2}{3} \cdot \frac{l^3 - (l-z)^3}{l^2 - (l-z)^2}$, also von MN bestimmt durch $\frac{2}{3}\frac{l^3 - (l-z)^3}{l^2 - (l-z)^2} - (l-z) = \frac{3lz - z^2}{3(2l - z)}$, während das Trapez die Fläche $\frac{P}{2}(2lz - z^2)$ hat. Demnach ist das Massenmoment, welches die lineare

Abweichung für die Strecke von E bis zur Stelle des Schnittes MN gegen E darstellt, nach Einführung der Konstante $E \cdot \mathfrak{T}r$

$$\frac{3lz - z^2}{3(2l - z)} \cdot \frac{P}{2}(2lz - z^2) \cdot \frac{1}{E\mathfrak{T}r} = \frac{1}{6}\frac{P}{E\mathfrak{T}r}(3lz^2 - z^3).$$

Da die Tangente in E mit der Z-Achse übereinstimmt, und da überdies $y = f(z)$ für $E = (0; 0)$ den Wert Null hat, so ist gemäß Gleichung Nr. 315)

$$f(z) - f(0) = f(z) - 0 = \frac{1}{6}\frac{P}{E\mathfrak{T}r} \cdot (3lz^2 - z^3),$$

d. h.

$$f(z) = \frac{1}{6}\frac{P}{E\mathfrak{T}r}(3lz^2 - z^3)$$

ist die Gleichung der Biegungslinie.

Für das freie Ende F ist $z = l$ und also die lineare Abweichung gegen E bestimmt als

$$\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Trapezes von EE' ist $\frac{3lz - 2z^2}{3(2l - z)}$, so daß die Abweichung für die Strecke von E bis zur Stelle des Schnittes MN gegen die Schnittstelle durch

$$\frac{1}{6}\frac{P}{E\mathfrak{T}r}(3lz^2 - 2z^3)$$

dargestellt wird. Legte man an der Schnittstelle S eine Tangente und dächte man diese zur Kurve SE gebogen, so würde der gewonnene Ausdruck hierbei die lineare Abweichung von E gegen S darstellen; für $z = l$ ergiebt sich

$$\frac{1}{6}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r},$$

d. h. die Abweichung von E gegen F beträgt nur die Hälfte der Abweichung von F gegen E, entsprechend der starken Krümmung des Stabes bei E und seiner sich verlierenden Krümmung bei F gemäß $\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Tangente in F' die Achse in einem Punkte W schneidet (vergl. Fig. 672 a), welcher von E denselben Abstand hat, den der Schwerpunkt der ganzen Momentenfläche (vergl. Fig. 672 c) von EE' hat, also $\frac{2}{3}l$.

Da nämlich die Durchbiegung für F' den Wert $\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$ hat, so ist

$tng\,\omega = \frac{1}{2}\frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}r} = \frac{\frac{1}{3}Pl^3}{E\mathfrak{T}r} : FW$ und $FW = \frac{2}{3}l$.

Allgemein ist beim prismatischen Balken

$E\mathfrak{T}r \cdot \Sigma\, arc\,\delta = F^{(2)}_{(1)}$ und $E\mathfrak{T}r(s' \cdot arc\,\delta + s_1\, arc\,\delta_1 + \cdots) = s_2 \cdot F^{(2)}_{(1)}$,

also

$$\bar{s}_2 = \frac{s' \cdot arc\,\delta + s_1\, arc\,\delta_1 + \cdots}{\Sigma\, arc\,\delta} = \frac{\text{Lineare Abweichung von } A'_2 \text{ gegen } A'_1}{\text{Winkelabweichung für } A'_1A'_2} \quad 316)$$

Da die Biegungslinie meist aus mehreren Stücken besteht, weil Mo im allgemeinen für verschiedene Strecken des Balkens durch verschiedene Ausdrücke gegeben ist, so bedarf der Anschluß der einzelnen Stücke noch einer Bemerkung.

Da Mo für jede Stelle des Balkens nur einen Wert hat, so gilt dasselbe für $\varrho = \frac{E\mathfrak{T}}{Mo}$ und demnach haben zwei Stücke der Biegungslinie an der Stelle, wo sie aneinander schließen, einen Krümmungsradius ϱ, d. h. die Stücke setzen sich tangential aneinander an.

Eine Ausnahme könnte nur für $\varrho = 0$ eintreten, da diesem Falle eine Spitze der Kurve entspricht; da aber $\varrho = 0$ den Wert $Mo = \infty$ fordert, falls E und $\mathfrak{T}$ endlich sind, so tritt diese Ausnahme hier nicht ein.

In Bezug auf die beiden betrachteten Gleichungen für σ und für $\frac{1}{\varrho}$ ist noch darauf hinzuweisen, daß Mo im allgemeinen für jede Stelle des Balkens, den einzelnen Belastungen entsprechend, aus mehreren Gliedern besteht und demnach meist die Form

$$Mo = Mo_1 + Mo_2 + \cdots Mo_n$$

hat.

Schreiben wir die betrachteten Gleichungen in der Form

$$\sigma = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Mo = \frac{w}{\mathfrak{T}} (Mo_1 + Mo_2 + \cdots Mo_n)$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = f''(z) = \frac{1}{E\mathfrak{T}} \cdot Mo = \frac{1}{E\mathfrak{T}} (Mo_1 + Mo_2 + \cdots Mo_n),$$

so sieht man, daß dem Principe der Übereinanderlagerung (vergl. S. 836) hier eine ausreichende Begründung gegeben werden kann.

Denkt man sich nämlich für die einzelnen Belastungen, durch welche bezw. Mo_1, Mo_2, ... Mo_n bestimmt werden, die Spannungen σ_1, σ_2, ... σ_n berechnet, so ist

$$\sigma_1 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Mo_1, \quad \sigma_2 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Mo_2, \quad \ldots \quad \sigma_n = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Mo_n$$

und

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_n,$$

d. h. die Spannung σ kann gebildet werden durch Übereinanderlagerung der Spannungen σ_1, σ_2, ... σ_n, welche den einzelnen gegebenen Belastungen entsprechen.

Denkt man sich ebenso die Biegungslinie $y = f(z)$ bestimmt, indem man

$$f_1''(z) = \frac{1}{E\mathfrak{T}} \cdot Mo_1, \quad f_2''(z) = \frac{1}{E\mathfrak{T}} \cdot Mo_2, \quad \ldots \quad f_n''(z) = \frac{1}{E\mathfrak{T}} \cdot Mo_n$$

setzt, so lehrt [1]) die eben durchgeführte graphische Betrachtung (Fläche für Mo und deren Massenmoment), daß auch

[1]) Es folgt auch aus der Art der Gleichung $f''(z) = \Sigma Mo_p$ bei rechnerischem Übergange zu $f'(z)$ und $f(z)$.

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots f_n(z)$$

ist, d. h. die Durchbiegung $y = f(z)$ kann gebildet werden durch Übereinanderlagerung der Durchbiegungen $y_1 = f_1(z)$, $y_2 = f_2(z)$, ... $y_n = f_n(z)$, welche den einzelnen gegebenen Belastungen entsprechen.

Wenn man also an einer bestimmten Stelle des Balkens Spannung und Durchbiegung für jede einzelne der n Belastungen gesondert berechnet, so erhält man durch Vereinigung der n so gefundenen Werte die Größen σ und $y = f(z)$ an der betreffenden Stelle des Balkens.

Dasselbe gilt auch für die Winkelabweichungen, da hier $tng\,\alpha \sim arc\,\alpha$ ist.

Da Tr und w für eine bestimmte Stelle des Balkens stets je einen bestimmten Wert haben, so gilt obige Betrachtung für prismatische Balken und für Balken mit veränderlichem Querschnitt.

Wir gehen nun dazu über, gemäß unserer Betrachtungen die oben (vergl. S. 901) bezeichneten vier Fälle der einfachen Befestigung unter Voraussetzung einer geraden Belastung (Normalfall der Praxis) zu behandeln.

149. Der prismatische Freiträger (erster Fall der einfachen Befestigung). Der Stab ist nur an dem einen Ende E eingeklemmt (eingespannt), d. h. so befestigt, daß seine Achse in E vor und nach der Biegung in derselben Richtung austritt.

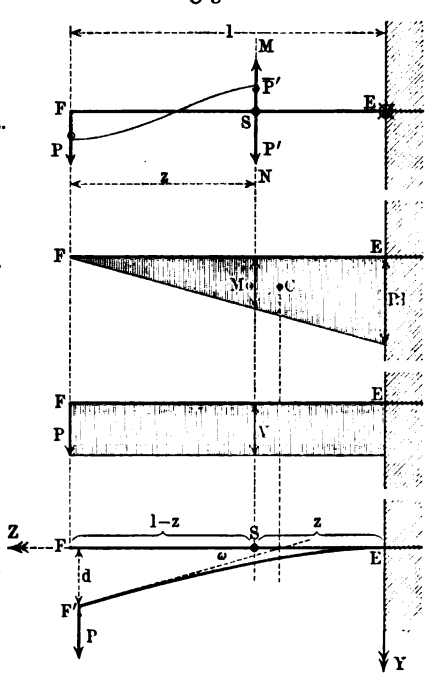
a) Belastung des wagerechten Trägers durch eine Einzellast am freien Ende (Endbelastung). In Fig. 673 stellt EF die Achse des Trägers dar, während $[P]$ in F die Belastung bezeichnet. Für einen Schnitt MN, der die Achse in S trifft, hat das Moment der äußeren Kräfte, welche hier nur durch die eine Kraft $[P]$ dargestellt werden, den Wert $P \cdot z$.

Wandert der Schnitt von F bis E, so geht z stetig von 0 in l und demnach ebenso Mo von 0 in $P \cdot l$ über, d. h. für $z = l$ oder an der Stelle E hat Mo sein Maximum vom Werte $P \cdot l$.

Der Querschnitt von E ist also der gefährliche Querschnitt (vgl. die Marke der Fig. 672 a), in welchem die Zerstörung des Materiales zu erwarten ist, falls der Träger zu schwach konstruiert ist, und zwar gilt für ihn

$$Mo_{max} = P \cdot l.$$

Fig. 673.



Trägt man in jedem Punkte von FE den zugehörigen Wert von Mo als Ordinate auf, so entsteht die Momentenlinie (bezw. Momentenfläche) der Fig. 673 b (a. v. S.), durch welche der Verlauf von Mo mit seinem Maximum in E veranschaulicht wird.

Da die Richtung der Vertikalen abwärts als positiv angesetzt ist, so liegt die Momentenfläche, der positiven Freiträgerbiegung entsprechend (vergl. S. 920), unterhalb der Achse.

Fügt man im Punkte S der Fig. 673 a die Kräfte $[P']$ und $[\overline{P'}]$ vom Werte P zu, so sieht man, daß jedem Punkte S neben dem Momente aus $[\overline{P'}]$ und $[P]$ vom Werte $P \,.\, z$ die Vertikalkraft $[P']$ entspricht, welche mit $[P]$ nach Wert und Richtung übereinstimmt; ihre Veranschaulichung giebt Fig. 673 c. Um die Abmessungen des Trägers zu bestimmen, welche für ein bestimmtes $[P]$ zulässig sind, hat man die Festigkeitsgleichung $Mo = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ für Mo_{max} und, bei Ausnutzung des Materiales, für $\sigma = k$ zu benutzen. Es ist also hier für die sogen. Dimensionierung gegeben:

$$P \,.\, l = k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 317)$$

Um diese Gleichung auszuwerten, hat man noch über die Form des Querschnittes Bestimmung zu treffen.

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Radius r, so ist $\mathfrak{Tr} = \frac{1}{4} r^4 \pi$ und $w = r$, so daß $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{1}{4} r^3 \pi$ ist, d. h. man hat dann

$$P \,.\, l = k \,.\, \tfrac{1}{4} r^3 \pi.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Tragkraft P bei gegebenen Abmessungen l und r für ein bestimmtes Material (k) bestimmen, ebenso r bei gegebenen P und l u. s. w.

Ist der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten b und h, so muß der Balken für den Normalfall der Praxis so gelagert werden, daß h oder b die vertikale Richtung einnimmt. Im ersten Falle ist $\mathfrak{Tr} = \frac{1}{12} b h^3$ und $w = \frac{h}{2}$, so daß $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{1}{6} b h^2$ ist, d. h. man hat dann

$$P \,.\, l = k \,.\, \tfrac{1}{6} b h^2.$$

In der Praxis pflegt man das Verhältnis von $b : h = \mu$ durch anderweitige Überlegungen festzustellen, so daß $b = \mu h$ gesetzt werden darf; es ist dann

$$P \,.\, l = k \cdot \frac{\mu}{6} h^3.$$

Daraus folgen z. B.

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\,Pl}{k \,.\, \mu}} \quad \text{und} \quad b = \mu h,$$

falls P und l gegeben sind, als zulässige Werte für h und b.

Um die Durchbiegung des Trägers zu bestimmen, welche für ein bestimmtes $[P]$ eintritt, hat man die Formänderungsgleichung, d. h. $Mo = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f''(z)$ zu benutzen.

Um diese zu entwickeln, ist es zweckmäßig, in E ein Koordinatenkreuz einzuführen, wie es Fig. 673 d zeigt, so daß $ES = z$ und $SF = l - z$ für den Schnitt MN ist. Man hat dann $Mo = P(l - z)$ und

$$P(l - z) = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f''(z).$$

Zur Ableitung $f''(z)$ gehört $f'(z)$ als Stammfunktion, und man erhält durch Übergang von der Ableitung zum Stamm (vergl. S. 899)

$$P(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + C = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f'(z).$$

Um die Konstante C zu bestimmen, sucht man einen Punkt des Balkens auf, für den $f'(z)$ bekannt ist. Da dieses die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Kurve $y = f(z)$ gegen die Z-Achse darstellt, so ist Punkt E hervorzuheben, weil hier der Voraussetzung gemäß (Einklemmung!) die Balkenachse bei der Biegung ihre Richtung nicht ändert und demnach hier $f'(z) = 0$ ist. Da E dem Ansatze $z = 0$ entspricht, so ist $f'(z) = 0$ für $z = 0$, d. h. unsere Gleichung wird

$$0 + C = 0.$$

Da die Konstante C für $z = 0$ den Wert Null hat, so ist überhaupt $C = 0$, d. h. man hat (vergl. S. 936)

$$P(lz - \tfrac{1}{2}z^2) = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f'(z).$$

Zur Ableitung $f'(z)$ gehört $f(z)$ als Stammfunktion, und man erhält durch Übergang von der Ableitung zum Stamm (vergl. S. 899) ferner

$$P(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + C' = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f(z).$$

Der Punkt E liefert wieder die Mittel für die Bestimmung von C'; da in E keine Senkung y eintreten kann, so ist hier $y = f(z) = 0$, d. h. es ist hier $f(z) = 0$ für $z = 0$. Man hat also

$$0 + C' = 0.$$

Da die Konstante C' für $z = 0$ den Wert Null hat, so ist überhaupt $C' = 0$, d. h. man hat

$$P(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3)' = E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f(z).$$

Die Gleichung der Biegungslinie ist also hier (vergl. S. 937)

$$y = f(z) = \frac{P}{E \,.\, \mathfrak{Tr}}(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3)$$

und demnach ist diese Linie eine Kurve dritter Ordnung, deren Gestalt Fig. 673 d veranschaulicht.

Durch Betrachtung von $f(z)$ oder von deren graphischer Darstellung findet man, daß y sein Maximum für $z = l$ hat, es ist also

$$y_{max} = d = \frac{P}{E \,.\, \mathfrak{Tr}}(\tfrac{1}{2}l \,.\, l^2 - \tfrac{1}{6}l^3) = \tfrac{1}{3}\frac{P \,.\, l^3}{E \,.\, \mathfrak{Tr}} \quad \cdot \cdot \quad 318\,\text{a})$$

die größte Durchbiegung des Trägers und zwar liegt diese am freien Ende des Trägers. Des weiteren findet man, daß auch $f'(z)$ sein Maximum für $z = l$ hat, d. h. auch die größte Winkelabweichung tritt für das freie Ende des Trägers ein, sie ist bestimmt durch

$$f'_{max}(z) = tng\,\omega = \frac{P}{E.\mathfrak{T}}(l\,.\,l - \tfrac{1}{2}l^2) = \tfrac{1}{2}\frac{Pl^2}{E.\mathfrak{T}} \quad \cdot\cdot \quad 318\,b)$$

In Fig. 673 d ist y_{max} durch d bezeichnet, während $f'_{max}(z)$ durch $tng\,\omega$ veranschaulicht wird. Vergl. dazu auch S. 936 und 937.

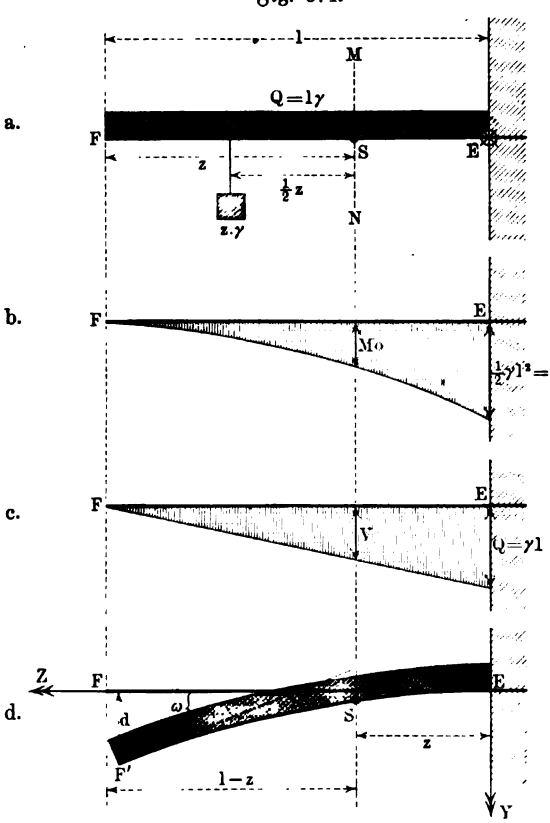
Da sich für einen Schnitt durch E ein Moment vom Werte $P\,.\,l$ und eine Vertikalkraft vom Werte P ergiebt, so leistet die Einklemmung bei E ein Doppeltes, sie hebt einerseits das Moment auf und anderseits die Vertikalkraft (vergl. S. 90).

Bei Benutzung der Skizzen Fig. 673 b und c ist, unter Berücksichtigung der Bedeutung der Einklemmung, zu beachten, daß das Moment in E von Pl auf den Wert Null und daß die Vertikalkraft in E von P auf den Wert Null springt.

Natürlich läßt sich die Untersuchung auch durchführen, unter Benutzung des rechts gelegenen Trägerstückes, nachdem der statische Einfluß der Einklemmung (Moment vom Werte Pl und Vertikalkraft vom Werte P) festgestellt ist.

b) Gleichmäßige Belastung des wagerechten Trägers. In Fig. 674 stellt EF die Achse des Trägers dar, während das schraffierte Rechteck die gleichmäßige Belastung andeutet, die γ kg für den laufenden Meter, also $Q = l\,.\,\gamma$ für den Träger von der Länge l betragen mag.

Fig. 674.



Für einen Schnitt MN, welcher die Achse in S trifft, ist das Moment der äußeren Kräfte, welches durch die gleichmäßige Belastung der Strecke z dargestellt werden, gegeben als $(z\gamma)\frac{z}{2}$, da sich die gleichmäßige Belastung in ihrem Schwerpunkte verdichtet. Man hat also hier $Mo = \frac{1}{2}\gamma z^2$. Wandert der Schnitt von F bis E, so geht z stetig von 0 in l und Mo ebenso von 0 in $\frac{1}{2}\gamma l^2$ über, so daß das Maximum für Mo bei $z = l$, d. h. an der Stelle E eintritt.

Der Querschnitt von E ist also der gefähr-

liche Querschnitt (vergl. die Marke der Fig. 674 a), und es gilt für ihn

$$Mo_{max} = \tfrac{1}{2}\gamma l^2 = \tfrac{1}{2} Ql.$$

Trägt man in jedem Punkte von FE den Wert von Mo als Ordinate auf, so erhält man eine Parabel mit dem Scheitel F als Momentenlinie (vergl. Fig. 674 b). Durch Fig. 674 c werden wieder die Vertikalkräfte dargestellt.

Die Festigkeitsgleichung giebt hier

$$\tfrac{1}{2} Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 319)$$

Für den Kreis (r) als Querschnitt lautet sie

$$\tfrac{1}{2} Ql = k \,.\, \tfrac{1}{4} r^3 \pi,$$

für das Rechteck (b und h) mit vertikaler Stellung von h

$$\tfrac{1}{2} Ql = k \,.\, \tfrac{1}{6} b h^2$$

bezw. für $b = \mu h$

$$\tfrac{1}{2} Ql = k \cdot \frac{\mu}{6} h^3.$$

Die Formänderungsgleichung lautet hier, gemäß Fig. 674 d,

$$\tfrac{1}{2}\gamma (l - z)^2 = E \,.\, \mathfrak{T}r \,.\, f''(z)$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\gamma (l^2 - 2lz + z^2) = E \,.\, \mathfrak{T}r \,.\, f''(z).$$

Daraus folgt

$$\tfrac{1}{2}\gamma (l^2 z - l z^2 + \tfrac{1}{3} z^3) = E \,.\, \mathfrak{T}r \,.\, f'(z)$$

und

$$\tfrac{1}{2}\gamma (\tfrac{1}{2} l^2 z^2 - \tfrac{1}{3} l z^3 + \tfrac{1}{12} z^4) = E \,.\, \mathfrak{T}r \,.\, f(z).$$

Man hat wieder für $z = l$ die Maxima von $f'(z)$ und $f(z)$ und es ist

$$f'_{max}(z) = tng\, \omega = \tfrac{1}{6} \frac{Ql^2}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \quad \text{und} \quad y_{max} = d = \tfrac{1}{8} \frac{Ql^3}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \,. \quad 320)$$

Die Bedeutung der Einklemmung ergiebt sich wie im Falle a).

c) Belastung gemäß a) und b). Die Behandlung gemäß a) oder b) führt ebenso wie die allgemeine Überlegung auf S. 938 zu dem Ergebnisse, daß die thatsächlichen Werte für c) durch Vereinigung der für a) und b) gegebenen Werte gefunden werden (Princip der Übereinanderlagerung).

Es bleibt E gefährlich, und ebenso ist

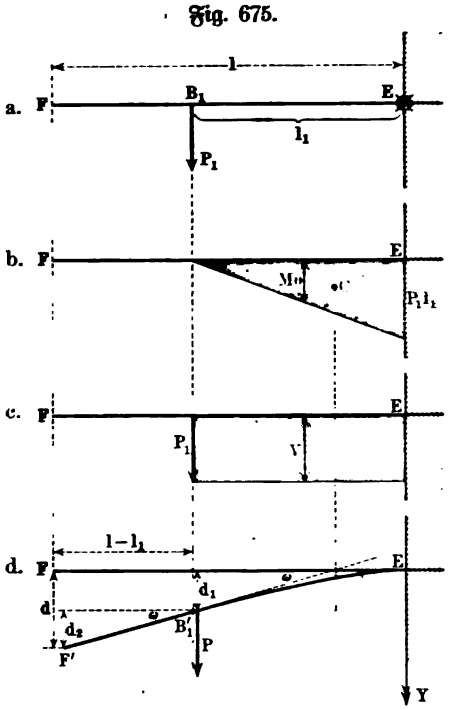
$$\left.\begin{aligned} Mo_{max} &= Pl + \tfrac{1}{2} Ql = (P + \tfrac{1}{2} Q) \,.\, l \\ y_{max} = d &= \tfrac{1}{3} \frac{P \,.\, l^3}{E \mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{8} \frac{Ql^3}{E \mathfrak{T}r} = \tfrac{1}{3} \frac{(P + \tfrac{3}{8} Q) \,.\, l^3}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \\ tng\, \omega &= \tfrac{1}{2} \frac{Pl^2}{E \mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{6} \frac{Ql^2}{E \mathfrak{T}r} = \tfrac{1}{2} \frac{(P + \tfrac{1}{3} Q) l^2}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 321)$$

Bei jedem prismatischen Balken tritt dessen Gewicht G als gleichmäßig über die Achse verteilte Last Q auf, so daß bei Berücksichtigung des Gewichtes G stets die Formeln dieses Falles c) zu benutzen sind.

Man gewinnt aus ihnen die praktische Regel: Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes $Q = G$ ist die Endlast P bezw. um $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{3}Q$ und $\frac{3}{8}Q$ zu vermehren, um Maximalmoment, maximale Winkelabweichung und maximale Durchbiegung gemäß den Formeln für Endbelastung (Fall a) zu berechnen.

d) Belastung des wagerechten Trägers durch eine beliebige Einzellast (Zwischenbelastung) P_1. Für den Fall der Fig. 675 ist der Träger zunächst aufzufassen als ein Freiträger von der Länge l_1 mit Endbelastung P_1, so daß

Fig. 675.



$$Mo_{max} = P_1 l_1$$

für E als gefährlichen Querschnitt gilt.

Dieser Auffassung entsprechen die Fig. 675 a, b, c. Für Fig. 675 d ist zu berücksichtigen, daß sich das unbelastete Stück $B_1'F'$, welches bei der Biegung des Balkens gerade bleibt, bei dieser tangential an EB_1' ansetzt. Die Durchbiegung des freien Endes d besteht also aus den beiden Teilen

$$d_1 = \tfrac{1}{3}\frac{P_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}r}$$

und

$$d_2 = (l - l_1)\sin\omega.$$

Da $\sin\omega \sim tng\,\omega$ ist und da

$$tng\,\omega = \tfrac{1}{2}\frac{P_1 l_1^2}{E\mathfrak{T}r} \qquad 322\,a)$$

ist, so hat man hier

$$d = \tfrac{1}{3}\frac{P_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{2}\frac{P_1 l_1^2 (l - l_1)}{E\mathfrak{T}r} \cdot \cdots \cdots \qquad 322\,b)$$

e) Beanspruchung des wagerechten Trägers durch ein Kräftepaar am freien Ende. Wird der Träger, wie Fig. 676 zeigt, am freien Ende durch ein Kräftepaar vom Werte Pp gefaßt, so hat das Moment für jede Stelle der Strecke $E\bar{B}$ denselben Wert Pp, d. h. jede Stelle dieser Strecke ist in gleichem Maße gefährdet.

Außerdem ist zu bemerken, daß diese ganze Strecke schubfrei ist (vergl. Fig. 676 c) und bei der Biegung einen Kreisbogen (ϱ = Konstante) bildet.

Man hat hier als Festigkeitsgleichung für $E\bar{B}$

$$Pp = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{\varrho}.$$

Die Formänderungsgleichung ist für $E\bar{B}$, falls die Z-Achse in E entspringt,

$$E \cdot \mathfrak{T}r \cdot f''(z) = Pp$$

und liefert $E \cdot \mathfrak{T}r \cdot f'(z) = Pp \cdot z$ und $E \cdot \mathfrak{T}r \cdot f(z) = \frac{1}{2} Pp \cdot z^2$, so daß für die Stelle $\overline{B}$, welcher $z = l$ entspricht,

$$E \cdot \mathfrak{T}r \cdot tng\, \omega = (Pp) \cdot l \quad \text{und} \quad E \cdot \mathfrak{T}r \cdot d = \tfrac{1}{2}(Pp) \cdot l^2 \qquad 323)$$

ist.

Beide Werte folgen auch sofort nach S. 935 u. f.

Das Stück $\overline{B}B$ stellt einen Freiträger mit Endbelastung dar (Fall a), der sich bei der Biegung in $\overline{B}$ tangential an $E\overline{B}$ ansetzt.

Fig. 676.

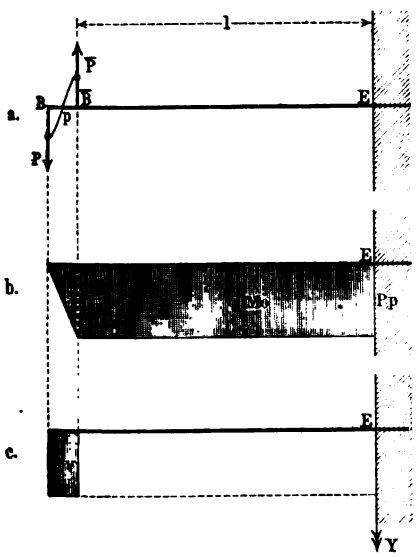
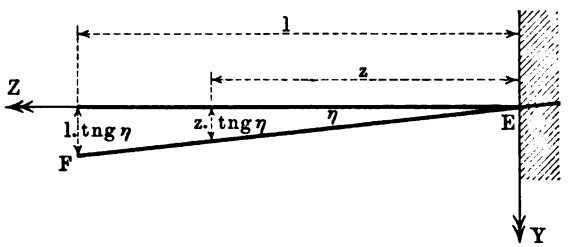


Fig. 677.



f) Der Träger bei schiefer Einspannung. Hat die Achse des Trägers vor dessen Belastung eine Neigung η gegen den Horizont (vergl. Fig. 677), so kann man bei relativ-kleinen Werten von η (vergl. S. 901) die vorigen Betrachtungen auf die schief gelagerte Achse beziehen und für jede Stelle (z) des Balkens die Winkelabweichung durch

Hinzufügen oder Abziehen von $tng\, \eta \sim arc\, \eta$

und die Durchbiegung durch

Hinzufügen oder Abziehen von $z \cdot tng\, \eta \sim z \cdot arc\, \eta$ } . . 324)

verbessern.

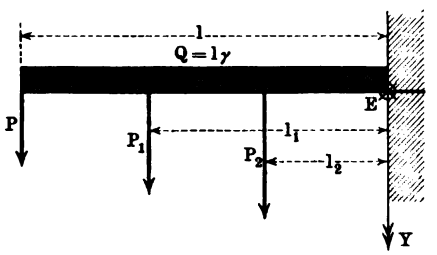
Für das freie Ende F sind demnach die Ergebnisse der Nr. a), b), c), d), e) durch Hinzufügen oder Abziehen von $arc\, \eta$ bezw. $l \cdot arc\, \eta$ zu verbessern.

g) Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen und deren Verwendung. Wir stellen die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen in der folgenden Tabelle dar:

	Winkelabweichung am freien Ende	Durchbiegung am freien Ende
Endbelastung P	$\frac{1}{2} \frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}r}$	$\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$
Gleichmäßige Belastung $Q = l\gamma$	$\frac{1}{6} \frac{Ql^2}{E\mathfrak{T}r}$	$\frac{1}{8} \frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$

	Winkelabweichung am freien Ende	Durchbiegung am freien Ende
Zwischenbelastung P_1 im Abstande l_1 vom festen Ende E	$\frac{1}{2}\frac{P_1 l_1^2}{E\mathfrak{T}r}$	$\frac{1}{3}\frac{P_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2} P l_1^2 (l - l_1)$
Kräftepaar vom Werte Pp am freien Ende	$\frac{(Pp) \cdot l}{E\mathfrak{T}r}$	$\frac{1}{2}\frac{(Pp) l^2}{E\mathfrak{T}r}$
Einfluß d. schiefen Einspannung $\pm \eta$	$\pm arc\, \eta$	$\pm l \cdot arc\, \eta$

Fig. 678.



Wie schon im Falle c) gezeigt wurde, lassen sich nach dem Principe der Übereinanderlagerung verwickeltere Fälle auf die einfachen Fälle zurückführen, welche der Reihe nach betrachtet wurden. Dabei leistet vorstehende Tabelle gute Dienste, sobald es sich um die Formänderung handelt. So wäre z. B. für den in Fig. 678 dargestellten Fall die Durchbiegung für das freie Ende

1) $\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$, wenn P allein vorhanden wäre,

2) $\frac{1}{3}\frac{Pl_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{Pl_1^2(l - l_1)}{E\mathfrak{T}r}$, wenn P_1 allein vorhanden wäre,

3) $\frac{1}{3}\frac{Pl_2^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{Pl_2^2(l - l_2)}{E\mathfrak{T}r}$, wenn P_2 allein vorhanden wäre,

4) $\frac{1}{8}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$, wenn Q allein vorhanden wäre.

Thatsächlich entspricht sie der Summe der Ausdrücke unter 1), 2), 3) und 4). Ebenso ist für E als gefährliche Stelle

$$Mo_{max} = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + \tfrac{1}{2} Ql.$$

Diese Betrachtung reicht aus für beliebig-viele Belastungen von gleicher Richtung.

Ebenso wäre im Falle der Fig. 679, wo $[P]$ und $[P_1]$ entgegengesetzte Richtungen haben, die Durchbiegung für das freie Ende

1) $+\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$, wenn $[P]$ allein vorhanden wäre,

2) $-\left[\frac{1}{3}\frac{P_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{Pl_1^2(l - l_1)}{E\mathfrak{T}r}\right]$, wenn $[P_1]$ allein vorhanden wäre.

Thatsächlich ist sie

$$\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r} - \left[\frac{1}{3}\frac{P_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{Pl_1^2(l - l_1)}{E\mathfrak{T}r}\right].$$

Um in diesem Falle Mo_{max} zu bestimmen, kann man die Momenten-

fläche gemäß Fig. 679 b herstellen, entsprechend den positiven Werten des Momentes von $[P]$ und den negativen des Momentes von $[P_1]$.

Die Fig. 679 b entspricht den Werten $P_1 = 2P$ und $l_1 = \frac{1}{2}l$, so daß $P_1 l_1 = Pl$ ist.

Führt man die algebraische Addition der Momente der Fig. 679 b durch, so entsteht Fig. 679 c, welche zeigt, daß durchweg positive Biegung vorhanden ist und daß die gefährliche Stelle bei B_1 liegt, wo Mo den Wert $P(l - l_1)$ hat; es ist also hier

$$Mo_{max} = P(l - l_1) = \tfrac{1}{2}Pl.$$

Auch die Darstellung der Vertikalkräfte in Fig. 679 d zeigt den gefährlichen Querschnitt bei B_1 an.

Ist $P_1 l_1 < Pl$, so entstehen Momentenflächen, wie sie Fig. 679 e anzeigt, die mittlere punktierte Linie $(E'B_1')$ tritt ein, wenn das Moment in E gleich dem Moment in B_1 ist, also für

$$Pl - P_1 l_1 = P(l - l_1),$$

d. h. für $P = P_1$, wo ein Kräftepaar vorliegt (vergl. Fig. 676).

Für $P_1 l_1 < Pl$ ist B_1 gefährlicher als E, solange

$$Pl - P_1 l_1 < P(l - l_1),$$

und E gefährlicher als B_1, solange

$$Pl - P_1 l_1 > P(l - l_1).$$

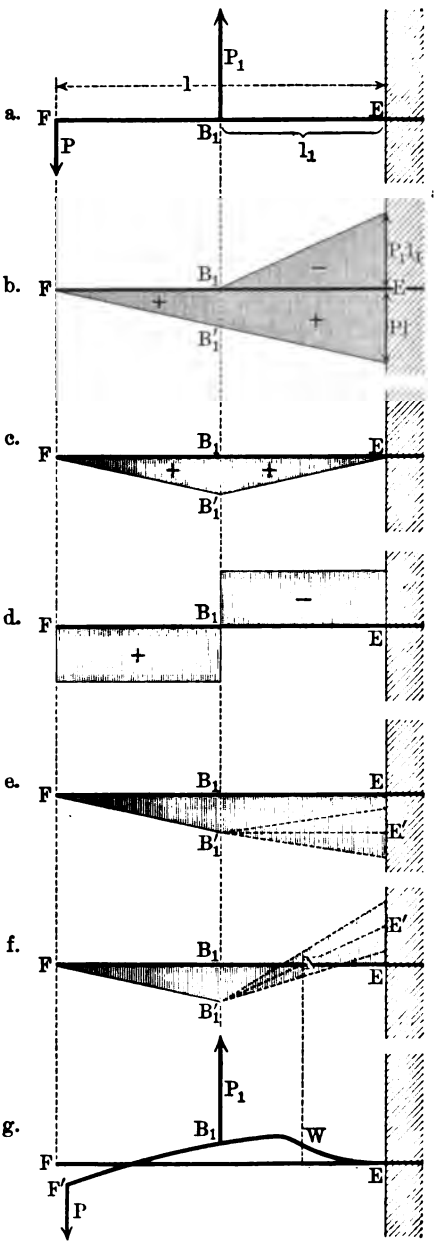
Dazwischen liegt der Fall des Paares, in welchem die ganze Strecke EB_1 in gleichem Maße gefährlich ist.

Ist $P_1 l_1 > Pl$, so entstehen Momentenflächen, wie sie Fig. 579 f anzeigt; die mittlere punktierte Linie $(E'B_1')$ tritt ein, wenn

$$P_1 l_1 - Pl = P(l - l_1),$$

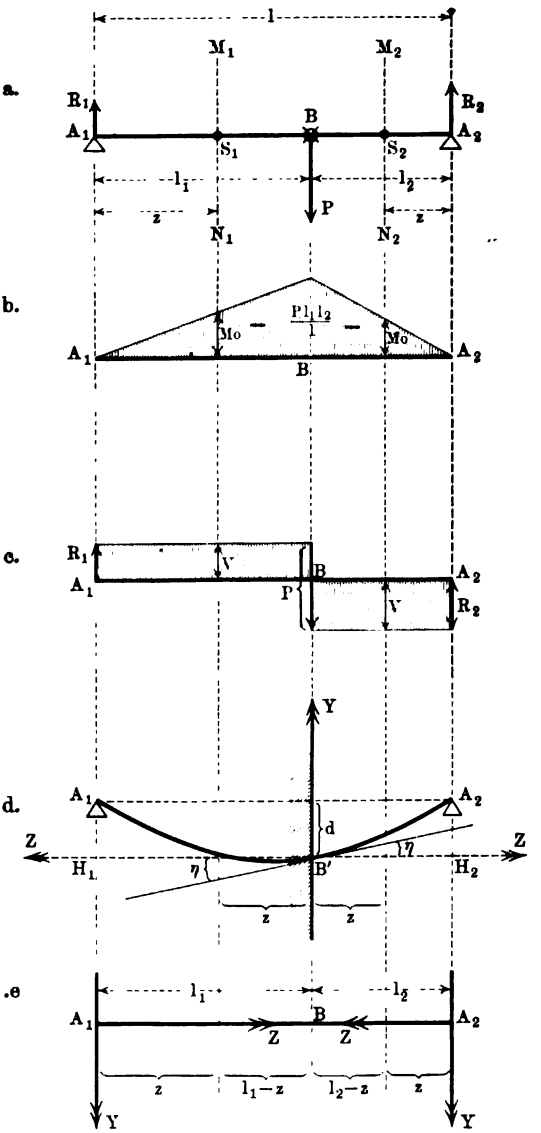
d. h. für $l_1 : l = 2P : (P + P_1)$. Bei N ist $Mo = 0$ und zwar trennt N die Strecke NE der negativen Biegung von der Strecke NF der

Fig. 679.



positiven Biegung; der Stelle N entspricht ein Wendepunkt ($\varrho = \infty$) der Biegungslinie, wie es der entsprechende Teil von Fig. 579 g zeigt.

Fig. 680.



Obwohl Freiträger in der Praxis nicht in ausgedehntem Maße verwendet werden, so sind entsprechende Betrachtungen doch sehr wichtig, weil sich verwickeltere Konstruktionen durch Schnitte in (gerade oder schief eingespannte) Freiträger zerlegen lassen, mit deren Behandlung dann zugleich die Behandlung jener Konstruktionen erledigt ist. Vergl. S. 901.

150. Der prismatische Balken auf zwei Stützen (zweiter Fall der einfachen Befestigung). Der Balken liegt mit beiden Enden auf Stützen.

a) **Belastung des wagerechten Trägers durch eine Einzellast.** In Fig. 680 stellt $A_1 A_2$ die Achse des Trägers dar, während $[P]$ in B die Belastung bezeichnet. Die Reaktionen in A_1 und A_2 sind

$$R_1 = P \cdot \frac{l_2}{l}$$

und

$$R_2 = P \cdot \frac{l_1}{l}$$

so daß $R_1 + R_2 = P$ ist.

Es ist hier erforderlich, die beiden Teile des Trägers, rechts und links von B, gesondert zu behandeln.

Für einen Schnitt $M_1 N_1$, der die Achse in S_1 zwischen B und A_1 trifft, hat das Moment der äußeren Kräfte (bei Berechnung aus dem linken Teilstücke) den Wert $R_1 \cdot z$. Da R_1

das Stück $S_1 A_1$ nach oben zu biegen sucht, so setzt man das Moment negativ an und hat also hier

$$Mo = -R_1 \cdot z.$$

Wandert der Schnitt von A_1 nach B, so geht z stetig von 0 in l_1 und demnach Mo von 0 in $-R_1 l_1$ über, d. h. für $z = l_1$ oder im Punkte B hat Mo sein Maximum vom Werte $R_1 l_1$.

Dieselbe Betrachtung zeigt für $A_2 B$ (bei Berechnung aus dem rechten Teilstücke), daß hier das Moment stetig von 0 bis $-R_2 l_2$ wächst.

Die beiden Werte für B sind natürlich einander gleich, da

$$-R_1 l_1 = -P\frac{l_1 l_2}{l} \quad \text{und} \quad -R_2 l_2 = -P\frac{l_1 l_2}{l}$$

ist.

Man gelangt hier zu der graphischen Darstellung der Fig. 680 b, in welcher die Werte der Momente, weil diese negativ sind, oberhalb der Achse aufgetragen sind.

Der gefährliche Querschnitt liegt also hier im Punkte B und zwar hat für ihn das Moment den Wert $P\frac{l_1 l_2}{l}$, so daß die Festigkeitsgleichung anzusetzen ist als

$$P\frac{l_1 l_2}{l} = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 325)$$

Für den Sonderfall der Mittelbelastung ($l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$) ist also hier

$$\tfrac{1}{4} Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 326)$$

wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ z. B. für den Kreis als Querschnitt wieder durch $\frac{1}{4} r^3 \pi$ zu ersetzen ist.

Die Lage des gefährlichen Querschnittes wird auch wieder durch die Darstellung der Vertikalkräfte (vergl. Fig. 680 c) bestimmt; für den Punkt B springt $[V]$ vom Werte $-R_1$ auf den Wert $-R_1 + P = +R_2$.

Die graphische Darstellung des Momentes (Fig. 680 b) zeigt ferner, daß beide Stücke des Balkens als Freiträger aufgefaßt werden können, gemäß Fig. 673 b, und zwar müssen sie dabei in B befestigt gedacht werden, während sie sich unter dem Einflusse der Endlasten $[R_1]$ bezw. $[R_2]$ nach oben biegen. Eine weitere Überlegung zeigt, daß es sich dabei um schief eingespannte Freiträger handelt. Denkt man nämlich den Balken der Fig. 680 nach vollendeter Biegung links von B' eingemauert, wie es Fig. 680 d andeutet, so stellt $B' A_2$ einen Freiträger dar, der unter dem Winkel η gegen die Horizontale aus der Mauer heraustritt, falls die Tangente der Biegungslinie des Balkens in B mit der Horizontalen den Winkel η bildet. Denkt man Fig. 680 d um $H_1 H_2$ nach unten geklappt, so erhält man das gewöhnliche Freiträgerbild für eine schiefe Einspannung (η) unterhalb der Horizontalen.

Ebenso entspricht $B' A_1$ einem Freiträger für eine schiefe Einspannung, bei der sich die Balkenachse um den Winkel η über die Horizontale erhebt.

Bestimmt man die Senkung $H_2 A_2 = d$ gemäß S. 945, so ist

$$d = \tfrac{1}{3}\frac{R_2 l_2^3}{E\mathfrak{T}} + l_2 \,.\, tng\,\eta.$$

Bestimmt man ebenso die Senkung $H_1 A_1 = d$, so ist

$$d = \tfrac{1}{3}\frac{R_1 l_1^3}{E\mathfrak{T}} - l_1 \,.\, tng\,\eta.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt unmittelbar

$$arc\,\eta \sim tng\,\eta = \tfrac{1}{3}\frac{l_1 l_2}{l}(l_1 - l_2)\frac{P}{E\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad d = \tfrac{1}{3}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}\cdot\frac{P}{E\mathfrak{T}}\cdot \qquad 327)$$

Die Biegungslinie ist gemäß S. 945 für BA_2 gegeben durch die Gleichung

$$y_2 = f_2(z) = \frac{R_2}{E\mathfrak{T}}(\tfrac{1}{2}l_2 z^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + z\cdot\tfrac{1}{3}\frac{l_1 l_2}{l}(l_1 - l_2)\frac{P}{E\mathfrak{T}}$$
$$= \frac{P}{E\mathfrak{T}}[\tfrac{1}{3}l_1 l_2(l_1 - l_2)\,.\,z + \tfrac{1}{2}l_1 l_2 z^2 - \tfrac{1}{6}l_1 z^3]\cdot\frac{1}{l}.$$

Ebenso findet man für BA_1 gemäß S. 945

$$y_1 = f_1(z) = \frac{P}{E\mathfrak{T}}[-\tfrac{1}{3}l_1 l_2(l_1 - l_2)\,.\,z + \tfrac{1}{2}l_1 l_2 z^2 - \tfrac{1}{6}l_2 z^3]\cdot\frac{1}{l}.$$

Beide Biegungslinien sind auf verschiedene Koordinatenkreuze bezogen, deren Y-Achse gemäß Fig. 680 d übereinstimmt, während die Z-Achsen bezw. die Richtungen $B'H_2$ und $B'H_1$ haben.

Will man für die beiden Teile des Balkens die Kreuze der Fig. 680 e (a. S. 949) einführen, so hat man in den gewonnenen Gleichungen $+y$ mit $-y + d$ und z mit $l_2 - z$ bezw. mit $l_1 - z$ zu vertauschen; es ergiebt sich dann für $A_2 B$

$$y_2 = -\tfrac{1}{6}\frac{l_1}{l}\cdot z[z^2 - l_2(2l_1 + l_2)]\frac{P}{E\,.\,\mathfrak{T}}$$

und für $A_1 B$

$$y_1 = -\tfrac{1}{6}\frac{l_2}{l}\cdot z[z^2 - l_1(2l_2 + l_1)]\frac{P}{E\,.\,\mathfrak{T}}.$$

Um die zuletzt gewonnenen Gleichungen unmittelbar zu erhalten, benutzt man in Fig. 680 a oder in Fig. 680 e die beiden Schnitte $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$.

Für $M_1 N_1$ liefert das Balkenstück links vom Schnitte

$$Mo = -R_1 z = -P\frac{l_2}{l}\cdot z,$$

während für $M_2 N_2$ das Balkenstück rechts vom Schnitte

$$-R_2 z = -P\frac{l_1}{l}\cdot z$$

giebt. Für $A_1 B$ gilt also

$$E\,.\,\mathfrak{T}\,.\,f_1''(z) = -P\frac{l_2}{l}\cdot z,$$

und demnach

$$E\,.\,\mathfrak{T}\,.\,f_1'(z) = -\tfrac{1}{2}P\frac{l_2}{l}\cdot z^2 + C_1,$$

und ferner

$$E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, f_1(z) = -\tfrac{1}{6} P \frac{l_2}{l} \cdot z^3 + C_1 z + C_1'.$$

Für $z = 0$, d. h. in A_1 hat $y = f(z)$ den Wert Null, weil die Stütze A_1 jede Senkung verhindert, d. h. es ist $f(z) = 0$ für $z = 0$ und also, gemäß der dritten Gleichung, $C_1' = 0$.

Für A_2B gilt ebenso

$$E\mathfrak{Tr} f_2''(z) = -\frac{P l_1}{l} \cdot z$$

$$E\mathfrak{Tr} f_2'(z) = -\tfrac{1}{2}\frac{P l_1}{l} \cdot z^2 + C_2$$

$$E\mathfrak{Tr} f_2(z) = -\tfrac{1}{6}\frac{P l_1}{l} \cdot z^3 + C_2 z + C_2',$$

wobei C_2' wieder den Wert Null behält.

Um C_1 und C_2 zu bestimmen, beachtet man, daß die Winkelabweichung $tng\,\eta$ und die Durchbiegung d der Biegungslinie für B sowohl aus A_1B als aus A_2B berechnet werden kann.

In A_1B wird B erreicht für $z = l_1$, so daß also gilt

$$E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, tng\,\eta_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{P l_2 l_1^2}{l} + C_1$$

$$E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, d_1 = -\tfrac{1}{6}\frac{P l_2 l_1^3}{l} + C_1 l_1.$$

In A_2B wird B erreicht für $z = l_2$, so daß also gilt

$$E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, tng\,\eta_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{P l_1 l_2^2}{l} + C_2$$

$$E \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, d_2 = -\tfrac{1}{6}\frac{P l_1 l_2^3}{l} + C_2 l_2.$$

Da die für A_1B und A_2B benutzten Kreuze in der Richtung der Y-Achse übereinstimmen, während ihre Z-Achsen entgegengesetzten Sinn haben, so ist $d_1 = d_2 = d$, während $+ tng\,\eta_1 = - tng\,\eta_2$ ist.

Aus den somit gegebenen Gleichungen

$$+\left(-\tfrac{1}{2}\frac{P l_2 l_1^2}{l} + C_1\right) = -\left(-\tfrac{1}{2}\frac{P l_1 l_2^2}{l} + C_2\right)$$

und

$$+\left(-\tfrac{1}{6}\frac{P l_2 l_1^3}{l} + C_1 l_1\right) = +\left(-\tfrac{1}{6}\frac{P l_1 l_2^3}{l} + C_2 l_2\right)$$

folgt $C_1 = \tfrac{1}{6}\frac{l_1 l_2}{l}(2 l_2 + l_1) P$ und $C_2 = \tfrac{1}{6}\frac{l_1 l_2}{l}(2 l_1 + l_2) P$, womit wieder die obigen Ergebnisse gewonnen sind.

Die Durchbiegung d in B ist im allgemeinen nicht die größte Durchbiegung des Trägers, wie folgende Betrachtung zeigt. Um ein Maximum oder Minimum von $y = f(z_1)$ innerhalb A_1B zu finden, betrachten wir die Nullwerte der Ableitung $y' = f'(z_1) = 0$, d. h. die Gleichung $3 z^2 - l_1(2 l_2 + l_1) = 0$.

Da diese für $z = \pm\sqrt{\frac{l_1(2l_2 + l_1)}{3}}$ befriedigt wird, so kann an den damit bezeichneten Stellen ein Maximum oder Minimum liegen.

Da z nur für die Werte $0 \cdots + l_1$ Bedeutung hat, so fällt der negative Wert der Wurzel außer Betracht. Für den positiven ist zu unterscheiden, ob $l_1 \gtreqless l_2$ oder ob $l_1 < l_2$ ist.

Für $l_1 = l_2 + \lambda$ ist

$$\sqrt{\frac{l_1[2(l_1 - \lambda) + l_1]}{3}} = \sqrt{\frac{l_1(3l_1 - 2\lambda)}{3}} = l_1\sqrt{1 - \frac{2\lambda}{3l_1}},$$

d. h. der Wert der Wurzel liegt für ein positives λ in den Grenzen $0 \cdots + l_1$, hat für $\lambda = 0$ die Größe l_1 und liegt für ein negatives λ in den Grenzen $+ l_1 \cdots + \infty$.

Demnach ist an der Stelle $\sqrt{\frac{l_1(2l_2 + l_1)}{3}}$ ein Maximum oder Minimum von y vorhanden, falls $l_1 > l_2$ ist; sein Wert ist

$$y_{max} = + \tfrac{1}{27}\frac{l_1 l_2}{l}\frac{P}{E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r}}(2l_2 + l_1)\sqrt{3l_1(2l_2 + l_1)} \quad . \quad . \quad 328)$$

Da dieser Wert für $l_1 > l_2$ den Wert für die Senkung bei B übersteigt, so handelt es sich um ein Maximum.

Für $l_1 = l_2$ fällt dieses Maximum zusammen mit der Durchbiegung für B.

Ist $l_1 < l_2$, so ist entsprechend in A_2B ein Maximum vorhanden.

Die größte Durchbiegung liegt demnach, falls l_1 und l_2 verschieden sind, stets innerhalb des größeren Stückes und nicht im Grenzpunkte B beider Stücke; für $l_1 = l_2$, d. h. bei Mittelbelastung findet in B die größte Durchbiegung statt.

Für den wichtigen Sonderfall der Mittelbelastung ($l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$), in welchem $Mo_{max} = \frac{1}{4}Pl$ war, ergiebt sich für die Mitte

$$y_{max} = \tfrac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 329)$$

b) Gleichmäßige Belastung des wagerechten Balkens. In Fig. 681 stellt A_1A_2 die Balkenachse dar, während das darüber liegende schraffierte Rechteck die gleichmäßige Belastung andeutet, welche wieder γ kg für den laufenden Meter betragen mag.

Wegen der Symmetrie der Konstruktion ist hier $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}Q$, falls die gesamte Belastung $l\gamma$ wieder durch Q bezeichnet wird. Für einen Schnitt MN ist (vergl. Fig. 681 a)

$$Mo = -R_1 z + \frac{z}{2}(z\gamma) = -\tfrac{1}{2}\gamma(lz - z^2).$$

Die graphische Darstellung liefert die Parabel der Fig. 681 b.

Der gefährliche Querschnitt liegt hier in der Mitte $\left(z = \frac{l}{2}\right)$ und man hat

$$Mo_{max} = -\tfrac{1}{8}Ql.$$

Die Festigkeitsgleichung ist hier

$$\tfrac{1}{8} Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 330)$$

Die Verwendung der Vertikalkräfte zeigt Fig. 681 c.

Die Darstellung des Momentes zeigt, daß hier die Hälfte des Trägers als ein horizontal eingespannter Freiträger aufgefaßt werden kann, wie es Fig. 681 d näher ausführt. Man hat gemäß S. 945 hier $H_2 A_2 = d$

$$= \tfrac{1}{3} \frac{R_2 \left(\frac{l}{2}\right)^3}{E\mathfrak{T}r} - \tfrac{1}{8} \frac{\left(\frac{1}{2} Q\right)\left(\frac{l}{2}\right)^3}{E\mathfrak{T}r}$$

$$= \tfrac{5}{24} \frac{\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{E\mathfrak{T}r} = \tfrac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$$

und damit ist auch die Durchbiegung d für die Mitte der Fig. 680 d bestimmt.

Die Biegungslinie läßt sich wieder leicht aus Fig. 681 d ableiten, gemäß der entsprechenden Freiträgerformel.

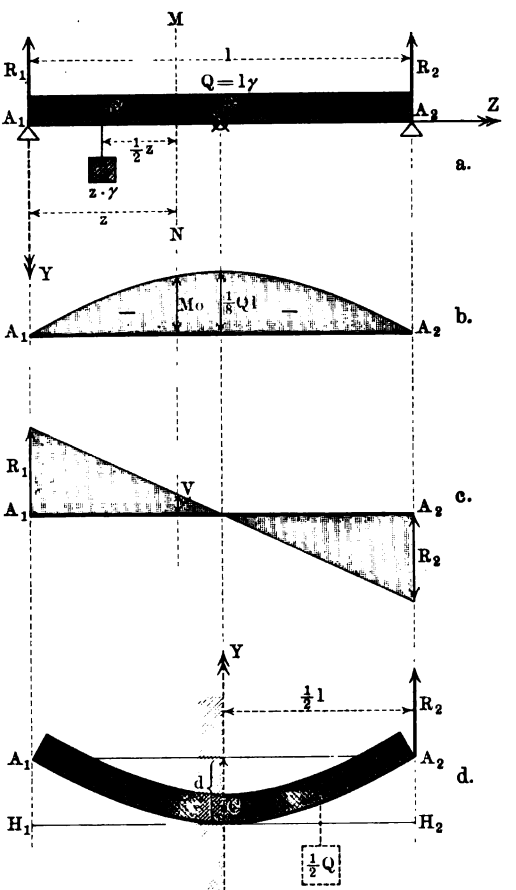
Um sie unmittelbar zu bestimmen, geht man von der Formänderungsgleichung

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f''(z) = Mo$$
$$= -\tfrac{1}{2}\gamma (lz - z^2)$$

aus, deren Ansatz dem Kreuze der Fig. 681 a entspricht. Daraus folgt

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f'(z) = -\tfrac{1}{2}\gamma\left(\tfrac{1}{2} lz^2 - \frac{z^3}{3}\right) + C.$$

Fig. 681.



Um C bestimmen zu können, hat man einen Punkt des Balkens aufzusuchen, für welchen die Lage der Tangente bekannt ist; das ist hier wegen der Symmetrie der Konstruktion die Mitte, für welche die Tangente horizontal ist. Man hat also $f'(z) = 0$ für $z = \frac{1}{2} l$, d. h. es ist

$$0 = -\tfrac{1}{2}\gamma\left[\tfrac{1}{2} l\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3\right] + C,$$

d. h.

$$C = \tfrac{1}{24} \frac{\gamma l^3}{E\mathfrak{T}r}$$

und demnach ist

$$E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f'(z) = -\tfrac{1}{2}\gamma\left(\tfrac{1}{2}lz^2 - \frac{z^3}{3} - \tfrac{1}{12}l^3\right).$$

Nun folgt weiter

$$E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f(z) = -\tfrac{1}{2}\gamma\left(\tfrac{1}{6}lz^3 - \frac{z^4}{12} - \tfrac{1}{12}l^3z\right) + C'.$$

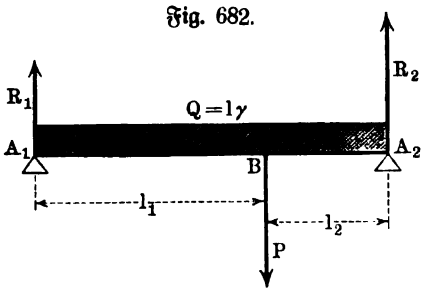
Da für A_1 zugleich $z = 0$ und $y = f(z) = 0$ ist, so ist $C' = 0$. Für die Mitte ($z = \frac{1}{2}l$) ergiebt sich wieder ($Q = l\gamma$)

$$y_{max} = \tfrac{5}{384}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 331)$$

c) Verbindung von Fall a) und b). Man hat hier

$$R_1 = \frac{l_2}{l}P + \tfrac{1}{2}Q \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{l_1}{l}P + \tfrac{1}{2}Q.$$

Fig. 682.



Um die gefährliche Stelle zu bestimmen, verfolgen wir den Verlauf der Vertikalkraft und zwar für $l_1 > l_2$.

Diese ist zunächst für A_2 gegeben durch R_2 und ändert sich infolge der gleichmäßigen Belastung ($z\gamma$) bis B um $l_2\gamma$, so daß ihr Wert, abgesehen von dem Einflusse von $[P]$, in B

$$-R_2 + l_2\gamma = -\frac{l_1}{l}P - \tfrac{1}{2}l\gamma + l_2\gamma = -\frac{l_1}{l}P - \frac{l_1 - l_2}{2}\cdot\gamma$$

ist, d. h. dort dasselbe Vorzeichen hat wie R_2.

Bleibt das Vorzeichen auch noch bei Berücksichtigung von $[P]$ bestehen, so liegt der gefährliche Querschnitt in BA_1, wird aber die Vertikalkraft in B durch den Einfluß von $[P]$ positiv oder zu Null, so ist B selbst die gefährliche Stelle.

Es ist also B gefährlich für

$$-\frac{l_1}{l}P - \frac{l_1 - l_2}{2}\gamma + P \geqq 0,$$

d. h. für $P\cdot\frac{l - l_1}{l} \geqq \frac{l_1 - l_2}{2}\gamma$ oder für $P \geqq \frac{l_1 - l_2}{2l_2}(l\gamma)$ oder für

$$P \geqq \frac{l_1 - l_2}{2l_2}\cdot Q.$$

Dagegen ist eine Stelle in BA_1 gefährlich für

$$P < \frac{l_1 - l_2}{2l_2}\cdot Q.$$

Um diese Stelle zu bestimmen, bezeichnen wir ihre Entfernung von A_1 mit z_1, so daß $-R_1 + z_1\gamma = 0$ und

$$z_1 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{R_1}{Q} \cdot l = \tfrac{1}{2} l + l_2 \frac{P}{Q}$$

ist.

Man hat im ersten Falle (Schnitt in B)

$$Mo_{max} = -R_2 l_2 + \tfrac{1}{2} \gamma l_2^2 = -(P + \tfrac{1}{2} Q) \frac{l_1 l_2}{l}$$

und im zweiten Falle (Schnitt in der Entfernung z_1 von A_1)

$$Mo_{max} = -R_1 z_1 + \tfrac{1}{2} z_1^2 \gamma = -\frac{R_1^2}{\gamma} + \tfrac{1}{2} \frac{R_1^2}{\gamma} = -\tfrac{1}{2} \frac{R_1^2}{\gamma} = -\tfrac{1}{2} \frac{R_1^2}{Q} \cdot l.$$

Faßt man $A_1 B$ und $A_2 B$ wieder nach der Biegung als schief eingespannte Freiträger auf, so findet man leicht für die Durchbiegung in B

$$\tfrac{1}{3} \left(P + \frac{l^2 + l_1 l_2}{8 l_1 l_2} Q \right) \frac{l_1^2 l_2^2}{l} \cdot \frac{1}{E \mathfrak{T}r} \quad \ldots \ldots \quad 332)$$

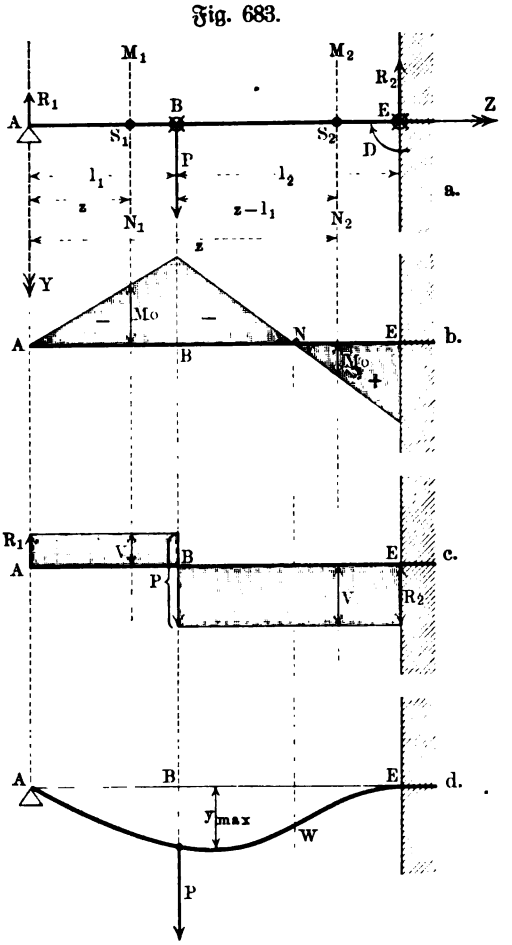
Für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$ ist $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}(P + Q)$. Hier ist die Mitte gefährlich und man hat für sie als Moment

$$Mo_{max} = -\tfrac{1}{4}(P + \tfrac{1}{2} Q) . l \quad 333)$$

und als Durchbiegung

$$y_{max} = \tfrac{1}{48} \frac{(P + \frac{5}{8} Q) l^3}{E \mathfrak{T}r} \quad 334)$$

Fig. 683.



151. Der einerseits eingespannte und anderseits gestützte prismatische Balken (dritter Fall der einfachen Befestigung). Der Balken ist an dem einen Ende eingespannt, wie ein Freiträger, und an dem andern Ende gestützt.

a) Belastung des wagerechten Trägers durch eine Einzellast. In Fig. 683 stellt EA die Achse des Balkens dar, während B die Last $[P]$ aufnimmt.

Die Reaktion $[R_1]$ der Stütze A und ebenso die Reaktion $[R_2]$ und das Moment $[D]$ der Einklemmung E sind zunächst unbekannt. Der Versuch, R_1 mit den Mitteln der Statik, ohne Mithülfe der Elasticitätslehre zu

bestimmen, gelingt nicht, es ist also $[R_1]$ als statisch-unbestimmte Reaktion zu bezeichnen (vergl. S. 899).

Man bestimmt $[R_1]$ am einfachsten, indem man die Stütze A fortgenommen und statt ihrer die Reaktion $[R_1]$ als Kraft wirkend denkt, so daß der Balken als ein Freiträger mit den beiden Kräften $[P]$ und $[R_1]$ erscheint. Die Durchbiegung für dessen freies Ende ist dann, gemäß S. 945, da $[P]$ als Zwischenbelastung und $[R_1]$ als Endbelastung anzusehen ist,

$$\left(\tfrac{1}{3}\frac{l_2^3 P}{E\mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{2}\frac{l_1 l_2^2 P}{E\mathfrak{T}r}\right) - \tfrac{1}{3}\frac{l^3 R_1}{E\mathfrak{T}r}.$$

Soll $[R_1]$ die Stütze ersetzen, so muß diese Durchbiegung den Wert Null haben.

Diese Annullierung giebt eine Gleichung für R_1, so daß

$$R_1 = \tfrac{1}{2} P \frac{l_2^3(3 l_1 + 2 l_2)}{l^3} = \tfrac{1}{2}\frac{P l_2^2(3 l - l_2)}{l^3} \quad \ldots \quad 335)$$

ist.

Man hat nun ferner für E

$$R_2 = P - R_1$$

und

$$D = -(-R_1 l + P l_2).$$

Für einen Schnitt $M_1 N_1$ ist $Mo = -z \,.\, R_1$.

Dem Übergange $z = 0 \ldots l_1$ entspricht $Mo = 0 \cdots -l \,.\, R_1$, d. h. für das Stück AB liegt der gefährliche Querschnitt in B und zwar entspricht ihm das Moment

$$Mo_B = -l_1 R_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{P l_2^2(3 l - l_2)(l - l_2)}{l^3} \quad \ldots \quad 336\,a)$$

Fig. 603 b (a. v. S.) zeigt die graphische Darstellung des Momentes für die Strecke AB.

Für einen Schnitt $M_2 N_2$ ist

$$Mo = -z R_1 + (z - l_1) P = z(P - R_1) - l_1 P.$$

Da Mo durch z linear ausgedrückt ist, so führt die graphische Darstellung des Momentes für BE zu einer geraden Linie.

Diese Gerade ist bestimmt durch den Wert von Mo für $z = l_1$, der bereits als $Mo_B = -l_1 R_1$ bestimmt wurde, und durch den Wert von Mo_E für $z = l$, welcher der Einklemmung E entspricht.

Letzterer hat den Wert

$$Mo_E = -l R_1 + (l - l_1) P$$
$$= -\tfrac{1}{2}\frac{P l_2^2(3 l - l_2)}{l^2} + l_2 P = \tfrac{1}{2}\frac{P l_2}{l^2}(2 l^2 - 3 l l_2 + l_2^2),$$

d. h.

$$Mo_E = +\tfrac{1}{2}\frac{P l_2(l - l_2)(2 l - l_2)}{l^2} \quad \ldots \quad 336\,b)$$

Da $l > l_2$ und $2 l > l_2$ ist, so ist der Wert Mo_E stets positiv.

Fig. 683 b zeigt den weiteren Verlauf des Momentes für die Strecke BE, es ist hier erst negativ, hat in N den Wert Null und ist dann positiv.

Der gefährliche Querschnitt für die Strecke BE liegt entweder in B oder in E, je nachdem der Zahlenwert von Mo_B oder von Mo_E überwiegt.

Diese Zahlenwerte sind gleich, falls

$$\tfrac{1}{2}\frac{Pl_2^2(3l-l_2)(l-l_2)}{l^3} = \tfrac{1}{2}\frac{Pl_2(l-l_2)(2l-l_2)}{l^2}$$

ist, d. h. falls

$$\frac{l_2(3l-l_2)}{l} = 2l - l_2$$

ist. Daraus folgt

$$2l^2 - 4ll_2 + l_2^2 = 0,$$

d. h.

$$l_2 = 2l \pm \sqrt{2l^2} = l(2 \pm \sqrt{2}).$$

Da $l_2 < l$ ist, so ist nur das Minuszeichen der Lösung brauchbar, d. h. man hat

$$l_2 = l(2 - \sqrt{2}) = 0{,}586\,l \quad \text{und} \quad l_1 = l(\sqrt{2} - 1) = 0{,}414\,l.$$

Liegt also B so, daß $l_1 = 0{,}414\,l$ und $l_2 = 0{,}586\,l$ ist, so sind die Punkte B und E gleich gefährlich.

Diese Grenze läßt sich auch darstellen durch das Verhältnis

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707.$$

Für $l_2 = 0{,}586\,l + \lambda$ ist

$$\frac{l_2(3l-l_2)}{l} = 1{,}414\,l + 1{,}828\,\lambda - \frac{\lambda^2}{l} \quad \text{und} \quad 2l - l_2 = 1{,}414\,l - \lambda.$$

Für kleine positive Werte von λ ist der erste Wert größer als der zweite, d. h. für $l_2 > 0{,}586\,l$ ist der Wert von Mo_B größer als der Wert von Mo_E u. s. w.

Nimmt von der bestimmten Grenze aus l_1 ab und l_2 zu, so ist Mo_B gefährlicher als Mo_E, wobei $l_1 < 0{,}707\,l_2$ ist. Nimmt von der bestimmten Grenze aus l_1 zu und l_2 ab, so ist Mo_E gefährlicher als Mo_B, wobei $l_1 > 0{,}707\,l_2$ ist.

Die folgende Tabelle giebt die betrachteten Werte für die am meisten gebräuchlichen Teilungsverhältnisse $l_1 : l_2$ der Praxis.

l_1	$\frac{3}{4}l$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{1}{4}l$
l_2	$\frac{1}{4}l$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{3}{4}l$
R_1	$\frac{11}{128}P$	$\frac{4}{27}P$	$\frac{5}{16}P$	$\frac{14}{27}P$	$\frac{81}{128}P$
R_2	$\frac{117}{128}P$	$\frac{23}{27}P$	$\frac{11}{16}P$	$\frac{13}{27}P$	$\frac{47}{128}P$
Mo_B	$-\frac{33}{512}Pl$	$-\frac{8}{81}Pl$	$-\frac{5}{32}Pl$	$-\frac{14}{81}Pl$	$-\frac{81}{512}Pl$
Mo_E	$+\frac{21}{128}Pl$	$+\frac{5}{27}Pl$	$+\frac{3}{16}Pl$	$+\frac{4}{27}Pl$	$+\frac{15}{128}P$

Die Festigkeitsgleichung ist von Fall zu Fall mit dem größeren der Werte von Mo_B und Mo_E anzusetzen.

Um die Biegungslinie zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Schnitt M_2N_2 in Fig. 683a für EA als Z-Achse. Man hat dann, das Balkenstück links vom Schnitte benutzend,

$$Mo = -R_1(l-z) + P(l_2-z)$$

und demnach

$$E\mathfrak{Tr}f_2''(z) = -R_1(l-z) + P(l_2-z)$$

und

$$E\mathfrak{Tr}f_2'(z) = -R_1(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + P(l_2 z - \tfrac{1}{2}z^2) + C_2.$$

Da $f_2'(z) = 0$ ist für $E = 0$, wo $z = 0$ ist, so ist $C_2 = 0$. Ferner ist

$$E\mathfrak{Tr}f_2(z) = -R_1(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + P(\tfrac{1}{2}l_2z^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + C_2'.$$

Da $f_2(z) = 0$ ist für $E = 0$, wo $z = 0$ ist, so ist $C_2' = 0$.

Für einen Schnitt M_1N_1 ist bei demselben Kreuze

$$Mo = -R_1(l-z).$$

Man hat demnach

$$E\mathfrak{Tr}f_1''(z) = -R_1(l-z)$$

und

$$E\mathfrak{Tr}f_1'(z) = -R_1(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + C_1.$$

Um C_1 zu bestimmen, beachte man, daß $f_2'(z)$ und $f_1'(z)$ für den gemeinsamen Punkt B übereinstimmen, d. h. es ist

$$-R_1(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + P(l_2z - \tfrac{1}{2}z^2) = -R_1(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + C_1,$$

falls man $z = l_2$ setzt. Dies ergiebt

$$C_1 = \tfrac{1}{2}Pl_2^2$$

und demnach

$$E\mathfrak{Tr}f_1'(z) = -R_1(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + \tfrac{1}{2}Pl_2^2$$

Nun folgt weiter

$$E\mathfrak{Tr}f_1(z) = -R_1(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + \tfrac{1}{2}Pl_2^2z + C_1'.$$

Um C_1' zu bestimmen, beachten wir, daß $f_2(z)$ und $f_1(z)$ für den gemeinsamen Punkt B übereinstimmen, d. h. es ist

$$-R_1(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + P(\tfrac{1}{2}l_2z^2 - \tfrac{1}{6}z^3) = -R_1(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + \tfrac{1}{2}Pl_2^2z + C_1',$$

falls man $z = l_2$ setzt. Daraus ergiebt sich

$$C_1' = -\tfrac{1}{6}Pl_2^3.$$

Da $f_1(z) = 0$ ist im Punkte A, für welchen $z = l$ ist, so gilt auch

$$0 = -\tfrac{1}{3}R_1l^3 + \tfrac{1}{2}Pl_2^2l - \tfrac{1}{6}Pl_2^3,$$

woraus wieder $R_1 = \tfrac{1}{2}\dfrac{Pl_2^2(3l - l_2)}{l^3}$ folgt.

Um das Maximum der Durchbiegung zu bestimmen, betrachten wir zunächst das Stück EB, für welches $f_2(z) = y$ gilt.

Aus $f_2'(z) = 0$ folgt $z[-R_1l + Pl_2 - \tfrac{1}{2}z(-R_1 + P)] = 0$, d. h. $z = 2\dfrac{Pl_2 - R_1l}{P - R_1}$ neben $z = 0$. Setzt man den Wert von R_1 ein, so er-

giebt sich $z = 2\dfrac{l_2 l(2l - l_2)}{2l^2 + 2ll_2 - l_2^2}$ und es ist noch zu untersuchen, ob z auch wirklich in EB vorhanden ist, d. h. ob z innerhalb der Grenzen $0 \ldots l_2$ liegt. Die Bedingung dafür ist, da z positiv ist,

$$\frac{2l_2 l(2l - l_2)}{2l^2 + 2ll_2 - l_2^2} \leqq l_2 \quad \text{oder} \quad \frac{2l(2l - l_2)}{2l^2 + 2ll_2 - l_2^2} \leqq 1.$$

Für die Grenze (=) gilt

$$4l^2 - 2ll_2 = 2l^2 + 2ll_2 - l_2^2$$

oder

$$l_2^2 - 4ll_2 + 2l^2 = 0.$$

Man hat also

$$l_2 = 2l \pm \sqrt{2\,l^2} = l(2 \pm \sqrt{2}).$$

Da $l_2 < l$ ist, so gilt nur das Minuszeichen, d. h. es ist $l_2 = 0{,}586\,l$. Daraus folgt, daß $l_2 > 0{,}586\,l$ sein muß, wie oben, wenn innerhalb des Stückes EB ein Maximum vorhanden sein soll, dessen Wert sich dann als

$$y_{max} = \tfrac{1}{3}\frac{Pl_2^3}{E\mathfrak{T}r} \cdot \frac{(2l^2 - 3ll_2 + l_2^2)(3l - l_2)^2}{(2l^2 + 2ll_2 - l_2^2)^2} \quad \ldots \quad 337\,a)$$

ergiebt.

Dieselbe Untersuchung für BA, für welches $y = f_1(z)$ gilt, zeigt Folgendes. Aus $f_1'(z) = 0$ ergiebt sich $-R_1(lz - \frac{1}{2}z^2) + \frac{1}{2}Pl_2^2 = 0$, d. h. $z^2 - 2lz + \dfrac{P}{R_1}l_2^2 = 0$ oder $z = l \pm \sqrt{l^2 - \dfrac{P}{R_1}l_2^2}$. Setzt man den Wert von R_1 ein, so ergiebt sich $z = l\left[1 \pm \sqrt{\dfrac{l - l_2}{3l - l_2}}\right]$. Soll z in BA vorhanden sein, so muß z in den Grenzen $l_2 \ldots l$ liegen. Schließt man das Pluszeichen aus, für welches $z > l$ würde, so ist dies für $l_2 < 0{,}586\,l$ der Fall, d. h. in BA ist dann ein Maximum vorhanden, dessen Wert

$$y_{max} = \tfrac{1}{6}\frac{Pl_2^2(l - l_2)}{E\mathfrak{T}r}\sqrt{\frac{l - l_2}{3l - l_2}} \quad \ldots \quad 337\,b)$$

ist.

Eine Vergleichung der gefundenen Werte zeigt also, daß für $l_2 > 0{,}586\,l$ das Maximum in EB liegt, während das Maximum für AB den größten Wert der Durchbiegung darstellt, falls das erste Maximum nicht in Frage kommt ($l_2 < 0{,}586\,l$).

Für $l_2 = 0{,}586\,l$ liegt das Maximum von EB im Belastungspunkte B, während das Maximum von BA gleichfalls an die Stelle B rückt.

Im allgemeinen ist die Durchbiegung für B gegeben als ($z = l_2$)

$$y_B = \frac{Pl_2^3}{6E\mathfrak{T}r}\left[2\,l_2 - \frac{(3l - l_2)^2 l_2^2}{2l^3}\right] \quad \ldots \quad 338)$$

Die Momentenlinie zeigt, daß einmal $Mo = 0$ wird, und zwar in dem Teile EB; die Bedingung dafür ist

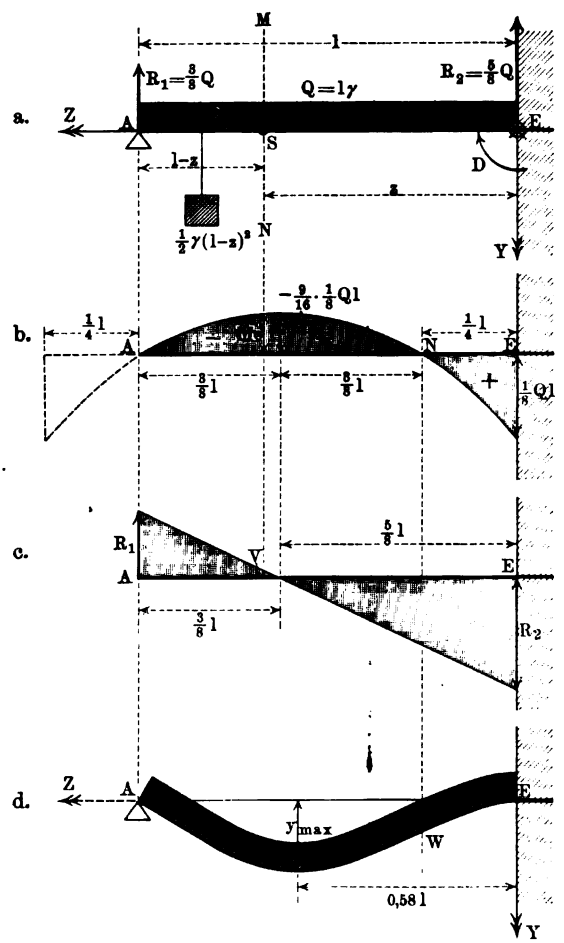
$$P(l_2 - z) - R_1(l - z) = 0, \quad \text{d. h.} \quad z = \frac{ll_2(2l - l_2)}{2l^2 + 2ll_2 - l_2^2}.$$

Dieser Wert ist die Hälfte des Wertes von z, der y_{max} in EB entspricht.

Da die Formänderungsgleichung die Gestalt $\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$ hat, so ist $\varrho = \infty$ für $Mo = 0$, d. h. die Biegungslinie hat an der eben bestimmten Stelle z einen Wendepunkt (Inflexion); die entsprechende Stelle ist, was Biegungsspannungen anlangt, spannungsfrei, da nach der Festigkeitsgleichung σ zu Mo proportional ist.

Für den Sonderfall der Mittelbelastung ($l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$), bei dem Mo_E am gefährlichsten wird, ist $l_2 = 0{,}5\,l$, d. h. man hat $l_2 < 0{,}586\,l$ und demnach liegt das Maximum der Durchbiegung in BA; es tritt ein für $z = 0{,}545\,l = \frac{6}{11}l$ und hat den Wert $0{,}0093\,\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$; der Wendepunkt liegt hier bei $z = \frac{5}{11}l$.

Fig. 684.



b) **Gleichmäßige Belastung des wagerechten Trägers.** In Fig. 684 stellt EA die Achse des Balkens dar, während das darauf liegende schraffierte Rechteck die gleichmäßige Belastung andeutet, die wieder γ kg für den laufenden Meter betragen mag.

Die Reaktion der Stütze R_1 ist auch hier statisch unbestimmt. Denkt man wieder die Stütze A durch die Kraft $[R_1]$ ersetzt, so hat der entsprechende Freiträger die Durchbiegung für $Q = l\gamma$

$$-\tfrac{1}{3}\frac{R_1 l^3}{E\mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{8}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}.$$

Soll diese Durchbiegung den Wert Null haben, wie es für die Stütze A der Fall ist, so folgt

$$R_1 = \tfrac{3}{8}Q \quad . \quad . \quad 339)$$

Daraus ergiebt sich für E zunächst $R_2 = Q - R_1 = \frac{5}{8}Q$ und

$$D = -(-R_1 l + \tfrac{1}{2}Q.l) \quad 340a)$$

Für den Schnitt MN hat man

$$Mo = -R_1(l-z) + \tfrac{1}{2}\gamma(l-z)^2$$
$$= -\tfrac{3}{8}l\gamma(l-z) + \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - 2lz + z^2)$$
$$= +\tfrac{1}{8}\gamma(l^2 - 5lz + 4z^2).$$

Die graphische Darstellung des Momentes liefert die Parabel der Fig. 684 b.

Für $z = 0$ ist $Mo_E = \tfrac{1}{8}\gamma l^2 = \tfrac{1}{8}Ql$.

$Mo = 0$ tritt ein für $z = \dfrac{5l \pm 3l}{8}$; da $z < l$ ist, so ist das Pluszeichen nicht brauchbar, d. h. man hat $z = \tfrac{1}{4}l$.

Zwischen $z = \tfrac{1}{4}l$ und $z = l$ ist ein Maximum von Mo vorhanden, für dessen Bestimmung die Ableitung $Mo' = \tfrac{1}{8}\gamma(-5l + 8z)$ annulliert wird; man hat $z = \tfrac{5}{8}l$ und findet dafür $Mo_{max} = -\tfrac{9}{128}\gamma l^2 = -\tfrac{9}{128}Ql$.

Vergleicht man Mo_E und Mo_{max}, so sieht man, daß

$$Mo_{max} = -\tfrac{9}{16} \cdot Mo_E \quad \ldots\ldots\ldots \quad 340\,b)$$

ist und daß demnach der gefährliche Querschnitt hier stets bei E liegt.

Die Festigkeitsgleichung lautet also hier

$$\tfrac{1}{8}Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 341)$$

Um die Biegungslinie zu bestimmen, dient der Ansatz

$$E\mathfrak{T}rf''(z) = \tfrac{1}{8}\gamma(l^2 - 5lz + 4z^2),$$

woraus

$$E\mathfrak{T}rf'(z) = \tfrac{1}{8}\gamma(l^2 z - \tfrac{5}{2}lz^2 + \tfrac{4}{3}z^3)$$

und

$$E\mathfrak{T}rf(z) = \tfrac{1}{8}\gamma(\tfrac{1}{2}l^2 z^2 - \tfrac{5}{6}lz^3 + \tfrac{1}{3}z^4)$$

folgt, da die zunächst auftretenden Konstanten den Wert Null haben (vgl. E).

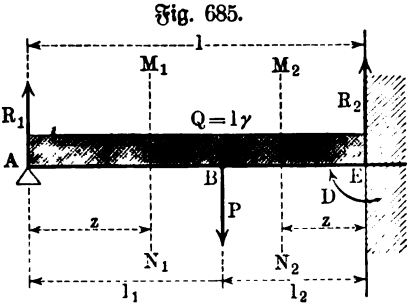
Die größte Durchbiegung entspricht der Stelle $f'(z) = 0$, d. h. $z(l^2 - \tfrac{5}{2}lz + \tfrac{4}{3}z^2) = 0$, woraus $z = 0{,}5785\,l$ folgt und

$$y_{max} = 0{,}0054\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 342)$$

Der Wert $Mo = 0$, der für $z = \tfrac{1}{4}l$ eintritt (N), entspricht dem Wendepunkt (W) der Biegungslinie; die entsprechende Stelle ist wieder spannungslos, was Biegungsspannungen anlangt.

c) Vereinigung von Fall a) und b). Da dieser Fall (vergl. Fig. 685) bei relativ geringen Werten von Q als Fall a) behandelt werden kann, so ist zu vermuten, daß die gefährlichen Querschnitte des Falles a) bei E und B hier auch eine Rolle spielen, während es anderseits mit Rücksicht auf Fall b) nicht ausgeschlossen scheint, daß die gleichmäßige Belastung Q gelegentlich auch innerhalb der Strecken AB oder BE einen gefährlichen Querschnitt hervorruft. Wir beginnen damit,

Fig. 685.



die letztere Möglichkeit zu untersuchen, und zwar wiederum durch Betrachtung der Vertikalkraft. Die Reaktionen sind hier

$$R_1 = \tfrac{1}{2}\frac{Pl_2^2(3l - l_2)}{l^3} + \tfrac{3}{8}Q \quad \text{und} \quad R_2 = P + Q - R_1 \quad \cdot \; 343)$$

Für den Schnitt M_1N_1 beträgt die Vertikalkraft, von links aus berechnet,

$$-R_1 + z\gamma.$$

Die Gleichung $V = 0$ liefert hier $z = \frac{R_1}{\gamma}$ für $0 < z < l_1$, d. h. es muß

$$0 < \tfrac{1}{2}\frac{Pl_2^2(3l - l_2)}{l^3} + \tfrac{3}{8}Q < l_1\gamma$$

sein, falls innerhalb AB ein gefährlicher Querschnitt vorhanden sein soll.

Der erste Teil der Ungleichung ist stets erfüllt, während der zweite

$$Pl_2^2(3l - l_2) + \tfrac{3}{4}Ql^3 < 2l_1l^3\gamma$$

fordert, wofür man ($Q = l\gamma$) auch

$$Pl_2^2(3l - l_2) < 2l_1l^2Q - \tfrac{3}{4}Ql^3$$

oder

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2(5l_1 - 3l_2)}{4l_2^2(3l - l_2)}$$

schreiben kann; der Nenner läßt sich auch darstellen als $4l_2^2(3l_1 + 2l_2)$.

Für den Schnitt M_2N_2 beträgt die Vertikalkraft, von rechts aus berechnet,

$$-R_2 + z\gamma.$$

Die Gleichung $V = 0$ liefert hier $z = \frac{R_2}{\gamma}$ für $0 < z < l_2$, d. h. es muß

$$0 < P + Q - \tfrac{1}{2}\frac{P_2l_2^2(3l - l_2)}{l^3} - \tfrac{3}{8}Q < l_2\gamma$$

sein, falls innerhalb BE ein gefährlicher Querschnitt vorhanden sein soll.

Diese Bedingung entspricht

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2(3l_2 - 5l_1)}{4(2l^3 - 3ll_2^2 + l_2^3)},$$

wobei der Nenner auch als $4l_1(2l_1^2 + 6l_1l_2 + 3l_2^2)$ geschrieben werden kann.

Die erste Bedingung (innerhalb AB) für $\frac{P}{Q}$ ist, da der Nenner positiv ist, an die Bedingung $5l_1 > 3l_2$ gebunden, die zweite (innerhalb BE) ebenso an die Bedingung $5l_1 < 3l_2$. Demgemäß gilt:

Wenn $5l_1 > 3l_2$ ist, kann nur innerhalb AB eine gefährliche Stelle liegen, sie tritt dort aber nur auf, wenn die zugehörige Bedingung für $\frac{P}{Q}$ erfüllt ist.

Wenn $5l_1 < 3l_2$ ist, kann nur innerhalb BE eine gefährliche

Stelle liegen, sie tritt dort aber nur auf, wenn die zugehörige Bedingung für $\frac{P}{Q}$ erfüllt ist.

Für $5l_1 > 3l_2$ und $\frac{P}{Q} \geqq \frac{l^2(5l_1 - 3l_2)}{4l_2^2(3l - l_2)}$ folgt im Hinblick auf die erste Entwickelung $R_1 \geqq l_1\gamma$, d. h. in diesem Falle kann nur B gefährlich sein.

Für $5l_1 < 3l_2$ und $\frac{P}{Q} \geqq \frac{l^2(5l_1 - 3l_2)}{4(2l^3 - 3ll_2^2 + l_2^3)}$ folgt im Hinblick auf die zweite Entwickelung $R_2 \geqq l_2\gamma$, d. h. in diesem Falle kann nur B gefährlich sein.

Für die Grenze, welche durch $5l_1 = 3l_2$, d. h. durch $l_1 = \frac{3}{8}l$ und $l_2 = \frac{5}{8}l$ bezeichnet wird, ist $R_1 = \frac{475}{1024}P + \frac{3}{8}Q$ und $R_2 = \frac{549}{1024}P + \frac{5}{8}Q$, während $l_1\gamma = \frac{3}{8}Q$ und $l_2\gamma = \frac{5}{8}Q$ ist. Die Vertikalkraft ändert sich also hier beim Überschreiten der Stelle B von links aus im ganzen um $\frac{3}{8}Q + P$, so daß ihr ursprünglicher Wert $-\frac{475}{1024}P - \frac{3}{8}Q$ für B in $+\frac{549}{1024}P$ übergeht, d. h. B ist gefährlich.

Da außerdem bei E ein gefährlicher Querschnitt liegen kann, so sind im allgemeinen drei Momente als relativ gefährlich zu bezeichnen, und zwar

1) für $5l_1 > 3l_2$ die Stelle, die vom linken Ende die Entfernung $\frac{R_1}{\gamma}$ hat und für welche

$$Mo_{max} = \frac{Pl_1l_2(2l_1 + l_2)}{2l^2} + Q\frac{l}{8} \quad \ldots\ldots 344)$$

ist, und die Stelle B und die Stelle E;

2) für $5l_1 < 3l_2$ die Stelle, die vom rechten Ende die Entfernung $\frac{R_2}{\gamma}$ hat und für welche

$$Mo_{max} = \frac{Pl_1l_2^2(3l_1 + 2l_2)}{2l^3} + Q\frac{(3l_2 - l_1)l_1}{8l} \quad \ldots 345)$$

ist, und die Stelle B und die Stelle E;

3) für $5l_1 = 3l_2$ die Stellen B und E.

Für die Stellen B und E gilt stets

$$Mo_B = -R_1l_1 + \tfrac{1}{2}\gamma l_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots 346\,a)$$

und

$$Mo_E = -R_1l + Pl_2 + \tfrac{1}{2}Ql \quad \ldots\ldots 346\,b)$$

Welches Maximum unter den relativen Größtwerten in jedem Falle bei gegebenen Werten von $l_1 : l_2$ und $P : Q$ das absolute Maximum ist, läßt sich durch eine Vergleichung der oben angegebenen Werte für Mo feststellen. Zweckmäßiger ist es, die fraglichen Werte von Fall zu Fall zahlenmäßig darzustellen und den größten dabei gefundenen Wert in die Festigkeitsgleichung einzusetzen, um zu dimensionieren.

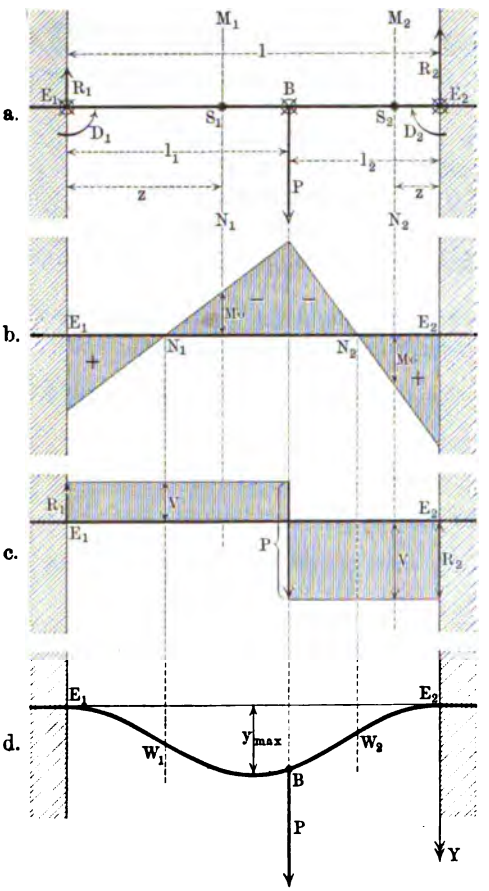
Natürlich führt auch die zeichnerische Vereinigung der Momentflächen des Falles a) und des Falles b) zu einer Bestimmung des absoluten Maximums für Mo.

Die Durchbiegung für B beträgt in allen Fällen

$$\frac{P}{E\mathfrak{T}r}\,\frac{l_1^2 l_2^3(4l_1+3l_2)}{12\,l^3}+\frac{Q}{E\mathfrak{T}r}\,\frac{l_1 l_2^2(3l_1+l_2)}{48\,l}\quad\ldots\quad 347)$$

152. Der beiderseits eingespannte prismatische Balken (vierter Fall der einfachen Befestigung). Der Stab ist an beiden Enden E_1 und E_2 eingeklemmt, d. h. so befestigt, daß die Achse vor und nach der Biegung in E_1 und E_2 in derselben Richtung austritt.

Fig. 686.



a) Belastung des wagerechten Trägers durch eine Einzellast. In Fig. 686 stellt $\overline{E_1E_2}$ die Achse des Trägers dar, während $[P]$ in B die Belastung bezeichnet. Für die Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$ und die Momente $[D_1]$ und $[D_2]$ der Einklemmungen bei E_1 und E_2 findet man mit Hülfe der Statik bei Ausschluß der Elasticitätslehre nur zwei Gleichungen, so daß wieder eine statisch-unbestimmte Aufgabe vorliegt. Man hat unmittelbar

$$1)\quad R_1+R_2=P$$

und findet ferner für einen Schnitt durch B, unter Benutzung des rechten und des linken Stückes

$$2)\quad D_1-R_1l_1=D_2-R_2l_2.$$

Die anderen beiden Gleichungen, welche zur Bestimmung von R_1, R_2 und D_1, D_2 nötig sind, erhält man am einfachsten, wenn man einmal die Einklemmung bei E_2 und einmal die Einklemmung bei E_1 beseitigt denkt und die Durchbiegungen der entsprechenden Freiträger bestimmt, unter dem Einflusse von R_1, R_2 und D_1, D_2 und P.

Fällt die Einklemmung bei E_1 fort, so hat das frei gewordene Ende gemäß S. 945 die Durchbiegung

$$\tfrac{1}{3}\frac{Pl_2^3}{E\mathfrak{T}r}+\tfrac{1}{2}\frac{Pl_1l_2^2}{E\mathfrak{T}r}-\tfrac{1}{3}\frac{R_1l^3}{E\mathfrak{T}r}+\tfrac{1}{2}\frac{D_1l^2}{E\mathfrak{T}r}.$$

Fällt die Einklemmung bei E_2 fort, so hat das frei gewordene Ende gemäß S. 945 die Durchbiegung

$$\frac{1}{3}\frac{Pl_1^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{Pl_1^2 l_2}{E\mathfrak{T}r} - \frac{1}{3}\frac{R_2 l^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{1}{2}\frac{D_2 l^2}{E\mathfrak{T}r}.$$

Sollen $[R_1]$ und $[D_1]$ die Einklemmung bei E_1 ersetzen, so muß die erste Durchbiegung Null sein; Entsprechendes gilt für die zweite. Man hat also für die Bestimmung von R_1, R_2, D_1, D_2 das lineare Gleichungssystem

1) $R_1 + R_2 = P$,
2) $D_1 - R_1 l_1 = D_2 - R_2 l_2$,
3) $\frac{1}{3}Pl_2^3 + \frac{1}{2}Pl_1 l_2^2 - \frac{1}{3}R_1 l^3 + \frac{1}{2}D_1 l^2 = 0$,
4) $\frac{1}{3}Pl_1^3 + \frac{1}{2}Pl_1^2 l_2 - \frac{1}{3}R_2 l^3 + \frac{1}{2}D_2 l^2 = 0$.

Durch Addition von 3) und 4) folgt sofort mit Rücksicht auf 1)

5) $D_1 + D_2 = \frac{l_1 l_2}{l} \cdot P$.

Da man gemäß 2) hat $R_1 l_1 - R_2 l_2 = D_1 - D_2$, so multiplizieren wir ferner 3) mit l_1 und 4) mit l_2 und subtrahieren dann, wobei sich mit Rücksicht auf 5) ergiebt

6) $D_1 l_1 = D_2 l_2$.

Aus 5) und 6) folgt dann sofort

7) $\boldsymbol{D_1 = \frac{l_1 l_2^2}{l^2} \cdot P}$ und $\boldsymbol{D_2 = \frac{l_1^2 \cdot l_2}{l^2} \cdot P}$ . . . . . 348)

Nun ist endlich nach 1) und 2) mit Rücksicht auf 7)

8) $\boldsymbol{R_1 = \frac{P \cdot l_2^2 (3 l_1 + l_2)}{l^3}}$ und $\boldsymbol{R_2 = \frac{P l_1^2 (3 l_2 + l_1)}{l^3}}$ 349)

Für einen Schnitt $M_1 N_1$ ist für $E_1 S_1 = z$ bei Benutzung des linken Balkenstückes

$$Mo = D_1 - R_1 z.$$

Für $z = 0 \ldots l_1$ ergiebt sich $Mo = D_1 \ldots D_1 - R_1 l_1$, wobei

$$D_1 - R_1 l_1 = -2P\frac{l_1^2 l_2^2}{l^3}$$

das Moment für B, welches Mo_B heißen mag, bezeichnet.

Für einen Schnitt $M_2 N_2$ ist für $E_2 S_2 = z$ bei Benutzung des rechten Balkenstückes

$$Mo = D_2 - R_2 z.$$

Für $z = 0 \ldots l_2$ ergiebt sich $Mo = D_2 \ldots D_2 - R_2 l_2$, wobei

$$D_2 - R_2 l_2 = -2P\frac{l_1^2 l_2^2}{l^3}$$

wieder das Moment für B darstellt.

Die graphische Darstellung des Momentes zeigt Fig. 686 b. Gefährlich sind die Querschnitte bei E_1, B und E_2, deren Momente $Mo_{E_1} = D_1$, Mo_B und $Mo_{E_2} = D_2$ der Proportion genügen

$$Mo_{E_1} : Mo_B : Mo_{E_2} = l_2 : \frac{2 l_1 l_2}{l} : l_1.$$

Dividiert man auf der rechten Seite Glied für Glied durch $2 l_1 l_2$, so erhält man

$$Mo_{E_1} : Mo_B : Mo_{E_2} = \frac{1}{2 l_1} : \frac{1}{l} : \frac{1}{2 l_2} \quad \ldots \ldots \quad 350)$$

Für $l_1 > l_2$ ist $l_1 = \frac{1}{2} l + \varepsilon$ und $l_2 = \frac{1}{2} l - \varepsilon$, unter ε eine positive Größe verstanden; hier ist also

$$Mo_{E_1} : Mo_B : Mo_{E_2} = \frac{1}{l + 2\varepsilon} : \frac{1}{l} : \frac{1}{l - 2\varepsilon},$$

d. h. $Mo_{E_1} < Mo_B < Mo_{E_2}$, es wird also Mo_{E_2} am gefährlichsten. Für $l_1 < l_2$ folgt Entsprechendes.

Für $l_1 \lessgtr l_2$ liegt demnach der gefährlichste Querschnitt stets am eingeklemmten Ende des kürzeren Stückes.

Bei Mittelbelastung ($l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$) ist $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} P$ und

$$Mo_{E_1} = Mo_B = Mo_{E_2} = \frac{1}{8} P l \quad \ldots \ldots \quad 351)$$

d. h. hier sind die Momente für E_1, B, E_2 gleich gefährlich.

Die Festigkeitsgleichung lautet hier für $l_1 > l_2$

$$Mo_{E_2} = k \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w} \quad \ldots \ldots \quad 352)$$

Um die Biegungslinie zu bestimmen, hat man

für $E_1 B$ mit $E_1 B$ als Z-Achse	für $E_2 B$ mit $E_2 B$ als Z-Achse
$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_1''(z) = D_1 - R_1 z$	$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_2''(z) = D_2 - R_2 z$
$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_1'(z) = D_1 z - \frac{1}{2} R_1 z^2$	$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_2'(z) = D_2 z - \frac{1}{2} R_2 z^2$
$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_1(z) = \frac{1}{2} D_1 z^2 - \frac{1}{6} R_1 z^3$	$E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f_2(z) = \frac{1}{2} D_2 z^2 - \frac{1}{6} R_2 z^3$

Die zunächst auftretenden Konstanten sind hier (vergl. E_1 und E_2) sämtlich Null. Setzt man für den gemeinsamen Punkt B, unter Berücksichtigung des entgegengesetzten Verlaufes der beiden Z-Achsen, für beide Stücke die Winkelabweichungen und die Durchbiegungen an, so erhält man zwei Gleichungen für R_1, R_2 und D_1, D_2, welche statt der oben benutzten Gleichungen 3) und 4) im Verein mit 1) und 2) für die Bestimmung jener vier Größen dienen können.

Um das Maximum der Durchbiegung zu bestimmen, betrachten wir $f_1'(z) = 0$ für $E_1 B$, woraus neben $z = 0$ folgt $z = \frac{2 D_1}{R_1} = \frac{2 l_1}{3 l_1 + l_2} \cdot l$; diesem Werte entspricht

$$y_{max} = \frac{2}{3} \frac{P}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \frac{l_1^3 l_2^2}{(3 l_1 + l_2)^2}.$$

Da z im Stücke $E_1 B$ in den Grenzen $0 \ldots l_1$ liegt, so ist das Maximum nur vorhanden für

$$\frac{2 l_1}{3 l_1 + l_2} \cdot l \leqq l_1.$$

Für $l_1 > l_2$ ist wieder $l_1 = \frac{1}{2} l + \varepsilon$ für ein positives ε, so daß die linke Seite der Ungleichung $\frac{2 l}{2 l + 2 \varepsilon} \cdot l_1$, also $< l_1$ wird.

Für $l_1 < l_2$ ist ebenso $l_1 = \frac{1}{2}l - \varepsilon$, so daß die linke Seite $\frac{2l}{2l - 2\varepsilon} \cdot l_1$, also $> l_1$ wird.

Entsprechendes gilt für das Stück E_2B.

Demnach liegt das Maximum der Durchbiegung für $l_1 \gtrless l_2$ stets im größeren Stücke.

Die Durchbiegung für B beträgt

$$\frac{1}{E\mathfrak{T}r}\left(\tfrac{1}{2}D_1 l_1^2 - \tfrac{1}{6}R_1 l_1^3\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{E\mathfrak{T}r}\left(\tfrac{1}{2}D_2 l_2^2 - \tfrac{1}{6}R_2 l_2^3\right),$$

woraus beide Male der Wert

$$y_B = \tfrac{1}{3}\frac{l_1^3 l_2^3}{l^3} \cdot \frac{P}{E\mathfrak{T}r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 353)$$

folgt.

Für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$ fällt das Maximum zusammen mit der belasteten Mitte B; hier gilt

$$y_{max} = \tfrac{1}{192}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 354)$$

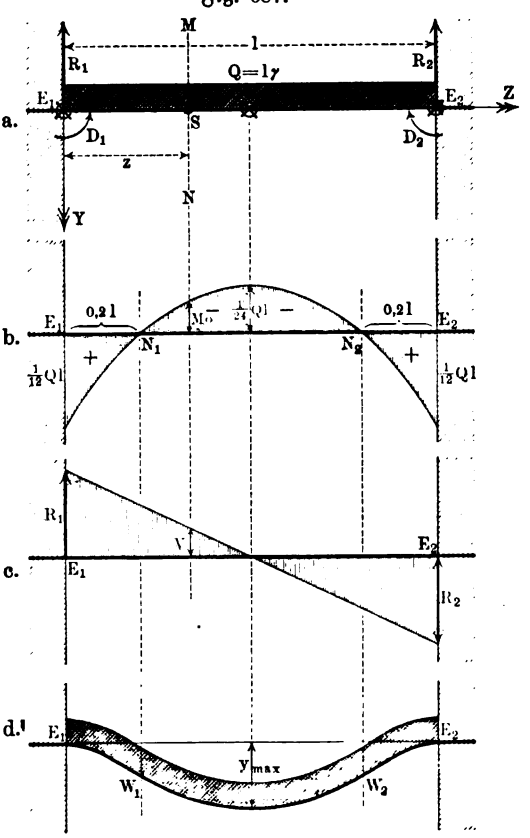
Das Moment verschwindet innerhalb E_1B für $z = \frac{D_1}{R_1}$ und innerhalb E_2B für $z = \frac{D_2}{R_2}$, also für die Mitte zwischen den Einklemmungen und den Maximalstellen.

Für diese Stellen, welche stets vorhanden sind (vergl. Fig. 686 b), hat die elastische Linie Wendepunkte (vergl. Fig. 686 d).

Für den Fall der Mittelbelastung ($l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$) liegen die Wendepunkte auf $l/4$ von jedem Ende, in gleicher Entfernung vom Maximum der Durchbiegung (Mitte).

b) Gleichmäßige Belastung des wagerechten Trägers. In Fig. 687 stellt E_1E_2 die Achse des Trägers dar, während das darüber schraffierte Rechteck die gleichmäßige Belastung andeutet, welche wieder

Fig. 687.



γ kg für den laufenden Meter betragen mag. Wegen der Symmetrie ist hier

$$R_1 = R_2 = \tfrac{1}{2} Q$$

für $Q = l\gamma$ und $D_1 = D_2 = D$.

Um den Wert D von $[D_1]$ oder $[D_2]$ festzustellen, der statisch-unbestimmt bleibt, denken wir wieder die Einklemmung bei E_1 beseitigt. Die Durchbiegung des entsprechenden Freiträgers ist gemäß S. 945,

$$-\tfrac{1}{3}\frac{Rl^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} + \tfrac{1}{8}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} + \tfrac{1}{2}\frac{Dl^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Sollen $[R_1]$ und $[D_1]$ die Einklemmung bei E_1 ersetzen, so muß diese Durchbiegung den Wert Null haben, woraus ($R = \frac{1}{2} Q$) sofort folgt

$$D = \tfrac{1}{12} Ql \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 355)$$

Für den Schnitt MN ist für $E_1 Z$ als Achse

$$\begin{aligned} Mo &= -zR_1 + D_1 + \tfrac{1}{2} z(\gamma z) \\ &= -\tfrac{1}{2} zQ + \tfrac{1}{2}\gamma z^2 + \tfrac{1}{12} Ql. \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung von Mo führt zu der Parabel der Fig. 687 b.

Um das Maximum von Mo zu bestimmen, bilden wir die Ableitung, aus deren Annullierung $-\frac{1}{2} Q + \gamma z = 0$ sich ergiebt

$$z = \frac{Q}{2\gamma} = \frac{l\gamma}{2\gamma} = \tfrac{1}{2} l.$$

Für $z = \frac{1}{2} l$ ist

$$Mo_{max} = -\tfrac{1}{24} Ql = -\tfrac{1}{2} D.$$

Die gefährlichsten Querschnitte liegen also an den Enden E_1 und E_2. Die Festigkeitsgleichung lautet hier

$$\tfrac{1}{12} Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 356)$$

Für die Biegungslinie gilt, falls $E_1 S$ als Z-Achse genommen wird,

$$E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, f''(z) = -\tfrac{1}{2} z\, l\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma z^2 + \tfrac{1}{12} l^2\gamma,$$

woraus

$$E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, f'(z) = -\tfrac{1}{4} z^2 l\gamma + \tfrac{1}{6}\gamma z^3 + \tfrac{1}{12} l^2\gamma z$$

und

$$E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, f(z) = -\tfrac{1}{12} z^3 l\gamma + \tfrac{1}{24}\gamma z^4 + \tfrac{1}{24} l^2\gamma z^2$$

folgt, da die ursprünglich auftretenden Konstanten (vergl. E_1) wieder Null werden. Um das Maximum von y zu bestimmen, betrachten wir $f'(z) = 0$, d. h. $z \,.\, \gamma[-\frac{1}{4} zl + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{12} l^2] = 0$, woraus, abgesehen von $z = 0$ folgt $z = \frac{3l}{4} \pm \frac{l}{4}$. Da z innerhalb des Stabes liegen muß, so ist $z = \frac{1}{2} l$ und dem entsprechend

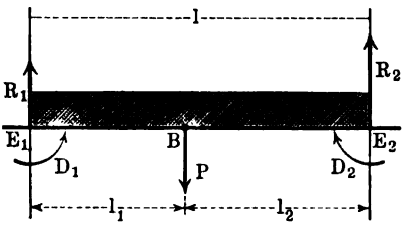
$$y_{max} = \tfrac{1}{384}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 357)$$

Das Moment verschwindet für $\gamma(-\frac{1}{2} lz + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{12} l^2) = 0$, d. h. für $z = \frac{1}{6} l(3 \pm \sqrt{3})$. Die Werte $z_1 = \frac{1}{6} l(3 + \sqrt{3})$ und $z_2 = \frac{1}{6} l(3 - \sqrt{3})$

liegen symmetrisch zur Mitte, da $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} l$ ist. Man hat $z_1 = 0{,}2113\, l$ und $z_2 = 0{,}7887$.

Den damit bestimmten spannungslosen Querschnitten entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinien (vergl. Fig. 687 d).

Fig. 688.



c) Vereinigung von Fall a) und b). Man hat hier mit Rücksicht auf die Fälle a) und b) von vornherein die Gewißheit, daß der gefährliche Querschnitt im eingeklemmten Ende des kürzeren Stabstückes liegt.

Es ist hier für $Q = l\gamma$

$$R_1 = P\frac{(3\,l_1 + l_2)\,l_2^2}{l^3} + \frac{Q}{2} \quad \text{und} \quad R_2 = P\frac{(l_1 + 3\,l_2)\,l_1^2}{l^3} + \frac{Q}{2} \qquad 358)$$

Für $l_1 < l_2$ ist die Stelle E_1 die gefährlichste; für sie ist

$$Mo_{max} = P\frac{l_1 l_2^2}{l^2} + \frac{Ql}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 359)$$

Für die Durchbiegung von B findet man

$$y_B = \frac{P}{E\mathfrak{T}r} \cdot \frac{l_1^3 l_2^3}{3\,l^3} + \frac{Q}{E\mathfrak{T}r} \cdot \frac{l_1^2 l_2^2}{24\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 360)$$

Im Sonderfalle $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$ ist

$$Mo_{max} = \tfrac{1}{8} Pl + \frac{Ql}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 361)$$

und es beträgt die Durchbiegung in der Mitte

$$\tfrac{1}{192}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r} + \tfrac{1}{384}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 362)$$

Diese Ergebnisse folgen auch nach dem Principe der Übereinanderlagerung.

153. Die Berechnung der Abmessungen nach der Festigkeitsgleichung und nach der Formänderungsgleichung. Man berechnet die Abmessungen eines Balkens in der Praxis im allgemeinen nach der Festigkeitsgleichung, gelegentlich auch nach der Formänderungsgleichung.

Um letztere benutzen zu können, führt man für die größte Durchbiegung (y_{max}) eine, aus der Erfahrung zu bestimmende obere Grenze ein, welche man als Bruchteil der Trägerlänge $\left(\frac{1}{n} l\right)$ zu bestimmen pflegt.

Ist z. B. für eine Konstruktion $y_{max} = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$, so muß man $\mathfrak{T}r$ so wählen, daß y_{max} die bestimmte Grenze $\frac{1}{n} l$ nicht überschreitet, und hat also den Querschnitt so zu wählen, daß

ist.

$$\mathfrak{T}r \geqq \frac{Pl^2}{48\,E} \cdot n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363)$$

Da man die Berechnung des Trägers gemäß der Festigkeitsgleichung stets vorzunehmen hat, so pflegt man in der Praxis die Berücksichtigung der Durchbiegung an jene Rechnung anzulehnen.

Wir zeigen dies zunächst für ein Beispiel.

Für einen Zweistützenträger mit Mittelbelastung lautet die Festigkeitsgleichung $k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{4} Pl$ und die Gleichung für das Maximum der Durchbiegung, welches d genannt werden mag, $d = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{E \mathfrak{T}r}$. Aus den beiden Gleichungen folgt, unter Berücksichtigung von $w = \frac{1}{2} h$ die Beziehung

$$n \cdot \frac{k}{6E} = \frac{h}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 364)$$

Berechnet man also den Träger nach der Festigkeitsgleichung und findet man dann, daß seine Höhe h der Bedingung

$$h \geqq \left(\frac{n \cdot k}{6E}\right) \cdot l$$

genügt, so ist auch die obere Grenze der Durchbiegung $\left(\frac{1}{n} l\right)$ nicht überschritten.

Ist aber $h < \left(\frac{n \cdot k}{6E}\right) \cdot l$, so muß man einen Träger von größerem Querschnitte wählen, um auch der Bedingung der Durchbiegung gerecht zu werden.

Dies geschieht in Anlehnung an die Festigkeitsgleichung folgendermaßen. Die Gleichung der Durchbiegung fordert $\mathfrak{T}r' = \frac{Pl^2}{48E} \cdot n$, während die Festigkeitsgleichung $k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{4} Pl$ ergeben hat, so daß

$$\mathfrak{T}r' = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l \cdot n}{12E}$$

und ferner

$$\mathfrak{T}r' = \frac{1}{4} Pl \cdot \frac{l \cdot n}{12E} = k \cdot \left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right) \cdot \frac{l \cdot n}{12E} = \frac{kn}{12E} \cdot \left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right) \cdot l \quad 365)$$

ist, wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ der Querschnittsmodul ist, welcher der Berechnung nach der Festigkeitsgleichung entsprach.

Setzt man $\frac{n \cdot k}{6E} = \zeta$, so lautet die Bedingung, welche aus der Gleichung Nr. 364) folgt

$$h \geqq \zeta \cdot l \quad \ldots \ldots \ldots \quad 366\,a)$$

Da l für die Rechnung in Centimetern ausgedrückt wird, so ist auch l in der Gleichung Nr. 365) in Centimetern dargestellt, während es für die Praxis geeigneter ist, l dort in Metern darzustellen. Setzt man, um dies zu erreichen, $\frac{100\,kn}{12E} = \eta$, so entspricht der Gleichung Nr. 365) die Bedingung

$$\mathfrak{T}r' \geqq \eta\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right) \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad 366\,b)$$

wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ die Querschnittszahl mit Centimetern als Einheit ist, wie sie der Berechnung nach der Festigkeitsgleichung entspricht, während l jetzt in Metern angesetzt ist.

Man berechnet nun für die Praxis Tabellen für ζ und η.

Für Schmiedeeisen ist $n = \frac{l}{d} = 600$ bis 1000 und $k = 750$ Atm. bis 1000 Atm., während im Mittel $E = 2\,000\,000$ ist. Dem Zweistützenträger aus Schmiedeeisen mit Mittelbelastung entspricht demnach eine Tabelle von folgender Art

$n = \frac{l}{d} = 600$		$n = \frac{l}{d} = 1000$	
$k = 750$	1000	$k = 750$	1000
$\zeta = {}^{3}/_{80}$	${}^{1}/_{20}$	$\zeta = {}^{1}/_{16}$	${}^{1}/_{12}$
$\eta = {}^{15}/_{8}$	${}^{5}/_{2}$	$\eta = {}^{25}/_{8}$	${}^{25}/_{6}$

Dem Zweistützenträger aus Schmiedeeisen mit gleichmäßiger Belastung entspricht ebenso eine Tabelle folgender Art

$n = \frac{l}{d} = 600$		$n = \frac{l}{d} = 1000$	
$\zeta = {}^{3}/_{64}$	${}^{1}/_{16}$	$\zeta = {}^{5}/_{64}$	${}^{5}/_{48}$
$\eta = {}^{75}/_{32}$	${}^{25}/_{8}$	$\eta = {}^{125}/_{32}$	${}^{125}/_{24}$

Für einen Zweistützenträger aus Schmiedeeisen mit gleichmäßiger Belastung und Mittelbelastung gilt für l in Metern die Formel

$$\mathfrak{T}r' \geqq 100\,\eta\,\frac{P + \frac{5}{8}Q}{4k} \cdot l^2,$$

in der P die Mittelbelastung und Q die gleichmäßige Belastung darstellt, während η aus der Tabelle für Mittelbelastung zu entnehmen ist.

154. Die verjüngten Träger, welche den Beispielen der §§ 149 bis 152 entsprechen (Trägerformen gleicher Spannung oder gleichen Widerstandes). Da die Abmessungen eines Querschnittes stets für die gefährliche Stelle (Bruchstelle) bestimmt werden, an welcher $[Mo]$ und damit σ_w das Maximum seines Zahlenwertes hat, so dürfen die Querschnitte für andere Stellen des Balkens kleinere Abmessungen haben, entsprechend den geringeren Werten von $[Mo]$ bezw. σ_w. Die Verwendung prismatischer Balken ist demgemäß eine Materialverschwendung, der man durch eine entsprechende Verjüngung der Balken vom gefährlichen Querschnitte aus begegnen kann. Ob gegenüber den Herstellungskosten solcher verjüngten Formen, bei welchen ja jeder Längsschnitt dieselben ganz bestimmten Begrenzungslinien zeigen muß, die dabei erreichte Materialersparnis wirklich einen Vorteil

bietet, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Außerdem ist noch allgemein zu berücksichtigen, daß die Durchbiegung bei den verjüngten Balkenformen natürlich größer ist als bei den entsprechenden prismatischen, so daß deren Verwendung auch in dieser Hinsicht von Fall zu Fall geprüft werden muß.

Die Verjüngung eines prismatischen Balkens, welche durch vorstehende Überlegungen bestimmt wird, geschieht stets so, daß dabei für alle Querschnitte σ_w denselben Wert erhält, nämlich den Wert der gefährlichen Stelle am ursprünglich prismatisch geformten Balken, welcher bei Ausnutzung des Materiales mit der Konstruktionsspannung k übereinstimmt. Man nennt diese verjüngte Balkenform deshalb Form gleicher Spannung oder auch Form gleichen Widerstandes. Natürlich hängt jede solche Form gleicher Spannung sowohl von der Befestigungsart als auch von der Art der Belastung der Träger ab.

Als allgemeine Konstruktionsbedingung für alle diese Formen ergiebt sich aus der Festigkeitsgleichung für konstante Werte von σ_w, daß

$$Mo : \frac{\mathfrak{T}r}{w}$$

eine Konstante sein muß.

Für zwei Stellen des Balkens, die durch die Marken 1 und 2 hervorgehoben werden mögen, hat man also

$$Mo_1 : \frac{\mathfrak{T}r_1}{w_1} = Mo_2 : \frac{\mathfrak{T}r_2}{w_2}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{T}r_1}{w_1} : \frac{\mathfrak{T}r_2}{w_2} = Mo_1 : Mo_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 367\,a)$$

d. h. die Verjüngung muß so vorgenommen werden, daß die Querschnittszahlen für die einzelnen Stellen des Balkens den entsprechenden Momenten der äußeren Kräfte proportional sind.

Zeichnet man die gefährliche Stelle des ursprünglich prismatischen Balkens durch die Marke 0 aus, so gilt für einen beliebigen Querschnitt

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = Mo : Mo_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 367\,b)$$

Da alle Träger, welche nicht selbst Freiträger sind, durch geeignete Schnitte in Freiträger zerlegt werden können, wie bereits an Beispielen gezeigt worden ist, so betrachten wir die Verjüngung nur für Freiträger, und zwar genügt es für die Praxis, den wagerechten Freiträger mit Endbelastung und mit gleichmäßiger Belastung zu behandeln.

a) Für Freiträger mit Endbelastung (Fig. 689) ist $Mo = Pz$ und, da der gefährliche Querschnitt in E liegt, $Mo_0 = Pl$. Man hat also hier

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = Pz : Pl = z : l,$$

d. h. hier verhalten sich die Querschnittszahlen der einzelnen Stellen wie ihre Abstände vom freien Ende.

Nach dieser Regel sind für die einzelnen Querschnittsformen die weiteren Entwickelungen durchzuführen. Dabei sind die Abmessungen für die gefährliche Stelle (E) zu bestimmen, wie früher, d. h. bei Ausnutzung des Materiales ($\sigma_w = k$) durch die Festigkeitsgleichung

$$Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 368)$$

Als Beispiel wählen wir zunächst den kreisförmigen Querschnitt. Für ihn ist bei einem Radius r gegeben $\mathfrak{T}r = \frac{1}{4}r^4\pi$ und $w = r$, also $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{4}r^3\pi$. Ist r_0 der Radius für die gefährliche Stelle (E) des ursprünglich prismatischen Balkens, so ist also hier

$$r^3 : r_0^3 = z : l.$$

Fig. 689.

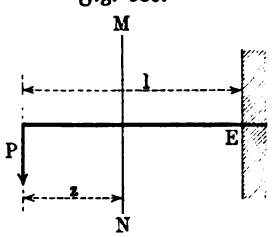
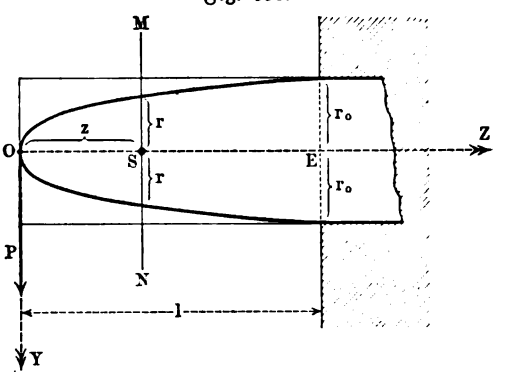


Fig. 690.



Dabei gilt für r_0 bei Ausnutzung des Materiales

$$Pl = k \cdot \tfrac{1}{4}r_0^3\pi.$$

Berechnet man für $z = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots \frac{nl}{n}$ die Werte von r aus der gefundenen Gleichung, so gelangt man mit beliebiger Genauigkeit (n) zu der Balkenform der Fig. 690, bei welcher die begrenzende Linie eine kubische Parabel ist; für $r = y$ ist ihre Gleichung $y^3 = z \cdot \frac{r_0^3}{l} = z \cdot \frac{4P}{k\pi}$. Für die Durchbiegung gilt die Formänderungsgleichung

$$f''(z) = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} = \frac{Pz}{E\mathfrak{T}r}$$

für $\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = z : l$, d. h. sie ist hier

$$f''(z) = \frac{Pl}{E\mathfrak{T}r_0} \cdot \frac{w_0}{w},$$

wobei w für eine bestimmte Form des Querschnittes eine bestimmte Funktion von z ist.

Wählen wir auch hier den kreisförmigen Querschnitt als Beispiel, so ist

$w = r$ und $w_0 = r_0$ und $r^3 : r_0^3 = z : l$, d. h.

$$\frac{w_0}{w} = \sqrt[3]{\frac{l}{z}} = \frac{l^{1/3}}{z^{1/3}} = l^{1/3} \cdot z^{-1/3}.$$

In diesem Falle ist also zu behandeln

$$f''(z) = \frac{P l^{1/3}}{E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} \cdot z^{-1/3}.$$

Daraus folgt zunächst

$$f'(z) = \tfrac{3}{2} \frac{P l^{1/3}}{E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} \cdot z^{2/3} + C.$$

Für $z = l$, d. h. im Punkte E ist $f'(z) = 0$ infolge der wagerechten Einspannung, so daß sich also

$$0 = \tfrac{3}{2} \frac{P l^{1/3}}{E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} \cdot l^{2/3} + C \quad \text{oder} \quad C = -\tfrac{3}{2} \frac{P l^2}{E \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$$

ergiebt. Man hat also

$$f'(z) = \tfrac{3}{2} \frac{P l^{1/3}}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} z^{2/3} - \tfrac{3}{2} \frac{P l^2}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}.$$

Für $z = 0$ ergiebt sich die Winkelabweichung am freien Ende, die bei prismatischen Balken $\frac{1}{2} \frac{P l^2}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ war, als $-\frac{3}{2} \frac{P l^2}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$, d. h. sie ist jetzt anderthalbmal so groß als früher. Weiter folgt nun

$$f(z) = \tfrac{9}{10} \frac{P l^{1/3}}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} z^{5/3} - \tfrac{3}{2} \frac{P l^2}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} \cdot z + C'.$$

Für $z = l$, d. h. im Punkte E ist $f(z) = 0$, woraus sich

$$C' = +\tfrac{3}{5} \frac{P l^3}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$$

ergiebt. Man hat also

$$f(z) = \tfrac{9}{10} \frac{P l^{1/3}}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} z^{5/3} - \tfrac{3}{2} \frac{P l^2}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0} \cdot z + \tfrac{3}{5} \frac{P l^3}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}.$$

Für $z = 0$ ergiebt sich die Durchbiegung am freien Ende, die beim prismatischen Balken $\frac{1}{8} \frac{P l^3}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ war, als $\frac{3}{5} \frac{P l^3}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$, d. h. sie ist jetzt gegen früher gewachsen im Verhältnis $\frac{3}{5} : \frac{1}{8}$ oder $9 : 5$.

Da das hier benutzte Koordinatensystem (ursprüngliche Lage der Achse mit O als Nullpunkt u. s. w.) sich von den früher verwendeten durch die Richtung der Z-Achse unterscheidet, so ergab sich $f'(z)$ für $z = 0$ hier als negativer Wert.

Wir betrachten ferner das Rechteck von den Seiten b und h als Form des Querschnittes.

Bei wagerechter Achse des Balkens und senkrechter Stellung von h ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{b h^3}{12}$ und $w = \frac{h}{2}$, also $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w} = \frac{b h^2}{6}$. Sind b_0 und h_0 die Werte von b und h für die gefährliche Stelle (E) des ursprünglich prismatischen Balkens,

so ist also hier

$$bh^2 : b_0 h_0^2 = z : l.$$

Dabei gilt für b_0 und h_0 bei Ausnutzung des Materiales

$$Pl = k \cdot \frac{b_0 h_0^2}{6}.$$

Da hier zwei Abmessungen b und h in Frage kommen, so hat man eine Bestimmung für diese Größen frei.

Legt man die ganze Verjüngung in die Höhe h, so daß die Breite b konstant ($= b_0$) bleibt, so gilt

$$h^2 : h_0^2 = z : l.$$

Berechnet man für $z = \frac{1}{n} l, \frac{2}{n} l, \cdots \frac{n}{n} l$ die Werte von h aus der gefundenen Gleichung, so gelangt man mit beliebiger Genauigkeit (n) zu der Balkenform der Fig. 691, bei welcher die begrenzende Linie eine gewöhnliche Parabel ist; für $y = \frac{1}{2} h$ ist ihre Gleichung $y^2 = z \cdot \frac{h_0^2}{4l} = z \cdot \frac{3P}{2kb_0}$.

Für die Durchbiegung am freien Ende erhält man hier den Wert $\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}}$ gegen $\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}}$ im früheren Falle.

Fig. 691.

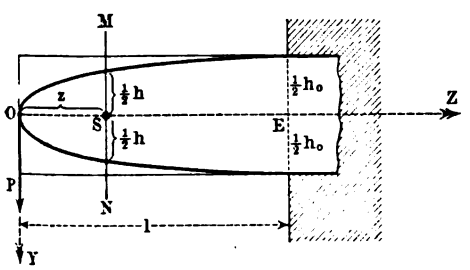
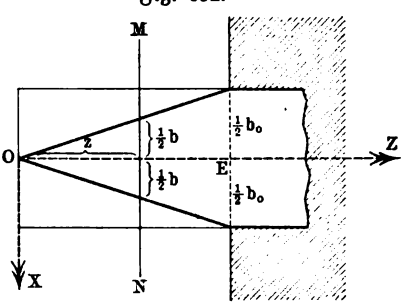


Fig. 692.



Legt man die ganze Verjüngung in die Breite b, so daß die Höhe h konstant ($= h_0$) bleibt, so gilt

$$b : b_0 = z : l.$$

Hier ist die Begrenzung geradlinig, wie die den Grundriß darstellende Fig. 692 zeigt.

Für $x = \frac{b}{2}$ ist die untere Gerade gegeben durch die Gleichung

$$x = z \cdot \frac{b_0}{2l} = z \cdot \frac{3P}{kh_0^2},$$

während die obere Gerade durch dieselbe Gleichung für $-x$ dargestellt wird.

Für die Durchbiegung am freien Ende erhält man hier den Wert $\frac{1}{2} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}}$ gegen $\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}}$ im früheren Falle.

Dieser Träger, welcher als sogen. „Dreiecksfeder“ ausgeführt wird, hat

die besondere Eigenschaft, sich nach dem Kreisbogen durchzubiegen, da für ihn $\varrho = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} = \frac{12\,Pz}{Ebh^3}$ eine Konstante ist wegen $\frac{z}{b} = \frac{l}{b_0}$.

Läßt man zugleich Verjüngung nach Höhe und Breite zu, und zwar so, daß die Querschnitte einander ähnlich bleiben, so ist für $b = \mu h$

$$h^3 : h_0^3 = z : l \quad \text{oder} \quad b^3 : b_0^3 = z : l,$$

d. h. man erhält für Grundriß und Aufriß wieder kubische Parabeln.

b) Für Freiträger mit gleichmäßiger Belastung (Fig. 693) ist für γ als Belastung des laufenden Meters $Mo = \frac{1}{2}\gamma z^2$ und, da der gefährliche Querschnitt in E liegt, $Mo_0 = \frac{1}{2}\gamma l^2$.

Man hat also hier

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = z^2 : l^2,$$

d. h. hier verhalten sich die Querschnittszahlen der einzelnen Stellen wie die Quadrate ihrer Abstände vom freien Ende.

Fig. 693.

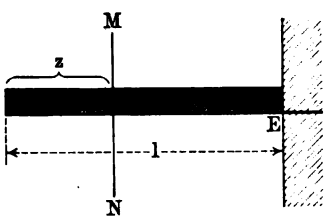
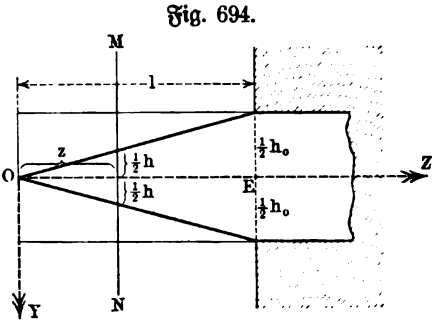


Fig. 694.



Für $Q = l\gamma$ giebt die Festigkeitsgleichung hier bei Ausnutzung des Materiales

$$\tfrac{1}{2}Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist hier

$$r^3 : r_0^3 = z^2 : l^2.$$

Dabei gilt bei Ausnutzung des Materiales $\frac{1}{2}Ql = k \cdot \frac{1}{4}r_0^3\pi$.

Die Begrenzung ist eine halbkubische (semikubische) Parabel, deren Gleichung für $r = y$ lautet $y^3 = z^2 \cdot \frac{r_0^2}{l^2} = z^2 \cdot \frac{2\,Q}{k\pi l}$.

Für das Rechteck ist hier

$$bh^2 : b_0 h_0^2 = z^2 : l^2.$$

Dabei gilt bei Ausnutzung des Materiales $\frac{1}{2}Ql = \frac{1}{6}kb_0h_0^2$.

Bei konstanter Breite ($b = b_0$) hat man also

$$h^2 : h_0^2 = z^2 : l^2 \quad \text{oder} \quad h : h_0 = z : l.$$

Die Begrenzung ist geradlinig, wie Fig. 694 zeigt; für $\frac{h}{2} = y$ ergiebt

sich $y = z \cdot \frac{h_0}{2l} = z \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3Q}{kb_0 l}}$.

Bei konstanter Höhe ($h = h_0$) hat man ferner

$$b : b_0 = z^2 : l^2.$$

Hier wird jede Hälfte der Begrenzung durch je eine Parabel gebildet, wie die den Grundriß darstellende Fig. 695 zeigt. Für $x = \frac{b}{2}$ ist OP gegeben durch die Gleichung

$$x = z^2 \cdot \frac{b_0}{2l^2} = z^2 \cdot \frac{3Q}{2kh_0^2 l}.$$

Auch dieser Träger hat einen Kreisbogen als Begrenzungslinie, da für ihn $\varrho = \frac{Mo}{E \cdot \mathfrak{T}r} = \frac{6\gamma z^2}{Ebh_0^3}$ wegen $\frac{z^2}{b} = \frac{l^2}{b_0}$ eine Konstante ist.

Seine Durchbiegung hat den Wert $\frac{1}{4}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r_0}$, während der entsprechende prismatische Balken $\frac{1}{8}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r_0}$ als Durchbiegung hat.

Läßt man zugleich Verjüngung nach Höhe und Breite zu, und zwar so, daß die Querschnitte einander ähnlich bleiben, so ist für $b = \mu h$ hier

$$h^3 : h_0^3 = z^2 : l^2 \quad \text{oder} \quad b^3 : b_0^3 = z^2 : l^2,$$

d. h. man erhält für Grundriß und Aufriß wieder halbkubische Parabeln.

Fig. 695.

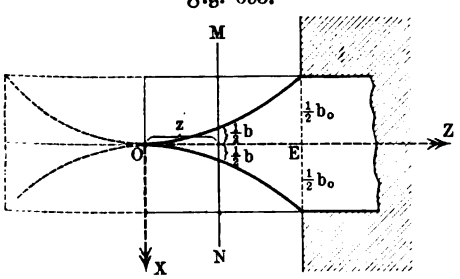
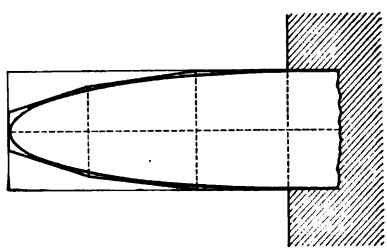


Fig. 696.



c) Für Freiträger mit Endbelastung (P) und gleichmäßiger Belastung ($Q = l\gamma$) gilt ebenso

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = (Pz + \tfrac{1}{2}\gamma z^2) : l(P + \tfrac{1}{2}Q).$$

Bei Ausnutzung des Materiales ist dabei

$$l(P + \tfrac{1}{2}Q) = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0}.$$

In Bezug auf die Herstellung der behandelten Balkenformen ist zu bemerken, daß man mit Rücksicht auf die Kosten u. s. w. die Kurvenbegrenzung der Profile meist nur angenähert ausführt, indem man statt der Kurven ein, diesen umschriebenes Vieleck verwendet; Fig. 696 zeigt dieses für die parabolische Form der Fig. 691.

Natürlich müssen zunächst in der Zeichnung die Profile genau entwickelt werden, ehe man die angenäherte Form bestimmen kann.

Da die kubische Parabel und die halbkubische Parabel zu den minder bekannten Kurven gehören, so fügen wir über deren Konstruktion hier Folgendes ein.

Um die kubische Parabel für OZ als Achse durch die Punkte O und B der Fig. 697 zu legen, kann man z. B. folgendermaßen verfahren.

Fig. 697.

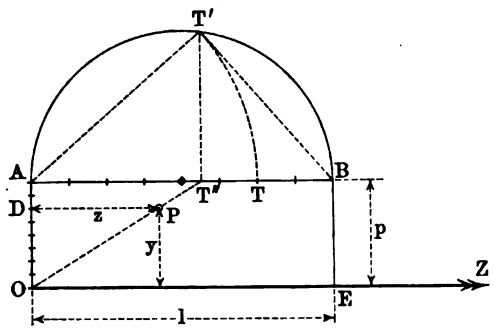
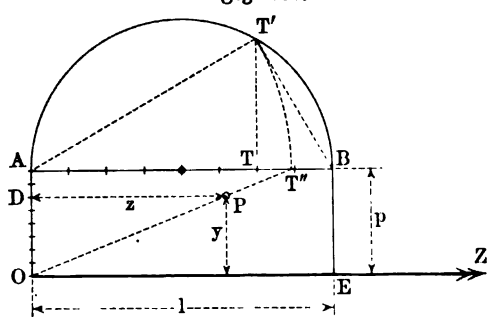


Fig. 698.



Man zerlegt die Seiten OA und AB des Rechtecks der Fig. 697 in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile. Sind D auf OA, von O aus gerechnet, und T auf AB, von A aus gerechnet, entsprechende Teilpunkte, so überträgt man AT durch einen Bogen aus A auf den Halbkreis über AB, so daß $AT' = AT$ ist, projiziert T' auf AB als T'' und zieht OT''. Der Schnitt von OT'' mit der Parallelen durch den T entsprechenden Teilpunkt D ist ein Punkt P des gesuchten Ortes.

Für $OE = l$ und $EB = p$ ist $AT = OD \cdot \frac{l}{p} = y \cdot \frac{l}{p}$. Da ferner $\overline{AT'}^2 = AB \,.\, AT'' = l \,.\, AT''$ ist, so hat man ($AT' = AT$) auch

$$\overline{AT}^2 = y^2 \cdot \frac{l^2}{p^2} = l \,.\, AT''.$$

Da nun $AT'' = z \cdot \frac{p}{y}$ ist, so hat man endlich $y^3 \,.\, l = p^3 \,.\, z$ oder $y^3 : p^3 = z : l$.

Für die halbkubische Parabel der Fig. 698 haben D und T dieselbe Bedeutung, wie in Fig. 697. Hier lotet man T auf den Halbkreis hinauf, so daß $TT' \perp AB$ ist, überträgt AT' durch einen Bogen aus A auf AB, so daß $AT'' = AT'$ ist, und zieht OT''. Der Schnitt von OT'' mit der Parallelen durch den T entsprechenden Teilpunkt D ist ein Punkt P des gesuchten Ortes.

Hier ist nun $\overline{AT'}^2 = AT \,.\, AB = l \,.\, AT$ oder ($AT' = AT''$) auch $\overline{AT''}^2 = l \,.\, AT = \frac{l^2}{p} \cdot OD = y \cdot \frac{l^2}{p}$. Aus $AT'' = z \cdot \frac{p}{y}$ folgt also hier $z^2 \,.\, p^3 = y^3 \,.\, l^2$ oder $y^3 : p^3 = z^2 : l^2$.

Ferner ist zu bemerken, daß man bei der Entwickelung der Aufrisse in der Praxis auch die Ordinaten (y) von einer Horizontalen aus nach einer Seite aufzutragen pflegt, anstatt die Profile von der Achse des Balkens aus nach beiden Seiten (symmetrisch) auszubilden. Es treten dann z. B. statt der Aufrisse von Fig. 691 und Fig. 694 die Aufrisse der Fig. 699 und Fig. 700 ein.

Fig. 699.

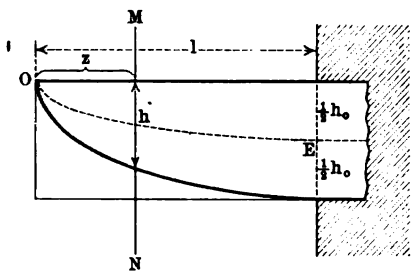
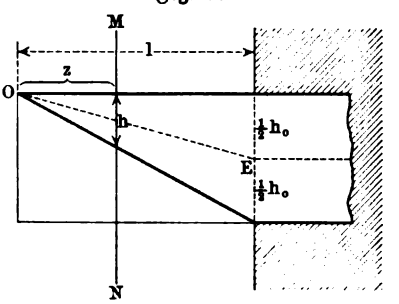


Fig. 700.



Man gelangt dabei infolge der horizontalen Abgleichung zu geeigneten Trägerunterlagen (Konsolträger), doch ist dazu zu bemerken, daß es sich dann bei Fig. 699 um einen Stab mit krummer Mittellinie und bei Fig. 700 um einen Stab mit einer stark geneigten Achse handelt, während die Entwickelungen einen, wenigstens angenähert wagerecht gelagerten Stab mit gerader Mittellinie (Achse) voraussetzen.

Endlich mag noch die Verwendung der gegebenen Freiträgerformen für Zweistützenträger an einigen Beispielen gezeigt werden.

Fig. 701 a.

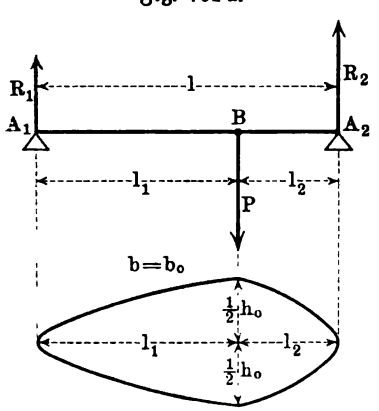


Fig. 701 b.

Fig. 702 a.

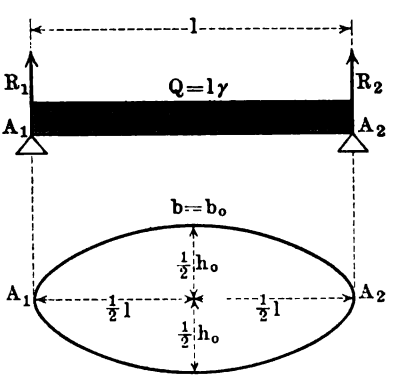


Fig. 702 b.

Für den Fall der Fig. 701 giebt ein Schnitt durch den Belastungspunkt B, in welchem der gefährliche Querschnitt liegt, sofort zwei Freiträger mit den Endbelastungen $R_1 = \frac{l_2}{l} \cdot P$ und $R_2 = \frac{l_1}{l} \cdot P$. Für B müssen die

Abmessungen bestimmt werden, wie früher, d. h. bei Ausnutzung des Materiales durch

$$P \cdot \frac{l_1 l_2}{l} = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 369)$$

Wir führen die Aufgabe noch weiter für den Fall, daß der Querschnitt ein Rechteck von konstanter Breite ($b = b_0$) sein soll. Hier treten nach Fig. 691 gewöhnliche Parabeln als Begrenzung auf, so daß Fig. 701 b die entsprechende verjüngte Form im Aufrisse zeigt. Diese Form kommt für die Gestalt der Hebel und der Balanciers der Dampfmaschinen in Betracht.

Für den Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung ($Q = l\gamma$) ist $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} Q$. Für den gefährlichen Querschnitt in der Mitte ist, wie früher, bei Ausnutzung des Materiales

$$\tfrac{1}{8} Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 370)$$

Hier giebt ein Schnitt durch die Mitte zwei symmetrische Freiträger, welche gleichmäßig ($Q = l\gamma$) belastet sind und außerdem die entgegengesetzte Endlast $\frac{Q}{2}$ tragen (vergl. Fig. 702 a).

Man hat also hier für ein Kreuz in A_1 oder A_2

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = (-\tfrac{1}{2} l\gamma \cdot z + \tfrac{1}{2}\gamma z^2) : (-\tfrac{1}{8} l^2\gamma) = (lz - z^2) : \tfrac{1}{4} l^2 \quad . \quad 371)$$

Für ein Rechteck von konstanter Breite als Querschnitt gilt z. B. hier

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = h^2 : h_0^2,$$

d. h. man hat hier

$$h^2 = \frac{4 h_0^2}{l^2} (lz - z^2).$$

Für $y = \frac{h}{2}$ entsteht daraus für das gesuchte Profil (Aufriß) die Gleichung

$$y^2 = \frac{h_0^2}{l^2} (lz - z^2).$$

Bezieht man diese Gleichung, welche für ein Kreuz in A_1 oder A_2 gilt, auf ein entsprechendes Kreuz in der Mitte, so hat man z durch $\frac{l}{2} \pm z$ zu ersetzen, wobei sich ergiebt

$$\frac{z^2}{(\frac{1}{2} l)^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2} h_0)^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die in Fig. 702 b (a. v. S.) dargestellt ist.

Als Beispiel für eine Balkenform, deren Verjüngung durch andere Überlegungen bestimmt wird als bisher, diene endlich noch die folgende Aufgabe:

Welche Form muß ein Zweistützenträger erhalten, wenn eine Last [P] an jeder beliebigen Stelle des Trägers für diese Belastungsstelle dieselbe Maximalspannung k liefern soll?

Befindet ſich $[P]$ im Abſtande z von A_1 (vergl. Fig. 701 a für $l_1 = z$), ſo iſt $R_1 = \frac{l-z}{l} \cdot P$ und demnach hat $[Mo]$ für die Belaſtungsſtelle B den Wert $\frac{(l-z)z}{l} \cdot P$, welchem die konſtant zu haltende Spannung

$$\sigma_w = \frac{(l-z)z \,.\, P}{l \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}}$$

entſpricht.

Für einen rechteckigen Querſchnitt, deſſen Verjüngung nur in die Höhe ($b = b_0$) gelegt wird, iſt $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{b_0 h^2}{6}$, ſo daß hier bei Ausnutzung des Materiales

$$k \,.\, l \,.\, b_0 h^2 = 6(l-z)z \,.\, P$$

gilt. Für $\frac{h}{2} = y$ erhält man $2klb_0y^2 = 3(l-z) \,.\, z \,.\, P$ als Gleichung für die Begrenzungslinie des Aufriſſes; bezieht man dieſe Gleichung auf die Balkenmitte, ſo muß man z durch $\frac{l}{2} \pm z$ erſetzen, wobei ſich ergiebt

$$\frac{z^2}{(\frac{1}{2}l)^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2}H)^2} = 1$$

für $H^2 = \frac{3Pl}{2kb_0}$.

Man gelangt alſo zu einer Ellipſe mit den Achſen l und H.

155. Graphoſtatiſche Behandlung der Aufgaben der §§ 149 bis 154. Bei dem Zweiſtützenträger (Fall 2) iſt bereits früher (S. 367 u. f.) gezeigt worden, wie das Moment der äußeren Kräfte für jede Stelle des Balkens durch Krafteck und Seileck auf zeichneriſchem Wege gefunden werden kann.

Dieſelben Überlegungen gelten auch für den Freiträger (Fall 1), falls man bei jedem Schnitte die Kräfte des Balkenſtückes verwendet, welches das freie Ende enthält (vergl. Aufgabe Nr. 82 auf S. 407).

Während ſich beim Zweiſtützenträger das Seileck ſchließt, bleibt es beim Freiträger offen, weil hier die gegebenen Kräfte (einſchließlich der Reaktion R) erſt unter Berückſichtigung des Reaktionsmomentes (D) der Einſpannungsſtelle zum Gleichgewicht führen.

Während der Einfluß der Befeſtigung in dieſen beiden Fällen mit den gewöhnlichen Mitteln der Statik beſtimmt werden kann, ſind die Reaktionen und die Reaktionsmomente bei den beiden anderen Arten der Befeſtigung (Fall 3 und 4) ſtatiſch unbeſtimmt, d. h. ſie werden erſt beſtimmbar bei Berückſichtigung der Biegungslinie des Balkens.

Wenn man in den letzten beiden Fällen die, mit Hülfe der Biegungslinie gefundenen rechneriſchen Ausdrücke für die Reaktionen und für die Reaktionsmomente benutzt, um ſie dann weiter zeichneriſch zu verwenden, ſo bieten auch dieſe Fälle für die graphoſtatiſche Behandlung keine beſonderen Schwierigkeiten dar. Bei Fall 3 kann man bei jedem Schnitte die Kräfte des

gestützten Balkenendes verwenden, für welches kein Reaktionsmoment in Frage kommt, während man allerdings bei Fall 4 auch noch das Reaktionsmoment der einen Einspannungsstelle berücksichtigen muß.

Will man die Ausdrücke, welche die Rechnung geliefert hat, in den letzten beiden Fällen nicht verwenden, so steht man vor der neuen Aufgabe, hier auch die Biegungslinie zeichnerisch zu entwickeln und dann mit ihrer Hülfe die Reaktionen und die Reaktionsmomente zu bestimmen. Die zeichnerische Bestimmung der Biegungslinie hat auch für die ersten beiden Fälle insofern eine Bedeutung, als erst mit ihrer Lösung die graphostatische Behandlung des gebogenen Stabes dem rechnerischen Verfahren annähernd gleichwertig wird.

Diese Lösung ist von Mohr gegeben worden und beruht auf der Vergleichung der allgemeinen rechnerischen Ansätze für die Biegungslinie eines Balkens und für die Seilkurven (bezw. Stangenkurven) bei gegebener Belastungslinie bezw. auf anderen entsprechenden Betrachtungen.

Fig. 703 a.

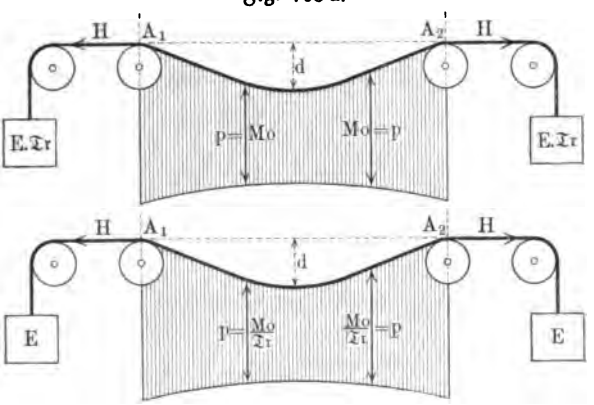


Fig. 703 b.

Bezeichnet man die Gleichung einer Seilkurve (bzw. Stangenkurve) durch

$$y = f(z),$$

so ist die zweite Ableitung $f''(z)$ von $f(z)$ nach z durch die Horizontalspannung $[H]$ und die Ordinaten (p) der Belastungslinie (vergl. S. 504 und S. 580) bestimmt und zwar als

$$f''(z) = \frac{p}{H},$$

während die Gleichung $y = f(z)$ der Biegungslinie eines Balkens durch

$$f''(z) = \frac{Mo}{E \,.\, \mathfrak{T}r}$$

gegeben ist.

Beide Ansätze gehen ineinander über für

$$\frac{p}{H} = \frac{Mo}{E \,.\, \mathfrak{T}r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 372)$$

Da p für die einzelnen Stellen des Seiles im allgemeinen veränderlich ist, während H eine Konstante bezeichnet, so muß für den prismatischen Balken, bei dem Mo im allgemeinen veränderlich und $E \,.\, \mathfrak{T}r$ stets konstant ist, gesetzt werden

$$p = Mo \quad \text{und} \quad H = E \,.\, \mathfrak{T}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 373\,a)$$

während für den Balken mit veränderlichem Querschnitte

$$p = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r} \quad \text{und} \quad H = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 373\,b)$$

zu machen ist.

Die Biegungslinie des prismatischen Balkens stimmt demnach überein mit einer Seilkurve, für welche $E \,.\, \mathfrak{T}r$ den Wert der Horizontalspannung und Mo den Wert der Ordinaten der Belastungslinie bezeichnet; bei einem Balken von veränderlichem Querschnitt ist ebenso E als Horizontalspannung und $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ als Ordinate der Belastungslinie zu nehmen.

Fig. 704.

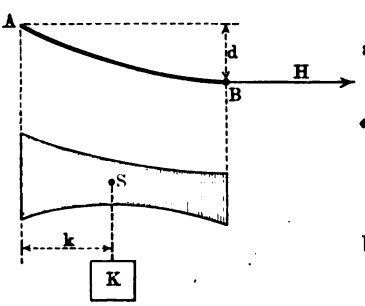
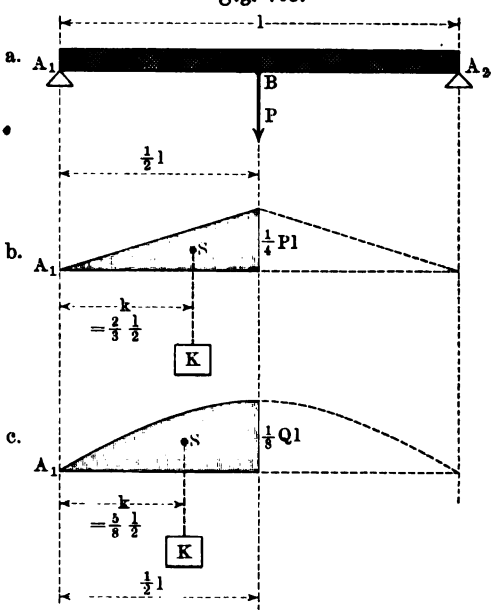


Fig. 705.



Der Vergleich, welcher dieser Betrachtung zu Grunde liegt, ist durch Fig. 703 a für den wagerechten prismatischen und durch Fig. 703 b für den wagerechten Zweistützenträger von veränderlichem Querschnitt veranschaulicht.

Diese Auffassung der Biegungslinie als Seilkurve ist auch, abgesehen von der bezeichneten Aufgabe, für die Biegungstheorie von Wert.

Schneidet man die Seilkurve (vergl. Fig. 704), welche die Biegungslinie darstellt, in einem Punkte B mit horizontaler Tangente, so gilt für den Stützpunkt A als Drehpunkt

$$d \,.\, H = k \,.\, K,$$

falls die Vertikale des Schwerpunktes der Belastung K für AB von der Vertikalen durch A den Abstand k hat. Daraus folgt

$$d = \frac{k \,.\, K}{H},$$

d. h. man erhält so ohne weiteres die Durchbiegung d der Biegungslinie für den Punkt B.

Für den prismatischen Balken ($H = E \cdot \mathfrak{T}r$) der Fig. 705 (a. v. S.) ist z. B. für den Schnitt durch B gemäß der Momentenfläche b für Mittelbelastung P

$$K = \frac{Pl^2}{16} \quad \text{und} \quad k = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3},$$

d. h. man hat für $H = E\mathfrak{T}r$

$$d_1 = \tfrac{1}{48} \frac{Pl^3}{E\,\mathfrak{T}r}.$$

Das ist dasselbe Ergebnis, welches S. 952 für Mittelbelastung erhalten wurde.

Ebenso ergiebt sich gemäß der Momentenfläche c für gleichmäßige Belastung ($Q = l\gamma$)

$$K = \tfrac{1}{24} Ql^2 \quad \text{und} \quad k = \tfrac{5}{8} \cdot \frac{l}{2},$$

d. h. man hat für $H = E\mathfrak{T}r$

$$d_2 = \tfrac{5}{384} Ql^3.$$

Das ist dasselbe Ergebnis, welches S. 954 für gleichmäßige Belastung erhalten wurde. Man hat also hier zusammen

$$d = d_1 + d_2 = \tfrac{1}{48} \frac{(P + \frac{5}{8}Q)l^3}{E \cdot \mathfrak{T}r}.$$

Handelt es sich um eine Form gleicher Spannung ($H = E$), bei welcher die Verjüngung nur in die Breite gelegt wird, so ist die allgemeine Gleichung $\frac{\mathfrak{T}r}{w} : \frac{\mathfrak{T}r_0}{w_0} = Mo : Mo_0$ zu benutzen für $w = w_0$.

Man hat also hier $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r} = \frac{Mo_0}{\mathfrak{T}r_0}$, d. h. $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ ist konstant, so daß sich bei graphischer Darstellung von $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ ein Rechteck ergiebt.

Die Fig. 705 a entsprechenden Aufgaben führen also in diesem Falle zu $K = \frac{Mo_0}{\mathfrak{T}r_0} \cdot \frac{l}{2}$ und $k = \frac{l}{4}$ bei $H = E$, so daß

$$d = \tfrac{1}{8} \frac{Mo_0 \cdot l^2}{E \cdot \mathfrak{T}r_0}$$

wird. Für Mittelbelastung ist wieder $Mo_0 = \frac{1}{4}Pl$, für gleichmäßige Belastung $\frac{1}{8}Ql$, so daß hier

$$d_1 = \tfrac{1}{32} \frac{Pl^3}{E\,\mathfrak{T}r_0} \quad \text{und} \quad d_2 = \tfrac{1}{64} \frac{Ql^3}{E\,\mathfrak{T}r}$$

wird, und

$$d = d_1 + d_2 = \tfrac{1}{32} \frac{(P + \frac{1}{2}Q)l^3}{E \cdot \mathfrak{T}r_0}.$$

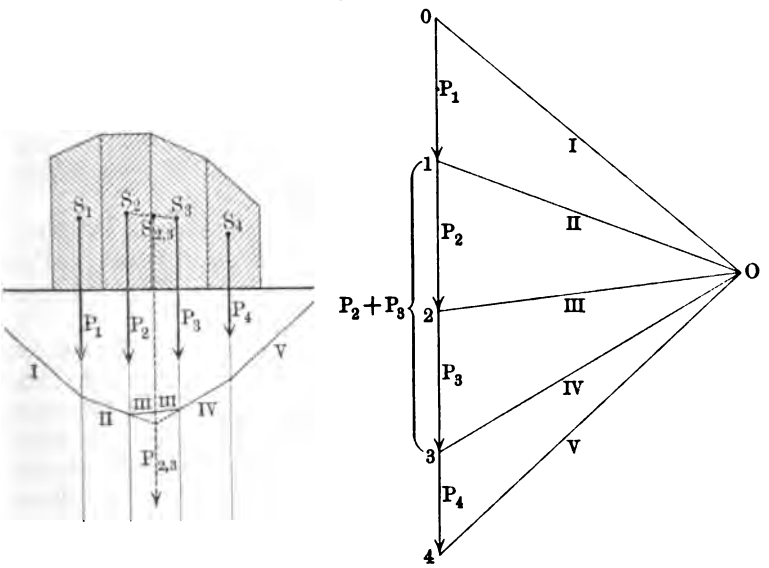
Diese Ergebnisse folgen auch unmittelbar aus der Betrachtung auf S. 973 u. f.

Wir wenden uns nun zur Konstruktion der Biegungslinie und bemerken dazu von vornherein, daß eine Seilkurve durch Horizontal-

spannung und Belastungslinie ebenso wenig vollständig bestimmt ist, wie eine Biegungslinie durch Angabe von E . $\mathfrak{T}r$ bezw. E und Mo bezw. $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$, daß die vollständige Bestimmung vielmehr erst, entsprechend der Feststellung der beiden Konstanten für den Übergang von $f'(x)$ zu $f'(x)$ und von $f'(x)$ zu $f(x)$, unter Berücksichtigung der Art der Befestigung u. s. w. möglich ist.

Man kann daher stets unendlich-viele Seilkurven finden, welche einer bestimmten Angabe von Mo, $\mathfrak{T}r$, E als Biegungslinien entsprechen, und hat unter diesen die gesuchte auszuwählen mit Rücksicht auf die Art der Befestigung u. s. w.

Fig. 706.



Bei der zeichnerischen Behandlung der Aufgabe entspricht diese Unbestimmtheit der willkürlichen Lage des Poles und der willkürlichen Lage der ersten Seite des Seilecks, welches die Seilkurve in beliebiger Annäherung darstellen soll.

Um nämlich die Seilkurve, welche mit der Biegungslinie übereinstimmen soll, in beliebiger Annäherung durch ein Seileck darzustellen, hat man die Momentenfläche (Mo) bezw. die verzerrte Momentenfläche $\left(\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}\right)$ durch Lote zur Achse in beliebig-viele (n) Teile zu zerlegen und im Schwerpunkte jedes dieser Teile die entsprechende Teilfläche als Belastung angebracht zu denken. Konstruiert man, entsprechend diesen (n) Belastungen, das Krafteck, welches hier gestreckt ist, so ist für den Pol nur die Polentfernung $H = E\mathfrak{T}r$ bezw. $H = E$ vorgeschrieben, während seine Lage im übrigen willkürlich ist; ebenso ist die Lage des Ausgangspunktes für das erste Seilstück auf der Geraden der ersten Kraft willkürlich.

Das Seileck, welches die Seilkurve in beliebiger Annäherung darstellt, besteht stets aus Tangenten der Seilkurve (vergl. S. 372), so daß diese bei unserer Darstellung in beliebiger Annäherung ausschattiert wird.

Man überzeugt sich leicht von der allgemeinen Gültigkeit dieser Behauptung, wenn man in Fig. 706 (a. v. S.) z. B. die Belastungen $[P_2]$ und $[P_3]$ für S_2 und S_3 in $S_{2,3}$ als $[P_{2,3}]$ vereinigt. In dem Seileck *II*, *III*, *IV* schneiden sich die offenen Enden *II* und *IV* auf der Resultante von $[P_2]$ und $[P_3]$, d. h. auf $[P_{2,3}]$; ersetzt man also $[P_2]$ und $[P_3]$ durch $[P_{2,3}]$, so fällt lediglich die Seite *III* im Seileck aus, während es sonst unverändert bleibt. Denkt man sich das Seileck für eine elementare Teilung ($\lim n = \infty$), d. h. als Seilkurve konstruiert, so entspricht das unendliche System der Polstrahlen den unendlich-vielen Tangenten der Seilkurve, da die Richtung der Spannung in jedem Punkte in dessen Tangente fällt; denkt man dann ferner die Belastungen zusammengefaßt als $[P_1]$, $[P_2]$, . . ., so fallen alle Tangenten der Seilkurve aus bis auf *I*, *II*, . . .

Wenn die Momentenfläche aus positiven und aus negativen Feldern besteht, so sind natürlich auch die Kräfte, welche als Belastungen eingeführt werden, diesen Feldern entsprechend, mit entgegengesetzten Richtungen anzusetzen.

In allen Fällen darf man sich die Momentenfläche als Belastung eines Zweistützenträgers denken und dessen Reaktionen dieser Belastung entsprechend bestimmen, so daß sich das entsprechende Seileck bei Berücksichtigung der Reaktionen stets schließt.

Ehe wir die Biegungslinie auf dem angegebenen Wege für die einzelnen einfachen Arten der Befestigung behandeln, betrachten wir noch einige allgemeine Beziehungen, welche für alle derartige Aufgaben von Bedeutung sind.

Die unendlich-vielen Seilkurven bezw. Seilecke, welche einer bestimmten Angabe von *Mo*, Tr, *E* entsprechen, zeigen eine wichtige Übereinstimmung. Durch die Angabe jener drei Größen ist nämlich für eine bestimmte Einteilung der Momentenfläche das entsprechende Kräftesystem und die Entfernung des Poles von dem (gestreckten) Krafteck eindeutig gegeben, und daraus folgt, daß die graphische Darstellung des Kraftmomentes durch das Seileck (vergl. S. 327, 368 u. s. w.) für alle Seilecke des Systems zu demselben Ergebnisse führen muß. Man kann diese Beziehung folgendermaßen aussprechen:

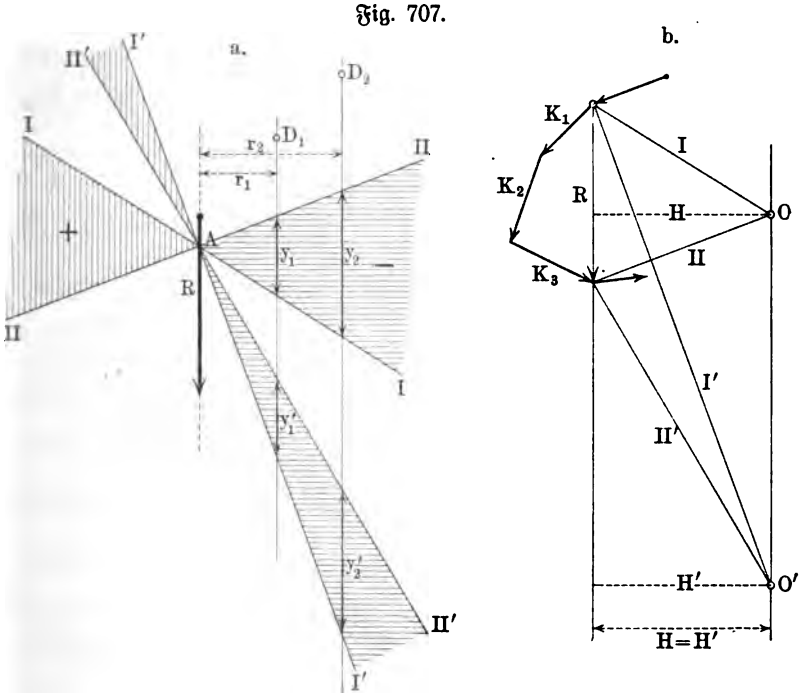
Der Abschnitt, den zwei Seiten irgend eines Seilecks des Systems auf einer Vertikalen bestimmen, ist gleich dem Abschnitte, den die entsprechenden beiden Seiten eines anderen Seilecks des Systems auf jener Vertikalen bestimmen.

Den Kern dieses Satzes, der lediglich ein anderer Ausdruck für die früher benutzte (vergl. S. 327 u. s. w.) graphische Darstellung des Kraftmomentes durch ein beliebiges Seileck ist, zeigt schon eine einfache Betrachtung. In Fig. 707 a sind durch einen beliebigen Punkt *A* einer Kraft $[R]$ zwei Geraden *I* und *II* gezogen, um das Moment von $[R]$ für einen beliebigen Drehpunkt *D* darzustellen; es ist proportional zu dem Abschnitte *y*, den eine Parallele durch *D* zu $[R]$ mit *I* und *II* bestimmt, wobei der wage-

recht schraffierte Winkelraum negativen Momenten, der senkrecht schraffier positiven Momenten entspricht im Sinne der Uhrzeigerdrehung.

Die Momente von $[R]$ für D_1 und D_2 als Drehpunkte sind bezw. $-Rr_1$ und $-Rr_2$, verhalten sich also wie $r_1 : r_2$, oder, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke am Scheitel A, auch wie $y_1 : y_2$. Verschiebt man y_1 a. seiner Geraden durch D_1, so daß $y_1 = y_1'$ ist, und zieht dementsprechend d Geraden I' und II', so bestimmen diese auf der Geraden durch D_2 den Ai schnitt $y_2' = y_2$. Faßt man nun I und II als Parallelen zweier Polstrahl

Fig. 707.



(vergl. Fig. 707 b) eines Poles O auf für ein Krafteck, in welchem $[R]$ die Resultante beliebiger Kräfte ist, so gilt $y_1 : R = r_1 : H$, d. h. es ist $r_1 R = y_1 . H$. Dasselbe ergiebt sich für I' und II', wobei $r_1 R = y_1' . H' = y_1 . H$ ist, so daß $H = H'$ wird. Ist das Krafteck, in welchem R beliebige Kräfte zusammenfaßt, gestreckt, so fällt jede Resultante, welche beliebig-viele Kräfte des Kraftecks zusammenfaßt, in die Gerade von $[R]$, so daß I und II bezw. I' und II' dann zwei beliebige entsprechende Polstrahlen für die Pole O bezw. O' darstellen, für welche $H = H'$ ist. Da nun I und II bezw. I' und II' in Fig. 707 a zwei beliebige entsprechende Seilecksseiten für die Pole O bezw. O' darstellen, so ist für diese $y_1 = y_1'$ und $y_2 = y_2'$. Man sieht dabei deutlich den Einfluß der beiden Bedingungen, des gestreckten Kraftecks und der unveränderlichen Polentfernung.

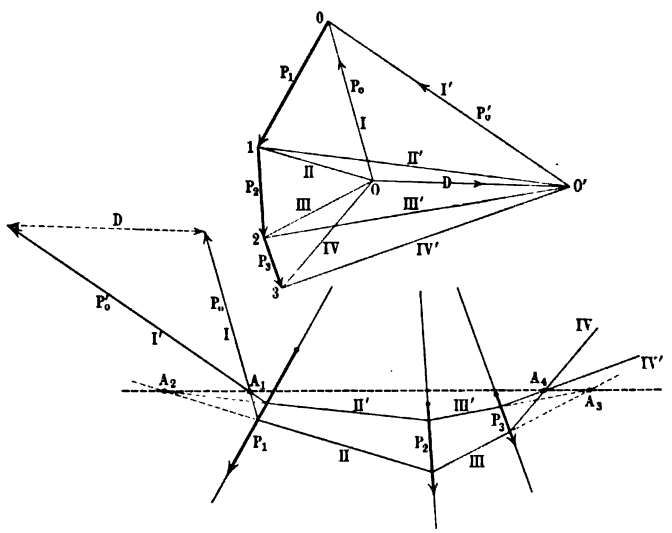
Die abgeleitete Beziehung reicht auch aus, um hier den Einfluß der Verschiebung des Poles auf die Bildung der Seilecke zu untersuchen, wir

stellen diese Abhängigkeit aber lieber durch folgenden allgemeinen Satz dar: Bildet man für zwei Pole O und O' eines Kräftesystems die entsprechenden Seilecke, so schneiden sich deren entsprechende Seiten in Punkten, welche auf einer, zu OO' parallelen Geraden liegen.

Wir beweisen diesen Satz gemäß Fig. 708.

Nachdem die beiden Seilecke $I, II, III, \ldots$ und $I', II', III' \ldots$, welche den Polen O und O' entsprechen, gezeichnet sind, fügen wir den gegebenen Kräften $[P_1]$, $[P_2]$, ... im Schnittpunkte A_1 von I und I' die beiden Kräfte $[P_0] = [00]$ und $[P_0'] = [O'0]$ hinzu, welche sich um $[D] \stackrel{\times}{=} [OO'] = [P_0] \stackrel{\times}{-} [P_0']$ bezw. um $[\overline{D}] \stackrel{\times}{=} [O'O] = [P_0'] \stackrel{\times}{-} [P_0]$ unterscheiden. Betrachtet man nun die beiden Kraftsysteme $[P_0]$, $[P_1]$, $[P_2]$, ... und $[P_0']$, $[P_1]$, $[P_2]$, ... so erhält man stets den Unterschied $[D]$ bezw. $[\overline{D}]$, wenn man in jedem Systeme dieselbe Anzahl von Kräften der Reihe nach vereinigt.

Fig. 708.



Die Resultante von $[P_0]$ und $[P_1]$, welche in II liegt, und die Resultante von $[P_0']$ und $[P_1]$, welche in II' liegt, zeigen im Schnittpunkte A_2 von II und II' vereinigt, wieder den Unterschied $[D]$ bezw. $[\overline{D}]$.

Die Resultante von $[P_0]$, $[P_1]$ und $[P_2]$, welche in III liegt, und die Resultante von $[P_0']$, $[P_1]$ und $[P_2]$, welche in III' liegt, zeigen, im Schnittpunkte A_3 von III und III' vereinigt, wieder den Unterschied $[D]$ bezw. $[\overline{D}]$.

Dasselbe gilt für $[P_0]$, $[P_1]$, $[P_2]$ und $[P_3]$ und für $[P_0']$, $[P_1]$, $[P_2]$ und $[P_3]$ u. s. w.

Da A_1, A_2, A_3, ... demnach Angriffspunkte derselben Kraft $[D]$ bezw. $[\overline{D}]$ sind, sich eine Kraft aber nur auf ihrer Geraden verschieben läßt, so liegen A_1, A_2, A_3 ... auf einer Geraden, deren Richtung durch $[D]$ bezw. $[\overline{D}]$ bestimmt ist.

In unserem Falle darf der Pol nur unter Erhaltung von $H = E\mathfrak{T}r$

bezw. $H = E$ verschoben werden, so daß die Gerade A_1, A_2, A_3 ... dem gestreckten Krafteck parallel, d. h. also vertikal ist.

Für die Praxis ist noch zu bemerken, daß ein Seileck, bei welchem $H = E\mathfrak{Tr}$ mit dem richtigen Zahlenwerte angesetzt wird, sich bei der Kleinheit der zulässigen Durchbiegungen in der Zeichnung nur sehr wenig von einer Geraden (Achse des Balkens) unterscheiden würde. Man überhöht infolgedessen die Ordinaten (y) stets gegenüber der Abscisse (x), indem man H in einem bestimmten Maßstabe verkleinert. Man kann diese Verkleinerung unter anderem so wählen, daß die Balkenachse in starker Verkleinerung, die Ordinaten aber in ihrer thatsächlichen Größe erscheinen.

Denkt man sich die Zeichnung für den prismatischen Balken einmal ausgeführt mit $f_1''(x) = \frac{Mo}{H_1}$ und einmal mit $f_2''(x) = \frac{Mo}{H_2}$, so zeigen die Ansätze $H_1 f_1''(x) = Mo$ und $H_2 f_2''(x) = Mo$, daß dabei $f_1(x) : f_2(x) = H_2 : H_1$ ist, d. h. die Ordinaten verhalten sich umgekehrt wie die gewählten Werte von H. Ist die Balkenachse in $\frac{1}{n}$ der wirklichen Größe dargestellt, so hat man demnach $\frac{1}{n} H$ statt H zu setzen, um dabei die Durchbiegung in ihrer wahren Größe zu erhalten.

Hat man ursprünglich für die Herstellung der Momentenfläche, deren Ordinaten y' heißen mögen, die Polentfernung H' benutzt, so ist $Mo = y' . H'$ und $y' = \frac{Mo}{H'}$; da die Größen y' nun für die Herstellung der Biegungslinie als Ordinaten der Belastungslinie verwendet werden, so ist $\frac{y'}{H} = \frac{Mo}{E\mathfrak{Tr}}$, d. h. man hat $H . H' = E . \mathfrak{Tr}$ oder $H = \frac{E . \mathfrak{Tr}}{H'}$. Während H' eine Anzahl Kilogramm bezeichnet, welche durch Längen dargestellt werden, bedeutet H ebenso wie die Kräfte des Seilecks eine Fläche, da E die Dimension $\frac{\text{Kilogramm}}{\text{Quadratcentimeter}}$, $\mathfrak{Tr}$ die Dimension (Quadratcentimeter)^2 und H' die Dimension Kilogramm hat. Für den Balken mit veränderlichem Querschnitt gilt Entsprechendes.

Wir behandeln nun zunächst die Biegungslinie für einen prismatischen Balken auf zwei Stützen. Legt man das Seileck für eine beliebige Lage des Poles durch den einen Stützpunkt A_1 des Balkens, so geht es im allgemeinen nicht durch dessen zweiten Stützpunkt A_2, sondern schneidet die Vertikale des Stützpunktes A_2 in einem anderen Punkte N. Das gesuchte Seileck, welches durch A_1 und A_2 geht und das Seileck $A_1 N$ entsprechen zwei verschiedenen Lagen des Poles, der dabei von der Geraden, in welcher das Krafteck liegt, denselben Abstand $H = E\mathfrak{Tr}$ behält. Infolgedessen schneiden sich entsprechende Seiten der beiden Seilecke auf der Vertikalen von A_1. Verlängert man also die letzte Seite des konstruierten Seilecks, welche in Fig. 709 (a. f. S.) durch IV bezeichnet ist, bis zum Schnitte D_4 mit der Vertikalen von A_1, so geht die entsprechende, von A_2 ausgehende

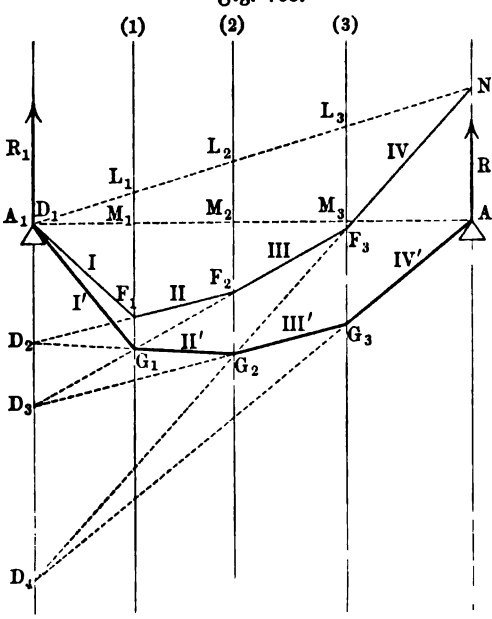
Seite IV' des gesuchten Seilecks auch durch D_4 und läßt sich als $A_2 D_4$ zeichnen, wobei man den Punkt G_3 gewinnt. Verlängert man ebenso III bis zum Schnitte D_3 mit der Vertikalen von A_1, so geht III' durch D_3 und G_3, wobei man G_2 gewinnt. Verlängert man ebenso II bis zum Schnitte D_2 mit der Vertikalen durch A_1, so geht II' durch D_2 und G_2, wobei man G_1 gewinnt, mithin I' als $G_1 A_1$ gegeben ist.

Das neue Seileck $I'II'III'\ldots$ ist die gesuchte Biegungslinie in der gewählten Annäherung.

Statt das Seileck $I'II'III'\ldots$ auf dem angegebenen Wege zu bestimmen, kann man hier auch die Punkte G_1, G_2, G_3 unmittelbar gewinnen, wenn man für $I\,II\,III\ldots$ die Schlußlinie $A_1 N$ zieht und $M_1 G_1 = L_1 F_1$, $M_2 G_2 = L_2 F_2$, $M_3 G_3 = L_3 F_3$ abträgt. Vergl. S. 986.

Da die Strecken $L_1 F_1 = M_1 G_1$, $L_2 F_2 = M_2 G_2$, ... hier unmittelbar die Durchbiegungen darstellen, so kann man ein beliebiges Seileck benutzen, um diese zu erhalten bezw. um das Maximum der Durchbiegung zu gewinnen.

Fig. 709.



Für den Zweistützenträger mit veränderlichem Querschnitt gelten genau dieselben Betrachtungen, falls man die verzerrte Momentenfläche $\left(\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}\right)$ als Belastungsfläche ansieht und die Polentfernung E einführt. Vergl. S. 985.

Dieselben Betrachtungen reichen auch noch unmittelbar aus für die Behandlung des Freiträgers.

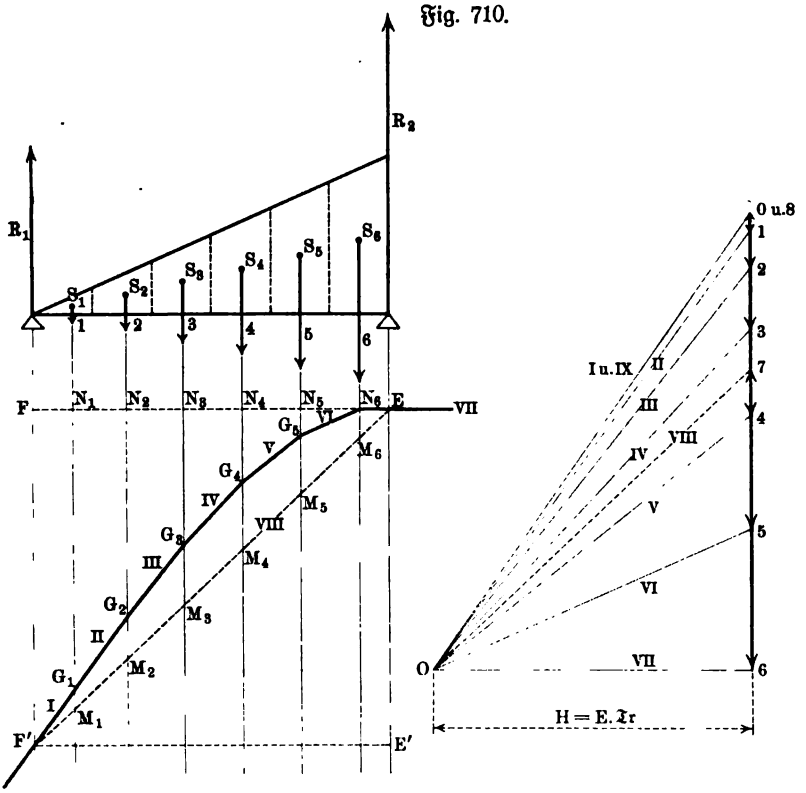
Hier kann man das Seileck, durch welches die Biegungslinie in beliebiger Annäherung dargestellt wird, sofort zeichnen, wenn man dem ersten Polstrahle die Richtung der Achse an der Einspannungsstelle giebt, wodurch die Lage des Poles eindeutig bestimmt ist. Das Verfahren wird durch Fig. 710 erläutert, welche für einen prismatischen Träger mit Endbelastung bei wagerechter Einspannung (EF) gilt (vergl. S. 939).

Faßt man die Momentenfläche als Belastung eines Zweistützenträgers auf, so beträgt die Reaktion des linken Auflegers ein Drittel ($\overline{78}$) und die Reaktion des rechten Auflegers zwei Drittel ($\overline{67}$) der gesamten Belastung, eine Teilung, der VIII entspricht. Die Größe der Ordinaten $G_1 M_1$, $G_2 M_2$, ... ist auch hier für alle Seilecke, welche verschiedenen Lagen des Poles entsprechen,

dieſelbe, ſie ſtellen aber nicht, wie im vorigen Falle, unmittelbar die Durchbiegungen N_2G_2, N_3G_3, ... dar.

Entnimmt man irgend einem Seileck die Größe von N_6M_6, ſo kann man von N_6 (auf EF) aus Punkt M_6 gewinnen, und damit EF'; trägt man die Größen von G_5M_5, G_4M_4, ... dann von M_5, M_4, ... aufwärts ab, ſo erhält man die Durchbiegungen als $N_5G_5 = N_5M_5 - M_5G_5$, $N_4G_4 = N_4M_4 - G_4M_4$, ... Die Gerade EF', welche durch E und M_6 beſtimmt iſt,

Fig. 710.



giebt für das Maximum der Durchbiegung FF'. Bei veränderlichem Querſchnitt iſt wieder Mo durch $\frac{Mo}{\Sigma r}$ und $H = E\Sigma r$ durch $H = E$ zu erſetzen.

Für die Behandlung der Fälle 3 und 4 betrachten wir zunächſt die Änderung des Momentes und der Vertikalkraft, welche auftritt, wenn ein wagerechter Zweiſtützenträger an einem Ende oder an beiden Enden wagerecht eingeſpannt wird.

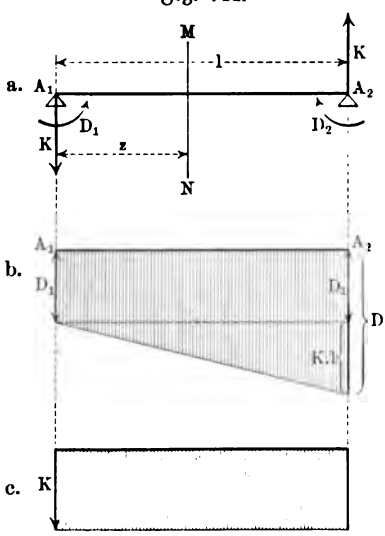
Dieſe Änderung iſt für die Momente unmittelbar aus einer Vergleichung der Figg. 680, 683, 686 oder der Figg. 681, 684, 687 erſichtlich. Um ſie und zugleich die Änderung der Vertikalkräfte genauer kennen zu lernen, betrachten wir die Einſpannung eines Zweiſtützenträgers gemäß Fig. 711 a.

Falls sich durch die Einspannung die Reaktion in A_1 um $+K$ ändert, so ändert sich die Reaktion in A_2 um $-K$, da die algebraische Summe der gesamten Reaktionen der Belastung gleich bleiben muß. In Bezug auf die Reaktionsmomente $[D_1]$ und $[D_2]$, welche in A_1 und A_2 infolge der Einspannung neu hinzutreten, gilt dann für einen Schnitt MN bei Verwendung des linken Trägerstücks

$$Mo = D_1 + Kz$$

für $z = 0 \ldots l$, und zwar muß $Mo = D_2$ sein für $z = l$, so daß also $D_1 + Kl = D_2$ ist. Dies zeigt auch Fig. 711 a unmittelbar, da der Unterschied von D_2 und D_1 dem Kräftepaare vom Werte Kl entsprechen muß.

Fig. 711.



In Fig. 711 b ist diese Änderung des Momentes graphisch dargestellt, sie entspricht Fall 4, falls D_1 nicht Null ist, und Fall 3 für $D_1 = 0$, vorausgesetzt, daß D_2 nicht verschwindet. Die entsprechende Änderung der Vertikalkraft zeigt Fig. 711 c für den Ausgang vom linken Ende des Trägers.

Im Falle 3 kann der Sonderfall $K = 0$ nicht auftreten, da er $D_2 = 0$ nach sich zöge, wohl aber im Falle 4, wenn hier $D_1 = D_2$ ist (symmetrische Belastung).

Die Vergleichung der Figg. 680, 683, 686 u. s. w. giebt im Hinblick auf Fig. 711 über den Einfluß der Einspannung hinreichende Klarheit.

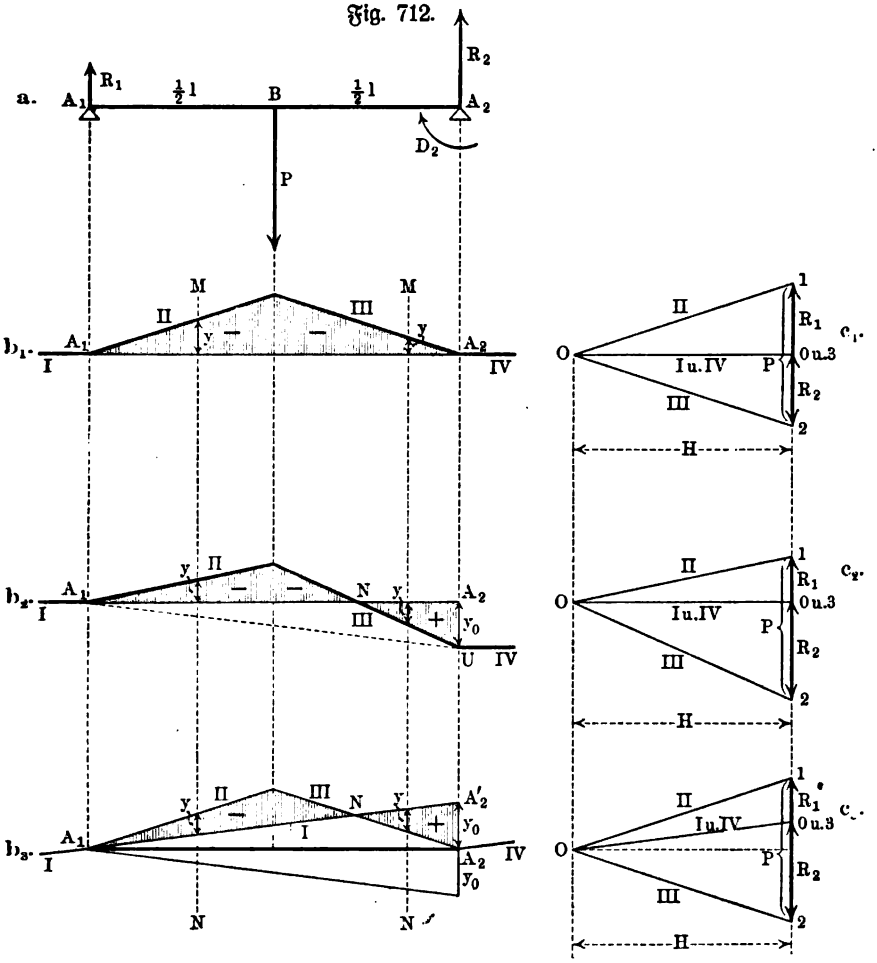
In graphostatischer Hinsicht zeigt sich die betrachtete Änderung bei Fall 3 in der Weise, wie es Fig. 712 für Mittelbelastung ausführt. Dabei ist Fig. 712 b_1 und c_1 für $D_2 = 0$ gezeichnet, d. h. für Unterstützung, während Fig. 712 b_2 und c_2 für $D_2 \gtrless 0$ den Einfluß der Einspannung zeigt.

Während sich für Fig. 712 b_1 das Seileck schließt, entsprechend $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}P$ in Fig. 712 c_1, ist das Seileck für Fig. 712 b_2 offen, entsprechend $R_1 = \frac{5}{16}$ und $R_2 = \frac{11}{16}$ in Fig. 712 c_2. Der Schnitt MN zeigt in beiden Fällen durch y die Größe des Momentes $y \,.\, H$ an, so daß $A_2U = y_0$ in Fig. 712 b_2 die Größe des Momentes an der Einspannungsstelle A_2 darstellt. Wählt man die Lage des Poles in Fig. 712 c_2 so, daß A_1U wagerecht liegt, wie es Fig. 712 b_3 für Zusammenfallen von U und A_2 zeigt, so sieht man deutlich, wie das negative Moment der Fig. 712 b_1 durch Hinzutritt eines positiven Momentes $A_1A_1'A_2$ verändert ist, namentlich, wenn man $\triangle A_1A_1'A_2$ um A_1A_2 nach unten geklappt denkt. Man erkennt nun auch in Fig. 712 b_2 leicht das negative und das positive Feld des Momentes. Um Fig. 712 b_3 herzustellen, zieht man die Horizontale A_1A_2 und beachtet, daß die Abschnitte auf den Vertikalen zwischen entsprechenden Seileckseiten für Fig. 712 b_2 und Fig. 712 b_3 wieder gleich sind (vergl. S. 986). Aus Fig. 712 b_3 findet

man die entſprechende Pollage für Fig. 712 c_3 durch Übertragung der Parallelen.

Der Punkt N, in welchem ſich das Seileck überſchlägt, entſpricht dem Wechſel im Vorzeichen des Momentes, dem wieder ein Wendepunkt der Biegungslinie entſpricht.

Fig. 712.



Man kann das Seileck der Fig. 712 b_2 durch Einfügen von UA_2 ſchließen, ſo daß A_1A_2, d. h. die Grenzlinie der poſitiven und negativen Momente deſſen Schlußlinie wird, entſprechend der Teilung der Reaktionen durch I bezw. IV in Fig. 712 c_2; ebenſo läßt ſich $A_1A'_2$ in Fig. 712 b_3 als Schlußlinie auffaſſen, entſprechend der Teilung der Reaktionen durch I bezw. IV in Fig. 712 c_3. Entſprechende Betrachtungen gelten auch für den Freiträger.

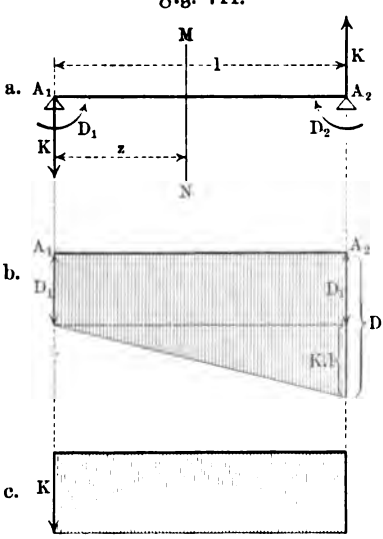
Wegen der Eindeutigkeit der Beſtimmung der Momente durch die verſchiedenen Seilecke iſt auch die frühere Darſtellung der

Falls sich durch die Einspannung die Reaktion in A_1 um $+K$ ändert, so ändert sich die Reaktion in A_2 um $-K$, da die algebraische Summe der gesamten Reaktionen der Belastung gleich bleiben muß. In Bezug auf die Reaktionsmomente $[D_1]$ und $[D_2]$, welche in A_1 und A_2 infolge der Einspannung neu hinzutreten, gilt dann für einen Schnitt MN bei Verwendung des linken Trägerstücks

$$Mo = D_1 + Kz$$

für $z = 0 \ldots l$, und zwar muß $Mo = D_2$ sein für $z = l$, so daß also $D_1 + Kl = D_2$ ist. Dies zeigt auch Fig. 711 a unmittelbar, da der Unterschied von D_2 und D_1 dem Kräftepaare vom Werte Kl entsprechen muß.

Fig. 711.



In Fig. 711 b ist diese Änderung des Momentes graphisch dargestellt, sie entspricht Fall 4, falls D_1 nicht Null ist, und Fall 3 für $D_1 = 0$, vorausgesetzt, daß D_2 nicht verschwindet. Die entsprechende Änderung der Vertikalkraft zeigt Fig. 711 c für den Ausgang vom linken Ende des Trägers.

Im Falle 3 kann der Sonderfall $K = 0$ nicht auftreten, da er $D_2 = 0$ nach sich zöge, wohl aber im Falle 4, wenn hier $D_1 = D_2$ ist (symmetrische Belastung).

Die Vergleichung der Figg. 680, 683, 686 u. s. w. giebt im Hinblick auf Fig. 711 über den Einfluß der Einspannung hinreichende Klarheit.

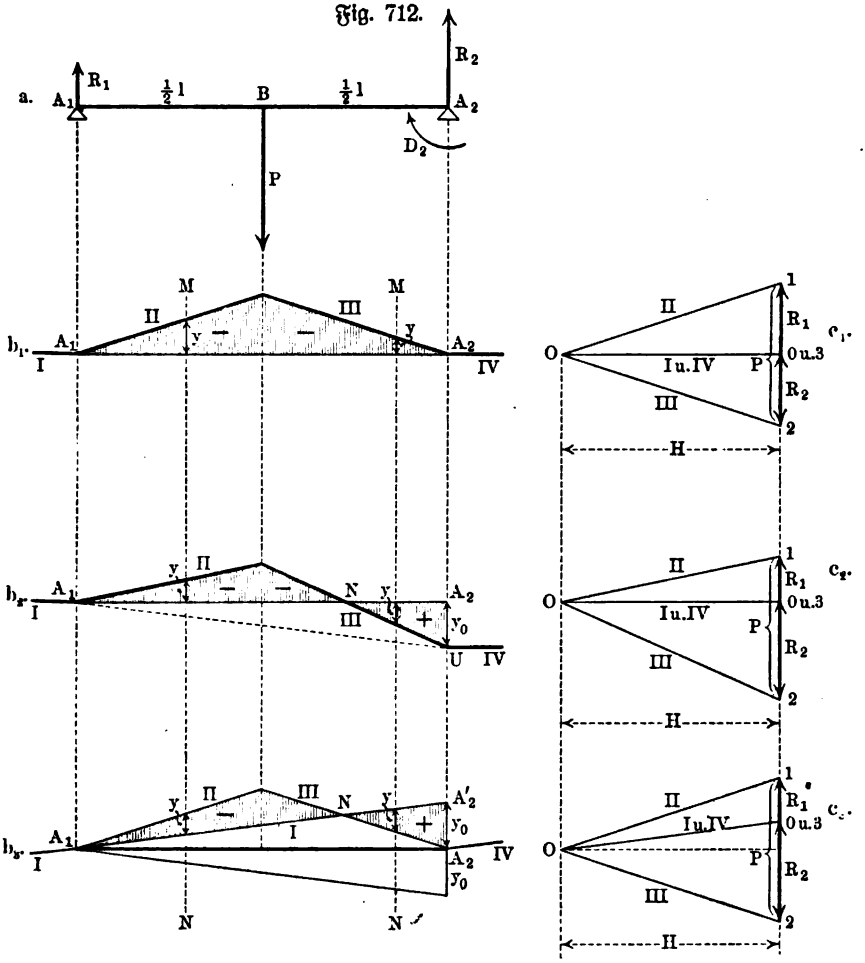
In graphostatischer Hinsicht zeigt sich die betrachtete Änderung bei Fall 3 in der Weise, wie es Fig. 712 für Mittelbelastung ausführt. Dabei ist Fig. 712 b_1 und c_1 für $D_2 = 0$ gezeichnet, d. h. für Unterstützung, während Fig. 712 b_2 und c_2 für $D_2 \gtrless 0$ den Einfluß der Einspannung zeigt.

Während sich für Fig. 712 b_1 das Seileck schließt, entsprechend $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}P$ in Fig. 712 c_1, ist das Seileck für Fig. 712 b_2 offen, entsprechend $R_1 = \frac{5}{16}$ und $R_2 = \frac{11}{16}$ in Fig. 712 c_2. Der Schnitt MN zeigt in beiden Fällen durch y die Größe des Momentes $y \cdot H$ an, so daß $A_2U = y_0$ in Fig. 712 b_2 die Größe des Momentes an der Einspannungsstelle A_2 darstellt. Wählt man die Lage des Poles in Fig. 712 c_2 so, daß A_1U wagerecht liegt, wie es Fig. 712 b_3 für Zusammenfallen von U und A_2 zeigt, so sieht man deutlich, wie das negative Moment der Fig. 712 b_1 durch Hinzutritt eines positiven Momentes $A_1A_2'A_2$ verändert ist, namentlich, wenn man $\triangle A_1A_2'A_2$ um A_1A_2 nach unten geklappt denkt. Man erkennt nun auch in Fig. 712 b_2 leicht das negative und das positive Feld des Momentes. Um Fig. 712 b_3 herzustellen, zieht man die Horizontale A_1A_2 und beachtet, daß die Abschnitte auf den Vertikalen zwischen entsprechenden Seileckseiten für Fig. 712 b_2 und Fig. 712 b_3 wieder gleich sind (vergl. S. 986). Aus Fig. 712 b_3 findet

man die entſprechende Pollage für Fig. 712 c_3 durch Übertragung der Parallelen.

Der Punkt N, in welchem ſich das Seileck überſchlägt, entſpricht dem Wechſel im Vorzeichen des Momentes, dem wieder ein Wendepunkt der Biegungslinie entſpricht.

Fig. 712.



Man kann das Seileck der Fig. 712 b_2 durch Einfügen von UA_2 ſchließen, ſo daß A_1A_2, d. h. die Grenzlinie der poſitiven und negativen Momente deſſen Schlußlinie wird, entſprechend der Teilung der Reaktionen durch I bezw. IV in Fig. 712 c_2; ebenſo läßt ſich $A_1A'_2$ in Fig. 712 b_3 als Schlußlinie auffaſſen, entſprechend der Teilung der Reaktionen durch I bezw. IV in Fig. 712 c_3. Entſprechende Betrachtungen gelten auch für den Freiträger.

Wegen der Eindeutigkeit der Beſtimmung der Momente durch die verſchiedenen Seilecke iſt auch die frühere Darſtellung der

Fig. 683b, welche ja mit Fig. 712b$_2$ (bei passender Wahl des Maßstabes) genau übereinstimmt, als eine Seileckkonstruktion aufzufassen.

Für den Fall 4 entspricht die Öffnung des Seilecks der Größe $D_2 - D_1$, welche für $K = 0$ den Wert Null hat, so daß sich das Seileck hier in diesem Sonderfalle (symmetrische Belastung) schließt.

Um im Falle 4 die Größen D_1 und D_2 in der Momentenskizze zu erhalten, muß man nach Ausführung des Seilecks, welches $D_2 - D_1$ liefert, noch D_1 eintragen und es demgemäß verbessern. Fig. 713 zeigt das Verfahren für Mittelbelastung, wobei man durch das Seileck die negative Momentenfläche genau so erhält, als wenn keine Einspannung vorhanden wäre (vergl. Fig. 712b). Trägt man noch $D_1 = D_2 = \frac{1}{8} Pl$ als positive Momentenfläche an, so erhält man beim Umklappen um $A_1 A_2$ die gesuchte Darstellung des Momentes.

Fig. 713a.

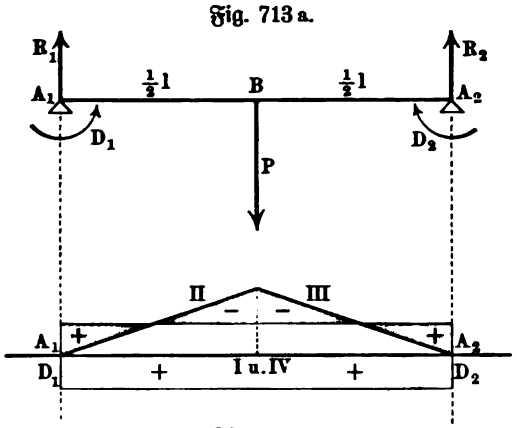


Fig. 713b.

In anderen Fällen öffnet sich im Falle 4 das Seileck um $D_2 - D_1$, so daß eine Parallele im Abstande D_1 auf der rechten Seite $(D_2 - D_1) + D_1 = D_2$ und auf der linken Seite D_1 liefert.

Nachträglich läßt sich nun auch die neue Figur als geschlossenes Seileck auffassen, so daß auch hier die Bemerkungen zu Fall 3 entsprechend in Geltung sind.

Um die Fälle 3 und 4 ganz ohne Benutzung der Rechnung durchzuführen, muß man, wie schon hervorgehoben, zunächst die Biegungslinien graphostatisch bestimmen, wobei auch die Momentenskizze mit erhalten wird.

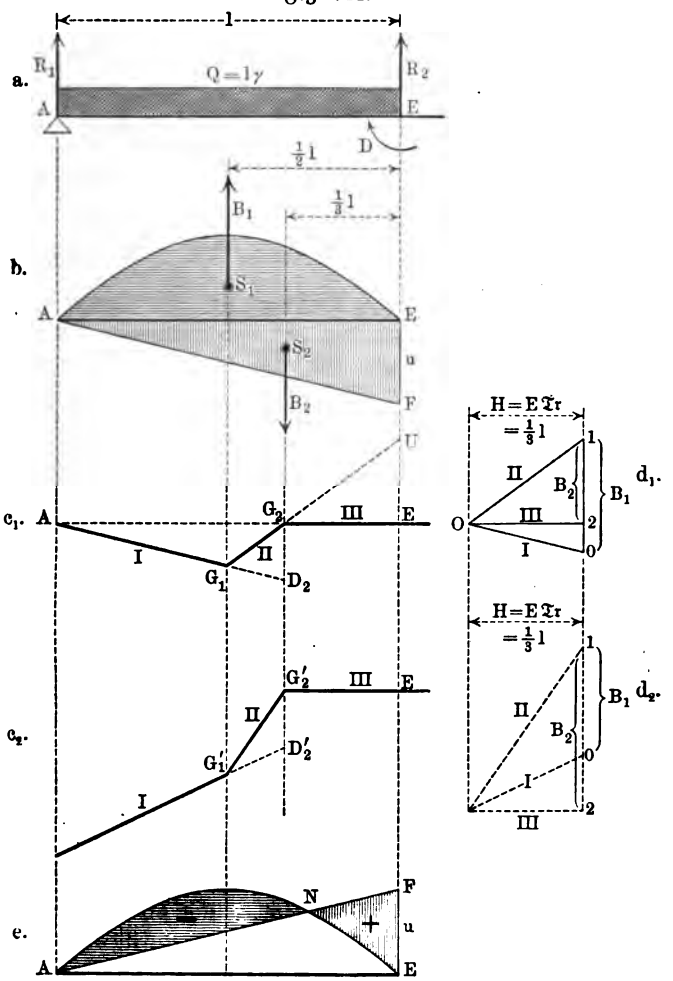
Wir führen dies nun in den Fällen 3 und 4 durch, und zwar für prismatische Balken.

Wir betrachten zunächst den Fall 3 bei wagerechter Balkenachse für eine gleichmäßige Belastung (vergl. Fig. 714). Zu dem negativen Momente (1) für einfache Auflagerung (vergl. Fig. 714b), das durch die wagerecht schraffierte Fläche dargestellt wird, kommt infolge der Einspannung bei E noch ein positives Moment hinzu, welches Fig. 711 für $D_1 = 0$ entspricht und also durch eine Dreiecksfläche (2) von der Grundlinie l dargestellt wird; diese Fläche, deren Höhe u vorläufig unbekannt ist, ist in Fig. 714 durch senkrechte Schraffierung ausgezeichnet. Wäre u bekannt, so könnte man die Belastungsfläche, welche die beiden Momentenflächen zusammen darstellen, durch senkrechte Schnitte in beliebig-viele (n) Streifen teilen und demgemäß mit der Polentfernung $H = E\mathfrak{T}r$ das entsprechende Seileck zeichnen.

Um u zu bestimmen, denkt man sich den Träger unter Erhaltung

der Art seiner Befestigung durch die beiden Einzellasten $[B_1]$ und $[B_2]$ beansprucht, welche bezw. der in ihrem Schwerpunkte S_1 verdichteten Fläche des negativen Momentes und der in ihrem Schwerpunkte S_2 verdichteten Fläche des positiven Momentes entsprechen, und konstruiert das Seileck für diese Belastungen $[B_1]$ und $[B_2]$.

Fig. 714.



Thatsächlich ist die Lage von S_1 und S_2 bekannt und die Größe und Richtung von $[B_1]$ und die Richtung von $[B_2]$, während die Größe von $[B_2]$ unbekannt ist, weil u unbekannt ist: dies genügt, um das Seileck für die Belastungen $[B_1]$ und $[B_2]$ zu zeichnen und dadurch auch u zu bestimmen.

Wegen der Einspannung bei E ist die Tangente in E wagerecht, so daß der Polstrahl *III* in Fig. 714 d_1 und d_2 wagerecht gelegt werden muß,

während die Seite des Seilecks, welche dem Polstrahle I entspricht, die Stütze A treffen muß. Man sieht, daß Fig. 714 c_1, entsprechend Fig. 714 d_1, in welcher $B_2 < B_1$ ist, diese Anordnung zeigt, nicht aber Fig. 714 c_2, entsprechend Fig. 714 d_2, in welcher $B_2 > B_1$ ist; auch für $B_1 = B_2$ würde der Anordnung nicht genügt werden. Von dem Seileck EG_2G_1A läßt sich nun die Strecke G_2D_2 in ihrer richtigen Größe bestimmen, wodurch zunächst D_2A und damit G_1 und also auch G_1G_2 thatsächlich gegeben ist: bei der Polentfernung H stellt nämlich $H \,.\, \overline{G_2D_2}$ das Moment von $[B_1]$ für einen Punkt der Vertikalen von S_2 dar, welches als $B_1(\frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l) = \frac{1}{6}B_1l$ unmittelbar gegeben ist, so daß $\overline{G_2D_2} = \frac{1}{6}\frac{B_1l}{H}$ ist. Verlängert man G_1G_2 bis zur Vertikalen durch E, so ist dann $H \,.\, \overline{UE}$ das Moment von $[B_2]$ für einen Punkt der Vertikalen durch E, welches sich als $\frac{1}{8}B_2l = \frac{1}{6}ul^2$ darstellen läßt, da $B_2 = \frac{1}{2}ul$ ist; damit ist $u = \frac{6H \,.\, \overline{UE}}{l^2}$ gegeben.

Klappt man nun, nachdem u bestimmt ist, das Dreieck der Belastung $[B_2]$ um AE um, so stellt (vergl. Fig. 714 e) das Dreieck ANE eine Fläche dar, für welche sich die positiven und die negativen Momente aufheben, während die wagerecht schraffierte Fläche den übrig bleibenden Teil des negativen, die senkrecht schraffierte Fläche den übrig bleibenden Teil des positiven Momentes darstellt. Die Ordinaten von Fig. 714 e entsprechen genau den Ordinaten der Fig. 684 b, welche sich ja auch als ein Seileck mit der Schlußlinie EA auffassen läßt. Die schraffierten Teile von Fig. 714 e stellen nun für die Konstruktion der gesuchten Biegungslinie die richtige Belastungsfläche dar. Dem Punkte N, in welchem das Moment zu Null wird, entspricht dabei der Wendepunkt W der Biegungslinie.

Man bemerkt leicht, daß die Annahme einer gleichmäßigen Belastung von EA, welcher die Parabelfläche als Momentenfläche entspricht, für das Verfahren unwesentlich ist, es läßt sich bei einer beliebigen Belastung anwenden, nachdem für diese S_1 und $[B_1]$ bestimmt ist.

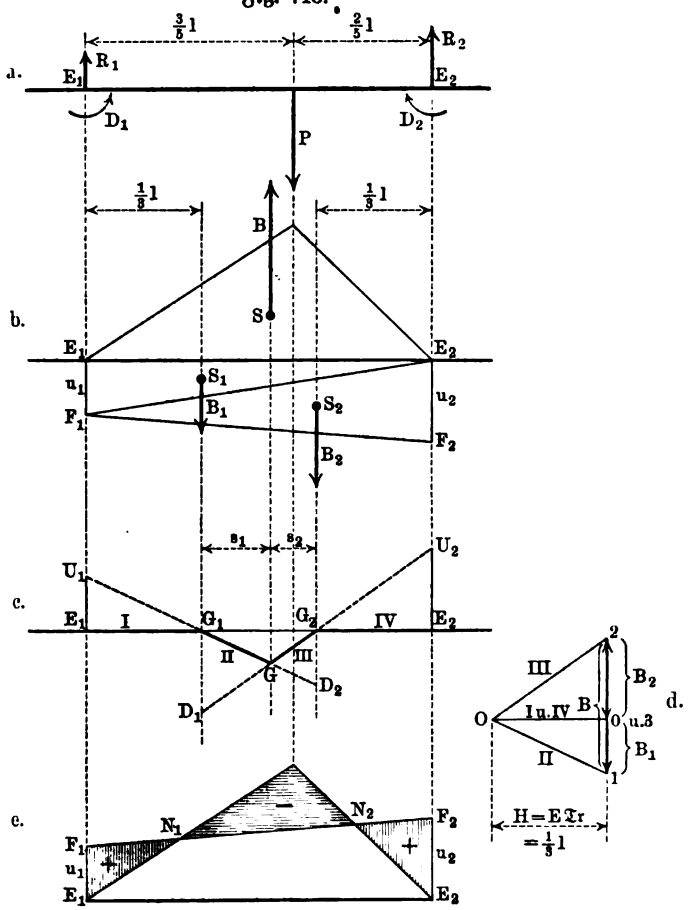
Da $B_2 = u \cdot \frac{l}{2}$ ist, so stellt man auch B_1 als $b_1 \cdot \frac{l}{2}$ dar, so daß $B_2 : B_1 = u : b_1$ ist; demnach lassen sich die Strecken B_1 und B_2 in Fig. 714 d_1 und d_2 unmittelbar durch b_1 und u ersetzen.

Da $[B_2]$ für jede Belastung von der Vertikalen durch E den Abstand $\frac{1}{3}l$ hat, so werden die ähnlichen Dreiecke $\overline{UG_2E}$ und $\overline{102}$ einander kongruent, wenn $H = E\mathfrak{T}r$ in der Zeichnung durch $\frac{1}{3}l$ dargestellt wird, es ist dann $u = UE$ für $B_2 = u$ und $B_1 = b$, d. h. für die Polentfernung $H = \frac{1}{3}l$ stellt nun UE unmittelbar die gesuchte Höhe u der Momentenfläche der Einspannung dar.

Für den Fall der gleichmäßigen Belastung ist $H \,.\, \overline{G_2D_2} = \frac{1}{6}B_1l = \frac{1}{6}b_1l$ und $H \,.\, \overline{UE} = \frac{1}{3}B_2l = \frac{1}{3}ul$, so daß hier $G_2D_2 : UE = \frac{1}{2}b_1 : u$ ist; für die Polentfernung $H = \frac{1}{3}l$, bei welcher nun $UE = u$ ist, wird also hier $G_2D_2 = \frac{1}{2}b_1 = \frac{2}{3}h$ für h als Pfeilhöhe der Parabelfläche des negativen Momentes. Die Konstruktion läßt sich also hier in Bezug auf Fig. 714 c_1

und d_1 folgendermaßen geſtalten. Man zieht *III* durch E und erhält G_2, man macht $G_2 D_2 = \frac{2}{8} h$, wobei h die Pfeilhöhe der Parabelfläche des negativen Momentes iſt, man zieht $D_2 A$ und erhält G_1, man zieht $G_1 G_2$ und erhält U und damit $UE = u$, womit die Momentenfläche der Einſpannung beſtimmt iſt. Zeichnet man, dem gewonnenen Seileck entſprechend, die Fig. 715 d_1, ſo beſtimmt *III* auf $\overline{0\,1}$ die Größe B_2 als $u = UE$. Faßt man Fig. 714 e als Seileck für Fig. 714 a auf, ſo iſt AN deſſen Schlußlinie (vergl. die Bemerkungen zu Fig. 712 b_2 und c_2); deren Richtung grenzt für einen entſprechenden Kräfteplan in dieſem die Reaktionen R_1 und R_2 ab, für welche im Falle gleichmäßiger Belaſtung natürlich $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} Q$ gilt.

Fig. 715.



Wir behandeln nun noch Fall 4 bei wagerechter Balkenachſe für eine Einzellaſt gemäß Fig. 715. Zu dem negativen Moment (vergl. Fig. 715 b), das durch die wagerecht ſchraffierte Fläche in Fig. 715 e angedeutet wird, kommt infolge der Einſpannungen bei E_1 und bei E_2 noch ein poſitives Moment hinzu, welches Fig. 711 b für $D_1 \gtrless 0$ und $D_2 \gtrless 0$ entſpricht und alſo durch eine

Trapezfläche von der Grundlinie l dargestellt wird; diese ist in Fig. 715e durch senkrechte Schraffierung angedeutet. Zerlegt man die Trapezfläche in die beiden Dreiecke $E_1E_2F_1$ und $F_1E_2F_2$, so stellt $\triangle E_1E_2F_1$ das Moment für die Einspannung in E_1 und $\triangle F_1E_2F_2$, welches mit $\triangle E_1E_2F_2$ flächengleich ist, das Moment für die Einspannung in E_2 dar. Von der Belastungsfläche, welche die drei Momentenflächen zusammen darstellen, sind die Lagen der Schwerpunkte S, S_1 und S_2 gegeben, die Richtungen von $[B]$, $[B_1]$ und $[B_2]$ und die Größe von $[B]$. Durch diese Angabe ist für das entsprechende Seileck wieder der in Fig. 715c angegebene Umriß im allgemeinen bestimmt. Da $\overline{G_1D_1} \,.\, H$ und $\overline{G_2D_2} \,.\, H$ für eine Polentfernung H die Momente von $[B]$ bezw. für die Vertikalen durch S_1 und S_2 angeben, welche bezw. die bekannten Werte $B \,.\, s_1$ und $B \,.\, s_2$ haben, so sind G_1D_1 und G_2D_2 gegeben.

Man erhält also hier das Seileck, indem man die Schnitte G_1 und G_2 von E_1E_2 mit den Vertikalen durch S_1 und S_2 aufsucht, auf den Vertikalen bezw. G_1D_1 und G_2D_2 aufträgt und so die Strahlen *II* und *III* zu den Strahlen *I* und *IV* dazu erhält.

Da sich G_1D_2 und D_1G_2 in G auf der Vertikalen von B schneiden, entsprechend $\overline{G_1D_1} : \overline{G_2D_2} = s_1 : s_2$, so hat man nur G_1D_1 oder G_2D_2 wirklich zu bestimmen.

Man hat ferner $\overline{U_1E_1} \,.\, H = B_1 \cdot \frac{l}{3} = \frac{u_1 l^2}{6}$, womit u_1 bestimmt ist, und ebenso $\overline{U_2E_2} \,.\, H = B_2 \cdot \frac{l}{3} = \frac{u_2 l^2}{6}$, womit u_2 gegeben ist.

Klappt man nun, nachdem u_1 und u_2 bestimmt sind, das Trapez $E_1E_2F_2F_1$ um E_1E_2, so stellt (Fig. 715e) das Viereck $E_1N_1N_2E_2$ eine Fläche dar, für welche sich die positiven und die negativen Momente aufheben, während die wagerecht schraffierte Fläche den übrig bleibenden Teil des negativen, die senkrecht schraffierten Flächen die übrig bleibenden Teile des positiven Momentes darstellen. Die Ordinaten von Fig. 715e entsprechen genau den Ordinaten der Fig. 686b. Die schraffierten Teile von Fig. 715e stellen nun für die Konstruktion der gesuchten Biegungslinie die richtige Belastungsfläche dar, welche bei beliebiger Einteilung zu einem Seileck führt, durch welches die Biegungslinie dargestellt wird.

Die Punkte N_1 und N_2, in welchen das Moment zu Null wird, entsprechen dabei den beiden Wendepunkten W_1 und W_2 der Biegungslinie. Man bemerkt wieder leicht, daß dieses Verfahren ganz allgemein gilt, sobald die Lage von S und außerdem $[B]$ bestimmt ist. Da $B_1 = u_1 \cdot \frac{l}{2}$ und $B_2 = u_2 \cdot \frac{l}{2}$ ist, so stellt man auch B als $b \cdot \frac{l}{2}$ dar, so daß $B_1 : B : B_2 = u_1 : b : u_2$ ist; demnach lassen sich die Strecken u_1, b, u_2 unmittelbar für das Seileck verwenden, das Fig. 715c entspricht.

Für die Polentfernung $H = \frac{1}{3}l$ stellen U_1E_1 und U_2E_2 wieder unmittelbar bezw. die gesuchten Höhen u_1 und u_2 der Momentenflächen dar. Für den Fall der gleichmäßigen Belastung lassen sich auch G_1D_1 und G_2D_2 wieder einfach darstellen.

Da über die Beziehungen der Seilecke in Fig. 714 und in Fig. 715 zu den entsprechenden Biegungslinien vielfach Unklarheiten herrschen, so mag noch besonders hervorgehoben werden, daß diese Seilecke im allgemeinen nicht aus Tangenten der schließlichen Biegungslinien besteht, wie schon die Lage der Nullpunkte des Momentes bezw. der entsprechenden Wendepunkte zeigt. In Fig. 714 c sind *III* und *II* Tangenten der Biegungslinie, welche der Dreiecksbelastung *AEF* der Fig. 714 b entspricht, ebenso sind dort *II* und *I* Tangenten der Biegungslinien für die parabolische Belastung der Fig. 714 b, während nur *III* (wegen der Einspannung) Tangente der schließlichen Biegungslinie ist. In gleicher Weise sind in Fig. 715 c die Seileckseiten *I* und *II* Tangenten der Biegungslinie für die Dreiecksbelastung $F_1E_1E_2$ und *III* und *IV* Tangenten der Biegungslinie für die Dreiecksbelastung $F_2E_2E_1$, und ebenso *II* und *III* Tangenten der Biegungslinie für die Belastung des negativen Momentes, während nur *I* und *IV* (wegen der Einspannung) Tangenten der schließlichen Biegungslinie sind.

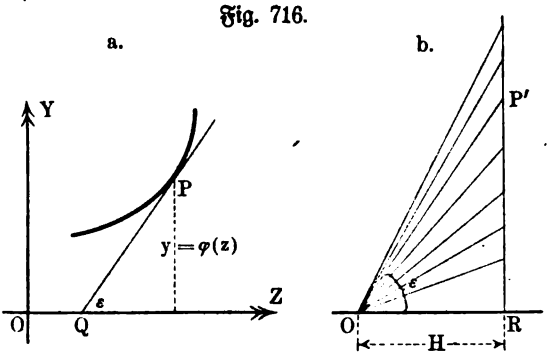
Für Fall 4 mag noch hervorgehoben werden, daß hier stets $\overline{B_1 + B_2} = B$ sein muß, weil wegen der Einspannung *I* und *IV* in Fig. 715 d aufeinander fallen. Für das Beispiel der Fig. 715 ist thatsächlich $B = \left(\frac{l_1 l_2}{l} \cdot P\right) \cdot \frac{l}{2}$ und $B_1 = D_1 \cdot \frac{l}{2}$ und $B_2 = D_2 \cdot \frac{l}{2}$, d. h. also

$$B_1 + B_2 = \left(\frac{l_1 l_2^2}{l^2} + \frac{l_1^2 l_2}{l^2}\right) \cdot P \cdot \frac{l}{2} = \frac{l_1 l_2 (l_1 + l_2)}{l^2} \cdot P \cdot \frac{l}{2} = \frac{l_1 l_2}{l} \cdot P \cdot \frac{l}{2}.$$

Allgemein mag noch bemerkt werden, daß die graphischen Darstellungen des Momentes, welche dem rechnerischen Wege entsprechen, gemäß Vorstehendem ohne Ausnahme als Seilkurven aufgefaßt werden können, die sich unter Einfügung der Einspannungsmomente schließen.

Die ganze Betrachtung läßt sich auch leicht für schiefe Einspannungen durchführen.

Fig. 716.

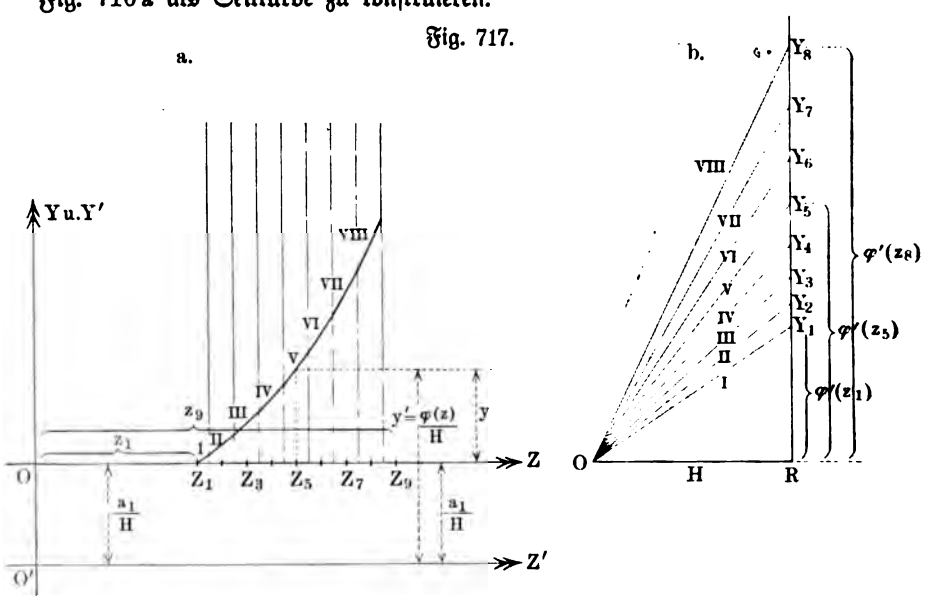


Um von den gegebenen Belastungen zur Biegungslinie zu gelangen, hat man also eine zweifache Seilkurvenkonstruktion durchzuführen, die erste liefert die Momentenfläche, die zweite, bei welcher die Momentenfläche als eine Belastungsfläche aufgefaßt wird, giebt die Biegungslinie. Jede entspricht dem Doppelübergange von $\varphi''(z)$ zu $\varphi'(z)$ und von $\varphi'(z)$ zu $\varphi(z)$, wobei für $y = f(z)$ als Gleichung der elastischen Linie, im ersten Falle $\varphi''(z) = f^{IV}(z)$ und $\varphi'(z) = f'''(z)$ und im zweiten Falle $\varphi''(z) = f''(z)$ und $\varphi'(z) = f'(z)$ ist.

So oft sich also für irgend eine Funktion $\varphi(z)$ die Werte der zweiten Ableitung $\varphi''(z)$ als Ordinaten einer Belastungslinie auftragen lassen, stellt die zugehörige Seilkurve die Werte von $\varphi(z)$ als Ordinaten dar.

Um auch den einfachen Übergang von $\varphi'(z)$ zu $\varphi(z)$ mit Hülfe einer Seilkurve durchzuführen, kann man folgendermaßen verfahren. Wäre die Kurve $y = \varphi(z)$ hergestellt, so würde eine Tangente PQ in einem Punkte P derselben die Z-Achse unter dem Winkel ε schneiden, so daß $tng\,\varepsilon = \varphi'(z)$ wäre (vergl. Fig. 716 a a. v. S.). Denkt man sich die Kurve $y = \varphi(z)$ als Seilkurve für Belastungen hergestellt, welche zur Y-Achse parallel sind (vergl. Fig. 716 b), so würde der zu PQ parallele Polstrahl OP' mit $[H]$ auch den Winkel ε bilden, wobei $tng\,\varepsilon = \frac{RP'}{H}$ wäre. Man hat also $\frac{RP'}{H} = \varphi'(z)$ oder $RP' = H \,.\, \varphi'(z)$ zu setzen, um gemäß Fig. 716 b die Kurve der Fig. 716 a als Seilkurve zu konstruieren.

Fig. 717.



Macht man $RP' = \varphi'(z)$ in Fig. 716 b, so ist in Fig. 716 a die Ordinate $y = \frac{\varphi(z)}{H}$, d. h. $\varphi(z) = y \,.\, H$.

Trägt man also, wie Fig. 717 zeigt, $z_1 = OZ_1$, $z_2 = OZ_2$, $z_3 = OZ_3$, ... auf der Z-Achse auf und senkrecht dazu $RY_1 = \varphi'(z_1)$, $RY_2 = \varphi'(z_2)$, $RY_3 = \varphi'(z_3)$, ..., so ist das entsprechende Seileck, für welches die Mitten von Z_1Z_2, Z_2Z_3, ... als Kraftgeraden einzuführen sind, eine angenäherte Darstellung der Kurve $y = \frac{\varphi(z)}{H} + C$, so daß $\varphi(z) = y \,.\, H + C'$ ist.

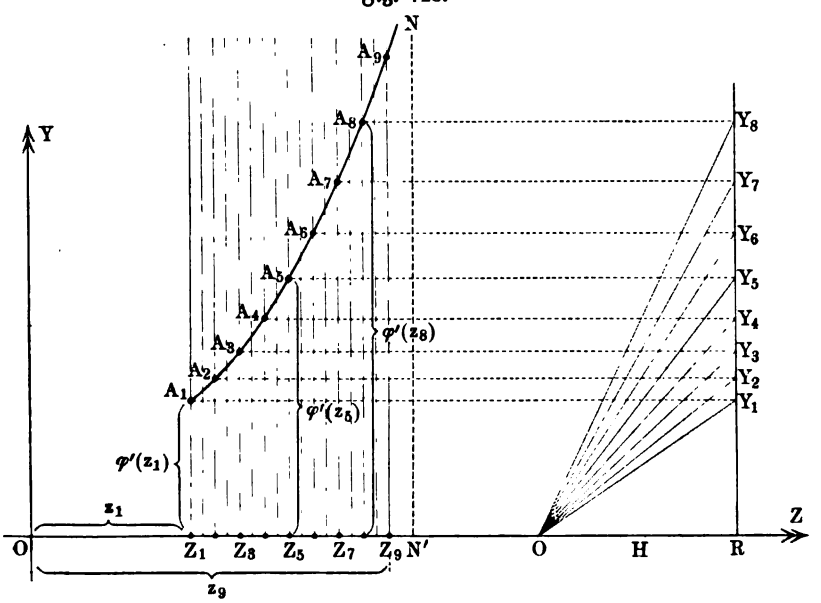
Um die Konstante zu bestimmen, muß man einen Wert von $\varphi(z)$ kennen, z. B. $\varphi(z_1) = a_1$; es ist dann $y_1 = 0 = \frac{a_1}{H} + C$ und $C = -\frac{a_1}{H}$, so daß

$$y = \frac{\varphi(z)}{H} - \frac{a_1}{H}$$

ist. Setzt man $y' = y + \frac{a_1}{H}$, so ist $y' = \frac{\varphi(z)}{H}$ und $H \cdot y' = \varphi(z)$, d. h. bei einer Verschiebung der Z-Achse um $\frac{a_1}{H}$ abwärts stellen die Ordinaten der Kurve für diesen Fall $\varphi(z)$ dar, falls man sie mit H multipliziert (Sonderfall $H = 1$).

Ist $y = \varphi'(z)$ als Kurve $A_1 N$ gegeben (vergl. Fig. 718), so kann man diese beliebig einteilen und durch Projektion der Teilpunkte die Fig. 717 b wiedergewinnen. Hier stellt die Fläche zwischen $A_1 \ldots N$ und $Z_1 \ldots N'$ den Wert von $\varphi(z)$ dar und zwar so, daß z. B. $Z_1 A_1 A_5 Z_5 = \varphi(z_5) - \varphi(z_1)$

Fig. 718.



ist. Demnach wird diese Fläche durch die Differenz der zugehörigen, mit H multiplizierten Ordinaten in Fig. 717 a gegeben, wobei es natürlich gleichgültig ist, ob man die Achse OZ benutzt oder die Achse $O'Z'$.

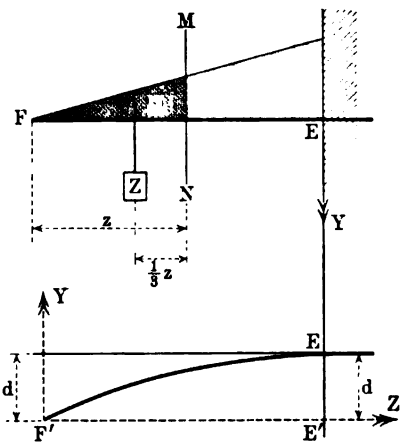
Man sieht, daß durch das angegebene Verfahren jede graphisch durch $A_1 \ldots N$ bestimmte Fläche in beliebiger Annäherung als Differenz zweier Strecken, also als Strecke, ausgewertet werden kann.

156. Weitere Bemerkungen zu den einfachen Fällen der Befestigung. Die rechnerischen und die graphostatischen Methoden, welche bisher entwickelt und verwendet wurden, reichen bei den einfachen Fällen der Befestigung auch für andere, als die bisher behandelten Arten der Belastung aus.

Wir zeigen dies noch für einige besonders häufig vorkommende Belastungsarten.

a) Hat der Freiträger eine Dreieckslast zu tragen, so entspricht dem Schnitte MN eine Belastung Z, welche (in Fig. 719) durch das doppelt schraffierte Dreieck dargestellt wird. Bezeichnet man die gegebene Belastung durch Q, so ist

Fig. 719.



$$Z : Q = z^2 : l^2$$

und demnach hat man

$$Mo = \tfrac{1}{3} z \,.\, Z = \frac{Q z^3}{3 l^2}.$$

Für E ist

$$Mo_{max} = \frac{Ql}{3} \quad \cdot \cdot \quad 374)$$

Die Gleichung $f''(z) = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$ führt ohne weiteres für $F'E'$ als Z-Achse zu

$$y = \tfrac{1}{12} \frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}\left(\frac{z}{l} - \tfrac{1}{5}\frac{z^3}{l^3}\right),$$

so daß für E ist $(z = l)$

$$d = y_{max} = \tfrac{1}{15} \frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r} \quad \cdot \quad 375)$$

Für EF als Z-Achse lautet die Gleichung der Biegungslinie

$$y = \tfrac{1}{60} \frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}\left(10\frac{z^2}{l^2} - 10\frac{z^3}{l^3} + 5\frac{z^4}{l^4} - \frac{z^5}{l^5}\right),$$

so daß hier für $z = l$ wieder $d = \frac{1}{15}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ erhalten wird.

Man hat $V = Mo' = \frac{Qz^2}{l^2}$ für FE als Z-Achse.

Die graphische Darstellung des Momentes folgt auch aus Fig. 710, wenn man die dort gezeichnete Biegungslinie, Seite *I* und die Vertikale $E'E$ zusammen betrachtet.

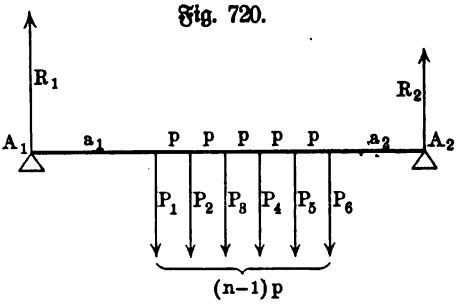
Faßt man diese Momentenfläche wieder als Belastung auf, so erhält man die Biegungslinie des Trägers mit Dreieckbelastung.

b) Hat der Zweistützenträger neben einer gleichmäßigen Belastung Q beliebig-viele Einzellasten $P_1, P_2, \ldots$, so sind zunächst die beiden Reaktionen zu bestimmen, indem man einmal das eine Ende des Trägers und einmal sein anderes Ende als Drehpunkt wählt. Die Lage des gefährlichen Querschnittes läßt sich rechnerisch leicht durch Untersuchung der Vertikalkraft bestimmen, indem man, von dem einen Ende des Trägers ausgehend, sie bis zur Stelle ihres Vorzeichenwechsels verfolgt. Stellt man die Momente für $Q = l\gamma$ und $P_1, P_2, \ldots$ einzeln dar, so giebt ihre Vereinigung die Momentenfläche, durch welche man die Lage des gefährlichen Querschnittes gleichfalls findet, und zwar, indem man Mo_{max} aufsucht. Für $Q = 0$ fällt der gefährliche Querschnitt natürlich in den Angriffspunkt einer Einzellast.

Auch in graphostatischer Hinsicht ist nichts Besonderes zu bemerken, man

hat Fig. 208 und Fig. 209 miteinander zu verbinden. Gemäß Fig. 208 findet man zunächst die Reaktionen, abgesehen von dem Einflusse ($\frac{1}{2}Q$) von Q. Trägt man die Ordinaten der Momentenfläche aus Fig. 208 als Lote auf $A'B'$ in Fig. 209, so erhält man die gesamte Momentenfläche; Entsprechendes gilt auch für die Vertikalkräfte. Statt dessen kann man auch die gleichmäßige Belastung Q durch die Vertikalen der Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ in die Teile $Q_0, Q_1, \ldots$ zerlegen und für das System der Kräfte $Q_0, P_1, Q_1, P_2, \ldots$ die graphostatische Konstruktion ausführen.

Fig. 720.



Ist der Träger durch n gleiche Lasten P in $n-1$ gleichen Abständen belastet, wie es Fig. 720 zeigt, so ist

$$R_1 = n \,.\, P\,\frac{a_2 + \frac{1}{2}(n-1)p}{l} \quad \text{und} \quad R_2 = n \,.\, P \cdot \frac{a_1 + \frac{1}{2}(n-1)p}{l} \qquad 376)$$

Für den gefährlichen Querschnitt, der mit dem Angriffspunkte der $m$ten Belastung zusammenfällt, gilt

$$-R_1 + (m-1)P < 0 \quad \text{und} \quad -R_1 + mP \geqq 0.$$

Man hat dabei

$$\left.\begin{aligned} Mo_{max} &= -R_1[a_1 + (m-1)p] + \frac{m(m-1)}{2}p \,.\, P \\ &= -R_1 a_1 - (m-1)p\,(R_1 - \tfrac{1}{2}mP) \end{aligned}\right\} \cdot \qquad 377)$$

Für $a_1 = a_2$ ist $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}nP$.

Für $a_1 = a_2 = p$ liegt eine Teilung von l in $n+1$ gleiche Teile p vor; hier ist

1. für n als ungerade Zahl $m = \dfrac{n+1}{2}$ und $Mo_{max} = -\dfrac{n+1}{8} \cdot Pl$

2. für n als gerade Zahl $m = \frac{1}{2}n$ und $Mo_{max} = -\dfrac{n(n+2)}{8(n+1)} \cdot Pl.$

Im Falle 1 ist die Mitte des Balkens gefährlich, während im Falle 2 das ganze mittlere Stück des Balkens von der Länge p gleiche Gefährdung zeigt und infolgedessen schubfrei ist.

Für $n+1 = 3$ ist $p = \frac{1}{3}l$ und $Mo_{max} = \frac{1}{8}Pl$ (Last in Drittelpunkten),
„ $n+1 = 4$ „ $p = \frac{1}{4}l$ „ $Mo_{max} = \frac{1}{12}Pl$ („ „ Viertel „),
„ $n+1 = 5$ „ $p = \frac{1}{5}l$ „ $Mo_{max} = \frac{3}{20}Pl$ („ „ Fünftel „),
„ $n+1 = 6$ „ $p = \frac{1}{6}l$ „ $Mo_{max} = \frac{2}{24}Pl$ („ „ Sechstel „).

Für den Sonderfall $n = 2$ bei $a_1 = a_2 = a$, wie ihn Fig. 721 (a. f. S.) darstellt, zeigt die Momentenskizze die gleiche Gefährdung des ganzen Mittelstückes und dessen schubfreies Gepräge, dem auch die Darstellung der Vertikalkraft entspricht. Man hat $Mo_{max} = a \,.\, P$, so daß die Festigkeitsgleichung unabhängig ist von p, also von der Länge des Mittelstückes. Dieses Ergebnis ist angenähert richtig, solange das Eigengewicht des Trägers vernachlässigt

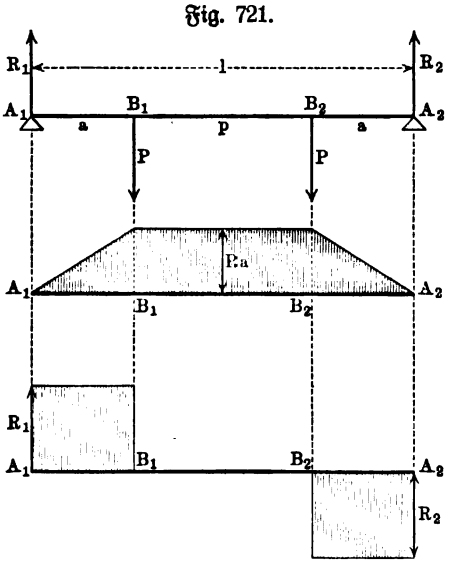
werden darf. Bei dessen Berücksichtigung ist der Momentenfläche die Momentenfläche für gleichmäßige Belastung hinzuzufügen.

Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes ist das Moment für die Strecke p konstant, so daß die genaue Formänderungsgleichung

$$\varrho = \frac{E.\mathfrak{T}r}{Mo} = \frac{E.\mathfrak{T}r}{P\,.\,a}$$

hier einen konstanten Wert von ϱ giebt, d. h. das Mittelstück biegt sich nach dem Kreisbogen durch, die Seitenstücke zeigen, unter tangentialem Anschluß an das Mittelstück die (umgekehrte) Durchbiegung eines Freiträgers mit Endbelastung.

Fig. 721.



Zum Vergleiche ist noch in Fig. 722 ein Träger mit überstehenden (überkragenden) Enden dargestellt, bei welchem dieselbe Momentenfläche im positiven Gebiete auftritt, welche in Fig. 722 im negativen Gebiete vorhanden ist.

Für Fig. 722 findet man

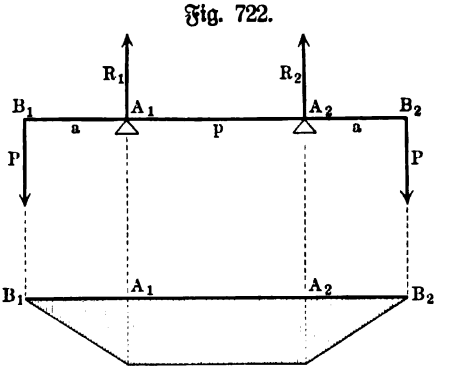
$$d_1 = \tfrac{1}{8}\frac{Pp^3}{E\mathfrak{T}r}\cdot\frac{a}{p}$$

für die Mitte des Balkens und

$$d_2 = \frac{Pp^3}{E\mathfrak{T}r}\left(\frac{a^3}{3p^3} + \frac{a^2}{2p^2}\right)$$

für die freien Enden.

Fig. 722.



Die Berücksichtigung des Eigengewichtes in Fig. 720 und in Fig. 722 fordert eine eigene Untersuchung.

In graphostatischer Beziehung sind beide Fälle, auch bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, leicht zu erledigen.

c) Hat der Zweistützenträger mit überkragenden Enden eine gleichmäßige Belastung, wie es Fig. 723 darstellt, so ist

$$R_1 = R_2 = \tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}L\gamma.$$

Für M_1N_1 ist

$$Mo = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{L}{2} - z\right)^2,$$

so daß für $z = \dfrac{l}{2}$

$$Mo_{max} = \frac{\gamma}{8}(L - l)^2$$

ist. Für M_2N_2 ist

$$Mo = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 - \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right)$$
$$= \frac{\gamma}{8}(L^2 - 2Ll + 4z^2).$$

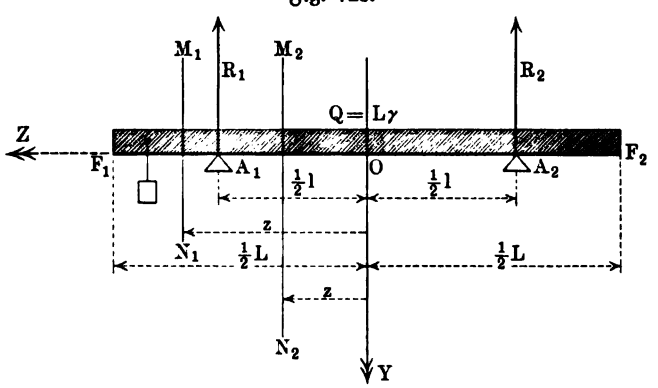
Aus der Annullierung der Ableitung $Mo' = \gamma z$ folgt $z = 0$, d. h. auch in 0 liegt ein Maximum des Momentes und zwar ist dessen Wert

$$Mo_{max} = \frac{\gamma}{8} L(L - 2l).$$

Man hat also für den Gang des Momentes die Tabelle:

F_1	A_1	O	A_2	F_2
0	$\frac{\gamma}{8}(L-l)^2$	$\frac{\gamma}{8}L(L-2l)$	$\frac{\gamma}{8}(L-l)^2$	0

Fig. 723.



Bezeichnen wir den Wert des Momentes für eine der Auflagerstellen durch Mo_A und für die Mitte durch Mo_O, so ist Mo_A stets positiv, während

Mo_O positiv ist für $L > 2l$, d. h. für $l < \frac{1}{2}L$,
Mo_O den Wert Null hat für $L = 2l$, d. h. für $l = \frac{1}{2}L$,
Mo_O negativ ist für $L < 2l$, d. h. für $l > \frac{1}{2}L$.

Für $L > 2l$ ist $Mo_A = \frac{\gamma}{8}(L^2 - 2Ll + l^2) > Mo_O = \frac{\gamma}{8}(L^2 - 2Ll)$ und dasselbe ist auch noch der Fall für $L = 2l$, so daß also für $l \leqq \frac{1}{2}L$ die Stellen über den Stützen gefährlicher sind als die Mittelstelle.

Für $L < 2l$ ist Mo_O negativ, so daß sein Zahlenwert $-\frac{\gamma}{8}L(L-2l)$ ist. Vergleicht man diesen Zahlenwert mit dem Werte von Mo_A, so erhält man den Ansatz

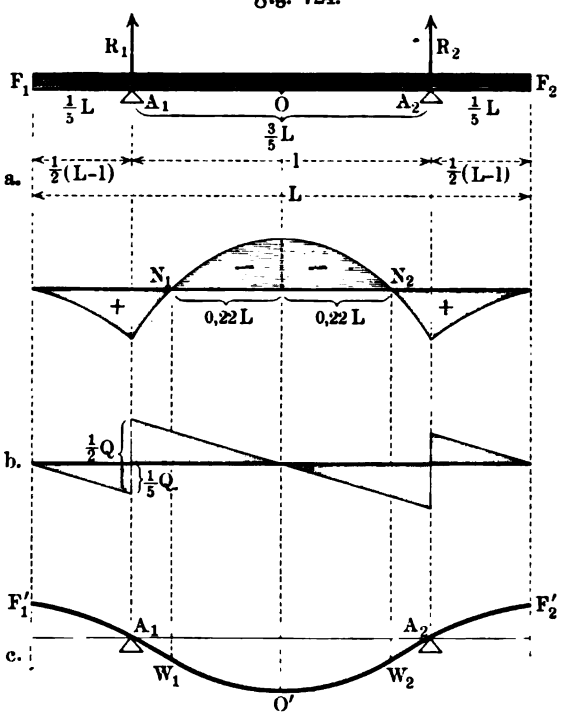
$$\frac{\gamma}{8}(L-l)^2 = -\frac{\gamma}{8}(L^2 - 2Ll),$$

aus dem $l = L(2 \pm \sqrt{2})$ folgt. Da $l < L$ ist, so hat nur das Zeichen — Bedeutung, d. h. man hat

$$l = L(2 - \sqrt{2}) = 0{,}58579\,L.$$

Für $l = 0{,}58579\,L \sim \frac{3}{5}L$, wobei $\frac{L-l}{2} = 0{,}207105\,L \sim \frac{1}{5}L$ ist,

Fig. 724.



haben also die positiven Momente über den Stützen und das negative Moment in der Mitte denselben Zahlenwert. Man nennt diese Anordnung (vergl. Fig. 724) die günstigste Stützenstellung, weil deren Änderung ungünstigere Beziehungen der Maximalwerte zur Folge hat. Bei einem Hinausrücken der Stützen wächst der Zahlenwert von Mo_O, welcher dabei negativ bleibt, während bei einem Zusammenrücken der Stützen der Zahlenwert von Mo_A, welcher stets positiv ist, wächst, d. h. für die günstigste Stützenstellung hat das Maximalmoment seinen kleinsten Wert.

Man hat in diesem Falle

$$+Mo_A = -Mo_O = \frac{0{,}1716}{8} \cdot \gamma \cdot L^2 = \frac{0{,}1716}{8} QL \sim \tfrac{1}{6}\left(\frac{QL}{8}\right) \qquad 378)$$

Vergleicht man den Träger mit überkragenden Enden bei günstigster Stützenstellung mit dem gewöhnlichen Zweistützenträger, so sieht man, daß dieser ($Mo_{max} = \frac{1}{8}QL$) nur etwa ein Sechstel der Tragfähigkeit des Trägers mit Kragstücken zeigt.

In der Praxis führt man oft die Länge c des überkragenden Endes ein, so daß $\frac{L-l}{2} = c$ und $l = L - 2c$ zu setzen ist; für die günstigste Stützenstellung ist $c = 0{,}207\,L \sim \frac{1}{5}L$.

Für die Bestimmung der Abmessungen gilt demnach folgendes:

I. Für $l > 0{,}586\,L$ oder $c < 0{,}207\,L$ ist O am gefährlichsten, d. h. es ist in die Festigkeitsgleichung einzuführen

$$-Mo_O = -\frac{\gamma}{8}L(L - 2l) = \tfrac{1}{8}Q(L - 4c).$$

II. Für $l = 0{,}586\,L$ oder $c = 0{,}207\,L$ sind A_1, O und A_2 gleich ge-

fährlich (günstigste Stützenstellung) und es ist in die Festigkeitsgleichung einzuführen:

$$Mo = \frac{0{,}1716}{8} QL \sim \tfrac{1}{47} QL.$$

III. Für $l < 0{,}586\,L$ oder $c > 0{,}207\,L$ sind A_1 und A_2 am gefährlichsten, d. h. es ist in die Festigkeitsgleichung einzuführen:

$$Mo_A = \frac{\gamma}{8}(L-l)^2 = \tfrac{1}{2} Q \cdot \frac{c^2}{L}.$$

Durch die Gleichung $Mo = E\mathfrak{T}\mathfrak{r} f''(z)$ findet man leicht für die Durchbiegung innerhalb der Stützen als Gleichung der elastischen Linie

$$y = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left[\frac{L}{8}(L-2l)(4z^2 - l^2) + \frac{z^4}{3} - \frac{l^4}{48}\right] \cdot \cdot \quad 379)$$

Für $l < 0{,}524\,L$ ist y in der Mitte ($z = 0$) negativ, d. h. der Balken biegt sich hier nach oben durch, für $l > 0{,}524\,L$ ist y in der Mitte ($z = 0$) positiv, d. h. der Balken biegt sich hier nach unten durch.

Durch $f'(z) = 0$ erhält man als Stellen, an denen Maxima oder Minima der Durchbiegung liegen können, 0 und $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3L(2l-L)}$. Diese drei Stellen fallen für $l = 0{,}5\,L$ zusammen (0), während für $l < 0{,}5\,L$ zwei davon imaginär werden, so daß nur für $l > 0{,}5\,L$ alle drei als gegebene Stellen des Balkens vorhanden sein können; sie sind in diesem Falle vorhanden, wenn der berechnete Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3L(2l-L)}$ im Mittelstücke liegt, so daß die Grenze $\frac{1}{2}\sqrt{3L(2l-L)} = \frac{1}{2}l$ oder $l = 0{,}5505\,L$ ist.

Die Durchbiegung außerhalb der Stützen ist ebenso gemäß

$$E\mathfrak{T}\mathfrak{r} f''(z) = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{L}{2} - z\right)^2$$

zu behandeln. Man findet für das freie Ende als Durchbiegung

$$d = \tfrac{1}{348}\frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}(3L^4 - 18L^2l^2 - l^4).$$

Für $l > 0{,}406\,L$ ist d negativ, d. h. das freie Ende biegt sich nach oben,
für $l < 0{,}406\,L$ ist d positiv, d. h. das freie Ende biegt sich nach unten.

Wendepunkte, welche Nullwerten des Momentes entsprechen, sind innerhalb der Stützen durch die Gleichung

$$L^2 - 2Ll + 4z^2 = 0$$

gegeben, welcher $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2Ll - L^2}$ entspricht. Es sind also zwei Wendepunkte vorhanden, solange $l > 0{,}5\,L$ ist, während diese in der Mitte zusammenfallen für $l = 0{,}5\,L$.

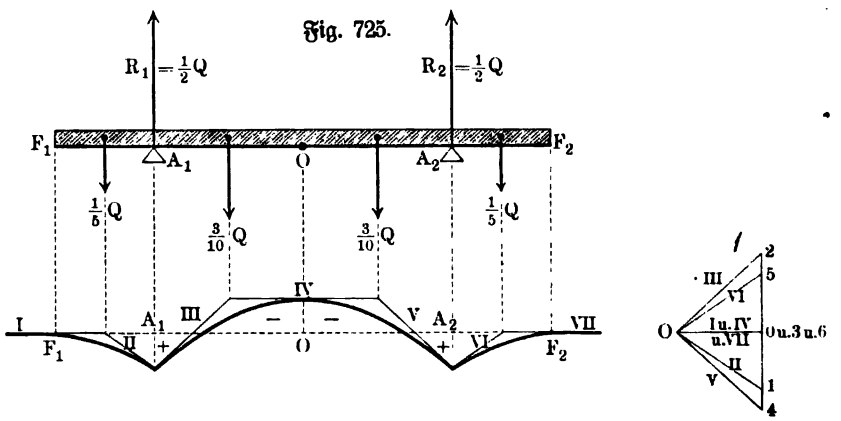
Außerhalb der Stützen sind Nullwerte des Momentes für $z = \pm\frac{1}{2}L$ vorhanden, d. h. an den Enden des Stabes, so daß hier keine Wendepunkte auftreten.

Für den Fall der günstigsten Stützenstellung ($l = 0{,}586\,L$) ist die Durchbiegung in der Mitte demnach positiv und an den Enden negativ; alle drei Maxima bezw. Minima der Durchbiegung sind reell ($l > 0{,}5\,L$),

aber zwei davon fallen außerhalb des Mittelstückes, so daß sie nicht in Frage kommen, während die beiden Wendepunkte vorhanden sind. Vergl. dazu Fig. 724 b und c (auf S. 1006).

Für die graphostatische Behandlung zeigt Fig. 725 die erste Anlage des Seilecks, welches die Momentfläche darstellt, für den Fall $l = \frac{3}{5} L$. Teilt man dann $F_1 A_1$ in beliebig viele (n) gleiche Teile, so füllt die entsprechende

Fig. 725.



Konstruktion (vergl. $\overline{01}$) den Winkelraum zwischen *I* und *II* mit Tangenten, so daß zwischen den Vertikalen von F_1 und A_1 ein paraboliſcher Abschluß entsteht. Dasselbe gilt für die Strecke $A_1 A_2$ in Bezug auf die Winkelräume zwischen *III* und *IV* und *V* und für die Strecke $A_2 F_2$ in Bezug auf den Winkelraum zwischen *VI* und *VII*.

Sieht man die Momentenfläche wieder als Belastungsfläche an, so erhält man durch ein zugehöriges Seileck die Biegungslinie in beliebiger Annäherung.

d) Hat der Zweistützenträger eine Dreieckslast zu tragen, wie Fig. 726 zeigt, so ist $R_1 = \frac{1}{3} Q$ und $R_2 = \frac{2}{3} Q$. Für einen Schnitt MN ist $Z = Q \cdot \frac{z^2}{l^2}$

Fig. 726.

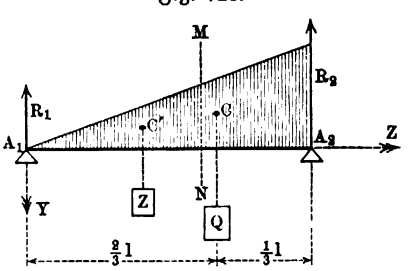


Fig. 727.

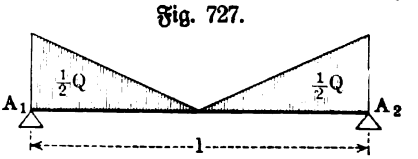
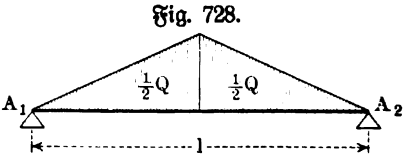


Fig. 728.



und also $Mo = \frac{1}{3} \frac{Q z^3}{l^2} - \frac{1}{3} Q z$. Da $V = -R_1 + Z$ ist, so ist $V = 0$ für $z^2 = \frac{l^2}{3}$, d. h. für $z = 0{,}5774\, l$; für diese Stelle ist

$$Mo_{max} = -0{,}1283\,Ql \quad \ldots \ldots \ldots \quad 380)$$

Für A_1A_2 als Z-Achse führt $E\mathfrak{T}\mathfrak{r}f''(z) = Mo$ zu

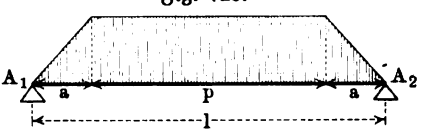
$$y = \frac{Ql^3}{180\,E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(3\,\frac{z^5}{l^5} - 10\,\frac{z^3}{l^3} + 7\,\frac{z}{l}\right).$$

Für $f'(z) = 0$ erhält man die Stelle $z = 0{,}5192\,l$, an welcher das Maximum der Durchbiegung liegt, und zwar ist

$$y_{max} = 0{,}013\,04\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 381)$$

Vergleicht man diesen Fall mit dem der gleichmäßigen Belastung, so sieht man, daß Mo_{max} angenähert denselben Wert erhält und ebenso y_{max}, während die Reaktionen in beiden Fällen erheblich verschieden sind.

Fig. 729.



Für den Fall der Fig. 727 erhält man ebenso für die Mitte

$$Mo_{max} = \tfrac{1}{12}\,Ql \quad \text{und} \quad y_{max} = \tfrac{3}{320}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Für den Fall der Fig. 728 ergiebt sich in gleicher Weise für die Mitte

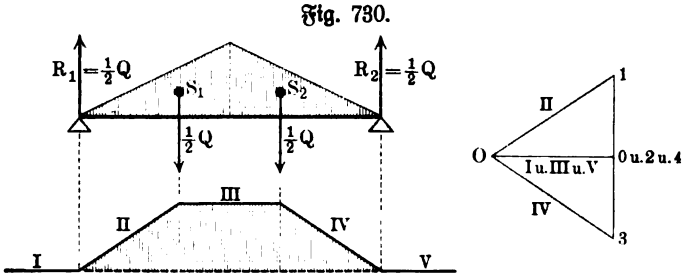
$$Mo_{max} = \tfrac{1}{6}\,Ql \quad \text{und} \quad y_{max} = \tfrac{1}{60}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Für die Trapezlast in Fig. 729 hat man ebenso für die Mitte

$$Mo_{max} = \frac{8a^2 + 3p(4a + p)}{24(a + p)} \cdot Q.$$

Dieser Wert nähert sich $\frac{1}{8}\,Ql$ um so mehr, je kleiner $a : p$ ist.

Fig. 730.



Bei graphostatischer Behandlung zeigt Fig. 730 für den Fall der Fig. 728 die Anlage des Seilecks, welches die Momentenfläche darstellt. Bei weiterer Einteilung der Dreiecke von den Schwerpunkten S_1 und S_2 füllt sich der Winkel zwischen II und III und zwischen III und IV mit Tangenten, so daß eine krummlinige Begrenzung entsteht.

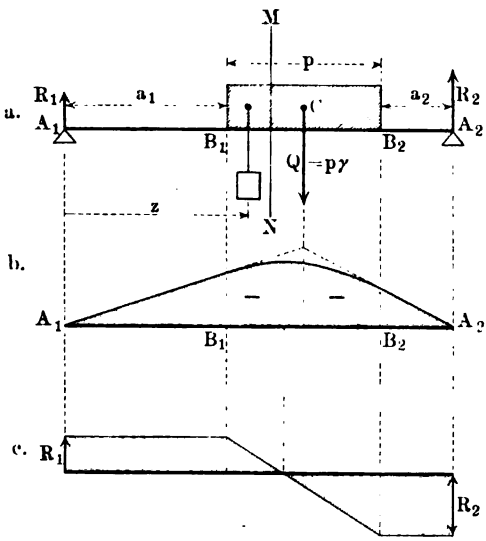
e) Ist der Zweistützenträger nur für einen Teil seiner Achse gleichmäßig belastet ($Q = p\gamma$), wie es Fig. 731 (a. f. S.) zeigt, so ist für eine solche Streckenlast

$$R_1 = Q \cdot \frac{2a_2 + p}{2l} \quad \text{und} \quad R_2 = Q \cdot \frac{2a_1 + p}{2l}.$$

Für die Strecken $A_1 B_1$ und $B_2 A_2$ entspricht das Moment den Momenten von (umgekehrten) Freiträgern mit Endbelastung, während man für einen Schnitt MN zwischen B_1 und B_2 hat

$$Mo = -R_1 z + \tfrac{1}{2}(z - a_1)^2 \gamma.$$

Fig. 731.



Diesem Werte entspricht ein parabolischer Abschluß der Momentenfläche zwischen B_1 und B_2, wie Fig. 731 b zeigt; die Endtangenten entsprechen einer konzentrierten Belastung $[Q]$.

Den Verlauf der Vertikalkraft stellt Fig. 731 c dar; die Nullstelle teilt p im Verhältnisse $R_1 : R_2$, so daß diese Stelle von A_1 den Abstand

$$a_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot p = a_1 + \frac{R_1 \cdot p}{Q}$$

hat. Man hat also für diese Stelle

$$Mo_{max} = -R_1\left(a + \frac{R_1 p}{Q}\right) + \tfrac{1}{2}\gamma \frac{R_1^2 \cdot p^2}{Q^2} = -R_1\left(a_1 + \tfrac{1}{2} p \cdot \frac{R_1}{Q}\right),$$

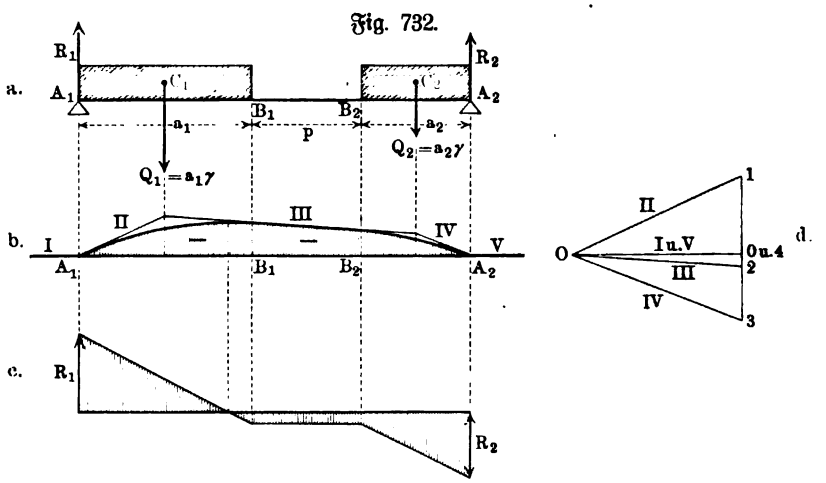
wofür auch geschrieben werden kann

$$-R_2\left(a_2 + \tfrac{1}{2} p \frac{R_2}{Q}\right).$$

Für den Fall der Fig. 732 gilt $R_1 + R_2 = Q_1 + Q_2$ und

$$R_1 = \frac{Q_1(2l - a_1) + Q_2 a_2}{2l} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{Q_2(2l - a_2) + Q_1 a_1}{2l}.$$

Fig. 732.



Der Verlauf der Vertikalkraft ist für die verschiedenen Fälle durch die Fig. 732 c_1, c_2 und c_3 dargestellt.

Für $R_1 > Q_1$ bezw. $R_2 < Q_2$ zeigt Fig. 732 c_1 diesen Verlauf; hier wird a_2 im Verhältnisse $(R_1 - Q_1) : R_2$ geteilt, so daß die Nullstelle vom rechten Ende den Abstand $\frac{R_2}{R_1 - Q_1 + R_2} \cdot a_2 = \frac{R_2}{Q_2} \cdot a_2$ hat.

Für $R_1 = Q_1$ bezw. $R_2 = Q_2$, woraus $a_1 = a_2$ folgt, zeigt Fig. 732 c_2 den Verlauf der Vertikalkraft; hier ist die ganze Strecke $B_1 B_2$ mit Nullstellen besetzt.

Für $R_1 < Q_1$ bezw. $R_2 > Q_2$ zeigt Fig. 732 c_3 den Verlauf der Vertikalkraft; hier ist a_1 im Verhältnisse $R_1 : (R_2 - Q_2)$ geteilt, so daß die Nullstelle vom linken Ende den Abstand $\frac{R_1}{R_1 - Q_2 + R_2} \cdot a_1 = \frac{R_1}{Q_1} \cdot a_1$ hat.

Im Falle $R_1 > Q_1$ bezw. $R_2 < Q_2$ hat das Moment für die Nullstelle, d. h. das Maximalmoment den Wert

$$Mo_{max} = -R_2\left(\frac{R_2}{Q_2}a_2\right) + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{R_2}{Q_2} \cdot a_2\right)^2 = -\frac{R_2^2}{2\,Q_2} \cdot a_2 \qquad 382\,a)$$

im Falle $R_1 < Q_1$ bezw. $R_2 > Q_2$ ist ebenso

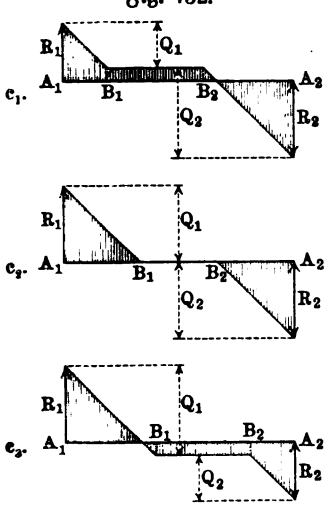
$$Mo_{max} = -\frac{R_1^2}{2\,Q_1} \cdot a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 382\,b)$$

Für $R_1 = Q_1$ bezw. $R_2 = Q_2$ folgt aus den Werten von R_1 und R_2 die Beziehung $a_1 : a_2 = Q_2 : Q_1$, so daß $a_1 Q_1 = a_2 Q_2$ ist. Man hat hier für B_1 als Moment $-R_1 a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 \gamma = -\frac{1}{2} a_1 Q_1$ und für B_2 als Moment ebenso $-\frac{1}{2} a_2 Q_2$, so daß für die Strecke $B_1 B_2$ gilt

$$Mo_{max} = -\tfrac{1}{2} a_1 Q_1 = -\tfrac{1}{2} a_2 Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 382\,c)$$

Für Fig. 732 a geben Fig. 732 b, c und d die nötigen Veranschaulichungen.

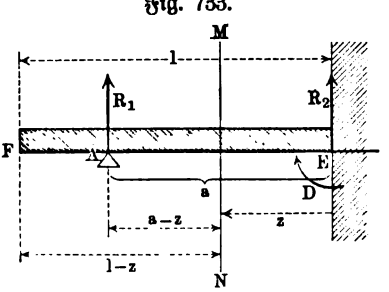
Fig. 732.



Berücksichtigt man das Eigengewicht des Trägers, so ist für die Fig. 731 und Fig. 732 noch das Moment der gleichmäßigen Belastung bezw. die entsprechende Vertikalkraft hinzuzufügen, wodurch sich natürlich die Stellen der gefährlichen Querschnitte im allgemeinen ändern.

In graphostatischer Hinsicht ist nichts hinzuzufügen.

Fig. 733.



f) Um den Einfluß einer Verrückung der Stütze in dem Falle 3 zu betrachten, wie es Fig. 733 für gleichmäßige Belastung zeigt, berechnen wir das Moment für das linke Stück beim Schnitte MN. Man hat hier (bei überkragendem Ende)

$$Mo = -R_1(a - z) + \tfrac{1}{2}(l - z)^2\gamma.$$

Für die Biegungslinie gilt also (für EA)

$$E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot f''(z) = -R_1(a - z) + \tfrac{1}{2}(l^2 - 2lz + z^2)\gamma,$$

woraus unmittelbar folgt

$$E\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot y = -R_1(\tfrac{1}{2}az^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}l^2z^2 - \tfrac{1}{3}lz^3 + \tfrac{1}{12}z^4)\gamma.$$

Da y in A, d. h. für $z = a$ den Wert Null hat, so ist

$$aR_1 = (\tfrac{3}{4}l^2 - \tfrac{1}{2}al + \tfrac{1}{8}a^2)\gamma.$$

Für $\frac{a}{l} = \mu$ erhält man bei $R_1 + R_2 = Q$ demnach

$$R_1 = Q \cdot \frac{6 - 4\mu + \mu^2}{8\mu} \quad \text{und} \quad R_2 = Q \cdot \frac{-6 + 12\mu - \mu^2}{8\mu}.$$

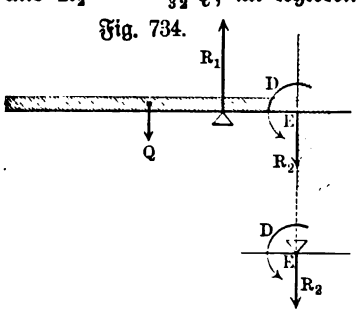
Für $a = l$ oder $\mu = 1$ erhält man wieder den gewöhnlichen Fall 3 mit $R_1 = \frac{3}{8}Q$ und $R_2 = \frac{5}{8}Q$.

Für $a = 0$ oder $\mu = 0$ kommt man dagegen nicht zurück auf den Fall des Freiträgers, wie der Verlauf der Werte von R_1 und R_2 zeigt; man hat

$\mu = 1$	$R_1 = \frac{3}{8}Q$	$R_2 = \frac{5}{8}Q$
$\mu = 0{,}523$	$R_1 = Q$	$R_2 = 0$
$\mu = 0{,}305$	$R_1 = 2Q$	$R_2 = -Q$
. . . .	. . . .	. . . .
$\mu = 0$	$R_1 = +\infty$	$R_2 = -\infty$

Man sieht, daß R_2 für $\mu < 0{,}523$ negativ wird, so daß man z. B. für $\mu = \frac{1}{2}$ hat $R_1 = +\frac{17}{16}Q$ und $R_2 = -\frac{1}{16}Q$ oder für $\mu = \frac{1}{4}$ hat $R_1 = +\frac{81}{32}Q$ und $R_2 = -\frac{49}{32}Q$; im letzteren Falle, den Fig. 734 darstellt, ist bei E ein Moment D vorhanden, welches für E als Drehpunkt den Einfluß von Q unterstützt, da

Fig. 734.



$$(Q)\frac{l}{2} - (\tfrac{81}{32}Q)\frac{l}{4} = \frac{64 - 81}{128}Ql = -\tfrac{17}{128}Ql$$

ist.

Die Belastung für das überkragende Ende ist $(l - a)\gamma = Q(1 - \mu)$. Um diese mit R_1 zu vergleichen, setzen wir

$$1 - \mu = \frac{6 - 4\mu + \mu^2}{8\mu},$$

woraus $\mu = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{-2})$ folgt, d. h. man hat stets $R_1 > Q(1 - \mu)$. Dabei bestimmt sich die Darstellung der Vertikalkraft gemäß Fig. 735, und zwar so, daß für die Strecke AE Abschlüsse nach Art von a), b) und c) möglich sind; dabei entspricht b) dem Falle $R_1 = Q$, $R_2 = 0$, und a) dem Falle $R_1 > 0$ und $R_2 > 0$, und c) dem Falle $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$.

Man sieht daraus, daß stets die Punkte E und A für die gefährlichen Querschnitte in Frage kommen, im Falle a) außerdem noch der Punkt O.

Man hat in allen drei Fällen für den Punkt A

$$Mo_A = \tfrac{1}{2}(1-\mu)^2 Ql$$

und für den Punkt E

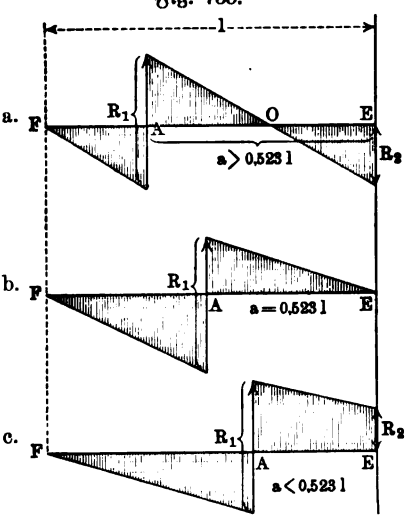
$$Mo_E = -R_1 a + \tfrac{1}{2} Ql = \tfrac{1}{8} Ql(-2 + 4\mu - \mu^2).$$

Im Falle a) ist außerdem die Stelle O zu bestimmen, welche a im Verhältnisse $(Q\mu - R_2) : R_2$ teilt, so daß $OE = a \cdot \dfrac{R_2}{Q\mu} = l \cdot \dfrac{R_2}{Q}$ ist.

Man hat also an dieser Stelle

$$Mo_{max} = -R_1(a - OE) + \tfrac{1}{2}\frac{R_1^2}{\gamma}.$$

Fig. 735.



Wir führen den Fall a) noch gemäß Fig. 736 etwas weiter für $\mu = \frac{3}{4}$. Man hat $R_1 = 0{,}5937\,Q$ und ferner $R_2 = 0{,}4063\,Q$ und

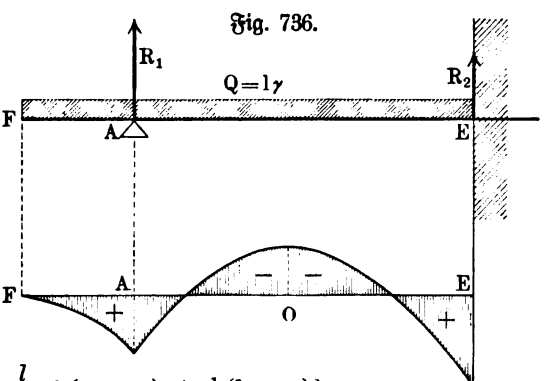
$$Mo_A = +\tfrac{1}{32} Ql = +0{,}0313\,Ql$$
$$Mo_E = +0{,}0548\,Ql$$
$$Mo_{max} = -0{,}0261\,Ql \text{ für}$$
$$OE = 0{,}4063\,l.$$

Da bei einer Endstütze ($a = l$) für das Maximalmoment bei E gewonnen wurde $\frac{16}{128} Ql = 0{,}13\,Ql$, so ist die Sicherheit durch das Einrücken der Stütze im Verhältnis 5 : 13 gestiegen.

Es wird hier $Mo_A = Mo_E$ für $\mu = \dfrac{6-\sqrt{6}}{5} \sim 0{,}71$ und zwar ist $Mo_A = Mo_E \sim 0{,}02\,Ql$, während dabei $R_1 = 0{,}645\,Q$ und $Mo_{max} = -0{,}0195\,Ql$ wird.

Für eine graphostatische Behandlung der Aufgabe (vergl. Fig. 736) stellt man wieder das Moment für den entsprechenden Fall dar, bei dem statt der Einklemmung bei E eine Auflagerung stattfindet, wie es Fig. 737 (a. f. S.) zeigt, in der A_2 für E eingetreten ist. Man hat dann $R_1 = \dfrac{l}{2a} \cdot Q$ und $R_1 + R_2 = Q$, so daß für den Schnitt MN gilt (vergl. Fig. 733)

Fig. 736.



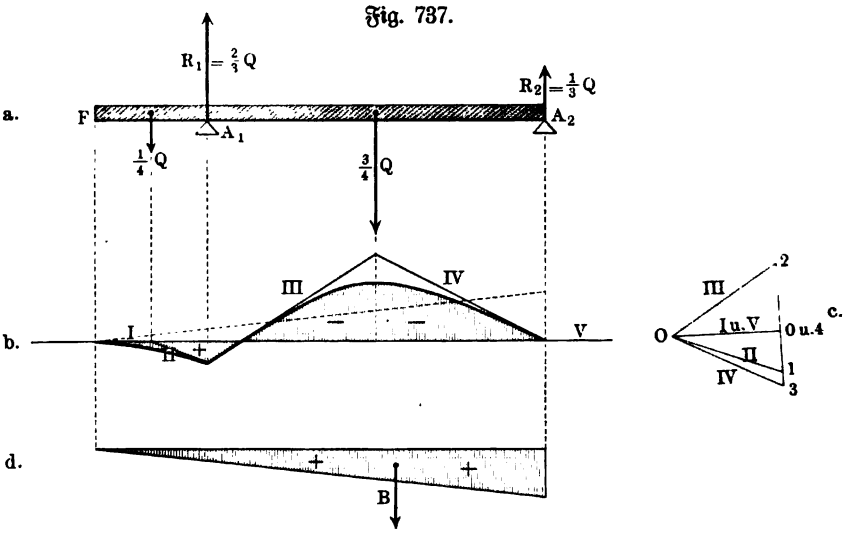
$$Mo = -\frac{l}{2a} Q(a - z) + \tfrac{1}{2}(l - z)^2 \gamma,$$

während für FA_1 Freiträgerdurchbiegung vorliegt. Für $z = 0$ ist $Mo = 0$ wie es sein muß.

Für $a = \frac{3}{4} l$ hat die Belastung von FA_1 und A_1A_2 die Werte $\frac{1}{4} Q$ und $\frac{3}{4} Q$, während $R_1 = \frac{2}{3} Q$ und $R_2 = \frac{1}{3} Q$ ist. Denkt man die Belastungen von FA_1 und A_1A_2 je in ihrem Schwerpunkte verdichtet, so gilt das Krafteck der Fig. 737 c, dem das Seileck der Fig. 737 b entspricht. Zerlegt man die Belastung von FA_1 in gleiche Teile (n), so rundet sich der Winkel zwischen I und II ab, so daß für die Grenze ($lim\, n = \infty$) ein parabolischer Zug entsteht; Entsprechendes gilt für die Zerlegung der Belastung über A_1A_2 in Bezug auf den Winkel zwischen III und IV.

Verbindet man die Fig. 737 b wieder mit der Momentenfläche für die Einspannung, welche in Fig. 737 d gezeichnet ist, so ist für die gesamte Momenten-

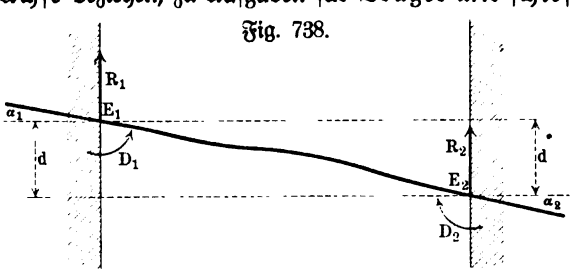
Fig. 737.



fläche als Belastung für den Teil [B] wieder nur die Lage des Schwerpunktes gegeben, was aber ausreicht, um das Seileck für die Bestimmung von B zu zeichnen, womit auch das Einspannungsmoment für A_2 gegeben ist.

g) Um von Aufgaben, welche sich auf Träger mit wagerechter Achse beziehen, zu Aufgaben für Träger mit schief gelagerter Achse überzugehen, ist die folgende allgemeine Betrachtung von Nutzen.

Fig. 738.



In Fig. 738 ist ein beiderseits schief eingespannter Stab dargestellt, bei ungleicher Höhe der Einspannungspunkte E_1 und E_2. Wir behandeln diesen Fall unter der Voraussetzung, daß α_1, α_2 und d so klein sind, daß die Momente der Belastung für gerade und schiefe Lage der Achse als gleich angenommen werden können.

Denkt man die Einspannung rechts beseitigt und durch die entsprechende

Reaktion [R_2] und das entsprechende Reaktionsmoment [D_2] ersetzt, so ist der Stab als ein bei E_1 schief eingespannter Freiträger aufzufassen.

Für die Winkelabweichung hat man

$$-\tfrac{1}{2}\frac{R_2 l^2}{E\mathfrak{T}r}+\frac{D_2 l}{E\mathfrak{T}r}+tng\,\alpha_0+tng\,\alpha_1=tng\,\alpha_2,$$

falls man die Winkelabweichung, welche allein der Belastung entspricht, durch $tng\,\alpha_0$ bezeichnet.

Für die Durchbiegung gilt ebenso

$$-\tfrac{1}{3}\frac{R_2 l^3}{E\mathfrak{T}r}+\tfrac{1}{2}\frac{D_2 l^2}{E\mathfrak{T}r}+d_0+l\,tng\,\alpha_1=d,$$

falls man die Durchbiegung, welche allein der Belastung entspricht, durch d_0 bezeichnet.

Wäre der Stab bei gleicher Höhe der Punkte E_1 und E_2 in diesen wagerecht eingeklemmt, so würden statt der Größen R_1, D_1, R_2, D_2 andere Größen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{D}_2$ auftreten, für welche $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ und $d=0$ wäre. Man hätte dann bei gleicher Belastung

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{R}_2 l^2}{E\mathfrak{T}r}+\frac{\mathfrak{D}_2 l}{E\mathfrak{T}r}+tng\,\alpha_0=0$$

und

$$-\tfrac{1}{3}\frac{\mathfrak{R}_2 l^3}{E\mathfrak{T}r}+\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}_2 l^2}{E\mathfrak{T}r}+d_0=0$$

bezw. für Winkelabweichung und Durchbiegung.

Bei Subtraktion der entsprechenden Gleichungen ergiebt sich

$$-\tfrac{1}{2}(R_2-\mathfrak{R}_2)\frac{l^2}{E\mathfrak{T}r}+(D_2-\mathfrak{D}_2)\frac{l}{E\mathfrak{T}r}+tng\,\alpha_1=tng\,\alpha_2$$

und

$$-\tfrac{1}{3}(R_2-\mathfrak{R}_2)\frac{l^3}{E\mathfrak{T}r}+\tfrac{1}{2}(D_2-\mathfrak{D}_2)\frac{l^2}{E\mathfrak{T}r}+l\,tng\,\alpha_1=d.$$

Daraus ergiebt sich ohne weiteres $R_2-\mathfrak{R}_2$ und $D_2-\mathfrak{D}_2$, so daß man hat

$$\left.\begin{aligned}R_2&=\mathfrak{R}_2+\frac{6E\mathfrak{T}r}{l^3}[l(tng\,\alpha_1+tng\,\alpha_2)-2d]\\ \text{und}\qquad D_2&=\mathfrak{D}_2+\frac{2E\mathfrak{T}r}{l^2}[l(2\,tng\,\alpha_2+tng\,\alpha_1)-3d]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 383\,a)$$

Dieselbe Betrachtung liefert

$$\left.\begin{aligned}R_1&=\mathfrak{R}_1-\frac{6E\mathfrak{T}r}{l^3}[l(tng\,\alpha_1+tng\,\alpha_2)-2d]\\ \text{und}\qquad D_1&=\mathfrak{D}_1-\frac{2E\mathfrak{T}r}{l^2}[l(2\,tng\,\alpha_1+tng\,\alpha_2)-3d]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 383\,b)$$

Statt dessen kann man auch die Gleichung $R_1+R_2=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2$ und die Gleichung $(D_2-\mathfrak{D}_2)=(D_1-\mathfrak{D}_1)+l(R_2-\mathfrak{R}_2)$ bezw. $(D_2-\mathfrak{D}_2)=(D_1-\mathfrak{D}_1)-l(R_1-\mathfrak{R}_1)$ für die weitere Ableitung benutzen.

Bei gegebenen Werten von α_1, α_2 und d ist damit die Aufgabe der

schiefen Einspannung zurückgeführt auf die Aufgabe der geraden Einspannung bei derselben Belastung.

Betrachtet man den Balken bei schiefen und bei geraden Einspannungen für denselben Schnitt, für den das Moment der Belastung D_0 sein mag, so gilt bei Verwendung des linken Balkenstückes bezw.

$$Mo = D_1 + D_0 - R_1 z$$

und

$$\mathfrak{Mo} = \mathfrak{D}_1 + D_0 - \mathfrak{R}_1 z,$$

woraus sich ergiebt

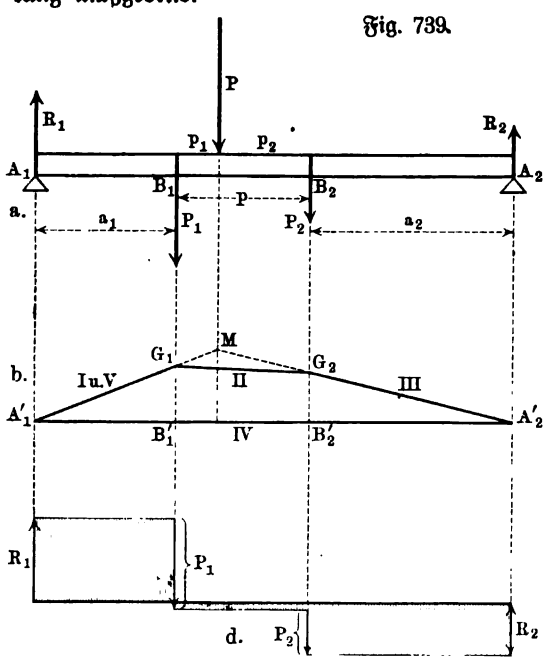
$$Mo = \mathfrak{Mo} + (D_1 - \mathfrak{D}_1) - z(R_1 - \mathfrak{R}_1).$$

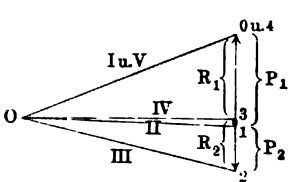
Entwickelt man $tng\,\alpha_1$ und $tng\,\alpha_2$ gemäß Nr. 383) aus den Gleichungen für D_1 und D_2, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} tng\,\alpha_1 &= -\frac{l}{6\,E\,\mathfrak{T}}(2\,D_1 + D_2 - 2\,\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) + \frac{d}{l} \\ \text{und} \\ tng\,\alpha_2 &= +\frac{l}{6\,E\,\mathfrak{T}}(D_1 + 2\,D_2 - \mathfrak{D}_1 - 2\,\mathfrak{D}_2) + \frac{d}{l} \end{aligned}\right\} \quad 384)$$

b) Werden die Lasten durch Querträger übertragen, so ist für diese indirekte Belastung (vergl. Aufg. Nr. 75 auf S. 406) die folgende Betrachtung maßgebend.

Fig. 739.





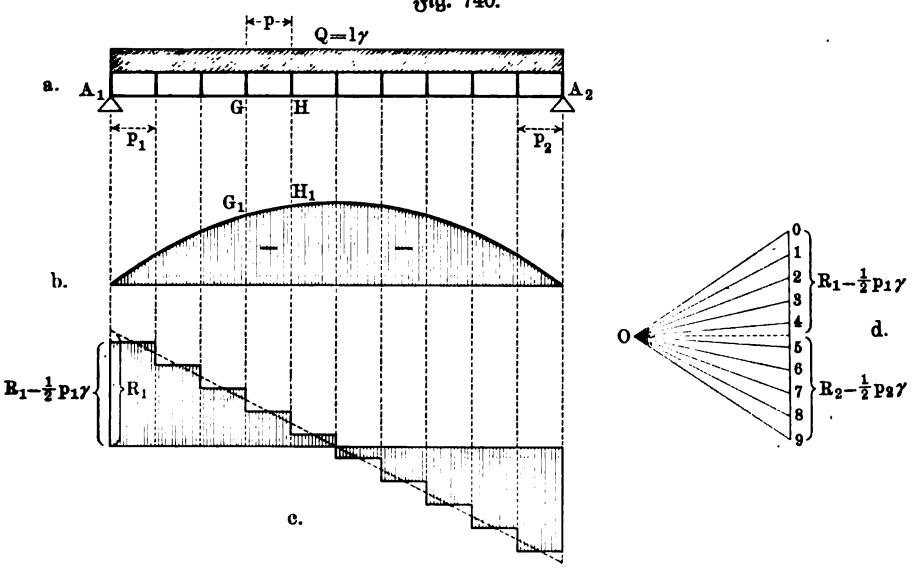
In Fig. 739 zerlegt sich $[P]$ in $[P_1]$ und $[P_2]$, so daß $P_1 = \frac{p_2}{p} \cdot P$ und $P_2 = \frac{p_1}{p} \cdot P$ ist. Berechnet man mit $[P_1]$ und $[P_2]$ die Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$, so ist

$$R_1 l = P_1 (a_2 + p) + P_2 a_2$$
$$= \frac{p_2 a_2 + p_2 p + p_1 a_2}{p} \cdot P = \frac{a_2 (p_1 + p_2) + p_1 \cdot p}{p} \cdot P$$
$$= (a_2 + p_2) \cdot P,$$

d. h. R_1 erhält denselben Wert, als wenn es mit $[P]$ selbst berechnet würde.

Zeichnet man das Seileck für $[P_1]$ und $[P_2]$, wie es Fig. 739 b und c darstellt, so bleiben I und III bei einer Vereinigung von $[P_1]$ und $[P_2]$ zu $[P]$ bestehen, d. h. das Seileck $A_1' M A_2'$ wird durch die Vertikalen der Querträger in den Punkten G_1 und G_2 geschnitten, welchen die neu eingeschaltete Seite II des Seilecks entspricht. Zeichnet man also das Seileck für $[P]$, so erhält man G_1 und G_2 und damit auch II in Fig. 739 c, während eine Parallele (IV) zu $A_1' A_2'$ in Fig. 739 c nach wie vor die Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$ bestimmt.

Fig. 740.



Durch das Seileck sind die Momente bestimmt; die Änderung der Vertikalkraft zeigt Fig. 739 d.

Bei mehreren Einzellasten ist obige Betrachtung von Fall zu Fall anzuwenden.

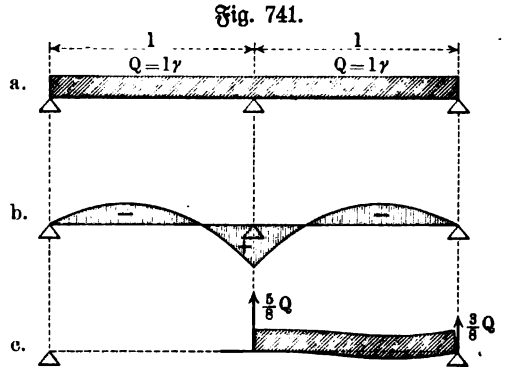
Bei gleichmäßiger Belastung (vergl. Fig. 740) verteilt sich die Belastung $p\gamma$ für $GH = p$ gleichmäßig auf G und H, so daß GH kraftfrei ist, während für G und H Einzellasten vom Werte $\frac{1}{2} p\gamma$ anzusetzen sind. Demgemäß fallen in der Seilkurve (Parabel) für gleichmäßige Belastung ohne Querträger alle Tangenten zwischen G_1 und H_1 aus, während dafür die Strecke $G_1 H_1$ eintritt. Die entsprechende Änderung der ganzen Momentenfläche zeigt Fig. 740 b. Die Änderung der Vertikalkräfte (vergl. Fig. 740 c) ist dadurch bestimmt, daß jedes Feld die Hälfte seiner Belastung auf die

beiden begrenzenden Querträger abgiebt, so daß $R_1 = \frac{1}{2} Q$ sofort um $\frac{1}{2} p_1 \gamma$ verändert wird, wenn p_1 die Länge des ersten Feldes ist; man hat also die neuen Begrenzungslinien zu ziehen, wie Fig. 740 c zeigt.

157. Der Dreistützenträger. Wird ein Balken auf mehr als zwei Stützen gelagert, so nennt man ihn einen durchgehenden (kontinuierlichen) Träger im Gegensatz zu Konstruktionen, bei welchen einzelne Balken von Stütze zu Stütze als Träger verwendet werden.

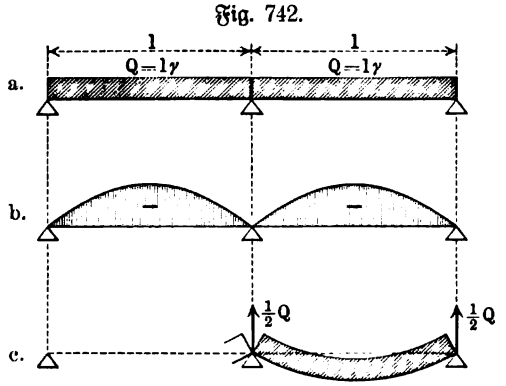
Denkt man einen durchgehenden Träger nach vollendeter Biegung über den Stützen eingemauert und durchschnitten, so zerfällt er in eine Reihe von (im allgemeinen schief eingespannten) einfachen Trägern, deren Behandlung (vergl. S. 1014) zu einer allgemeinen Theorie der durchgehenden Träger führt.

Fig. 741.



Die einfachste Form der durchgehenden Träger wird durch den Dreistützenträger dargestellt. Sind die beiden Endstützen von der Mittelstütze gleich weit entfernt und liegen alle Stützen in gleicher Höhe, so läßt sich dieser Träger bei symmetrischer Belastung ohne weiteres behandeln. In diesem Falle ist nämlich die Tangente seiner Biegungslinie über der Mittelstütze horizontal, so daß er, über dieser eingemauert und zerschnitten, in zwei Träger zerfällt, die § 151 entsprechen. Für gleichmäßige Belastung (γ kg für den laufenden Meter) entsteht z. B. das Bild der Fig. 741, d. h. der durchgehende Träger von der Länge $2l$ ist hier ersetzbar durch zwei Träger von der halben Länge (l), welche über der Mittelstütze horizontal eingemauert sind.

Fig. 742.



Legte man statt dessen zwei Balken von der halben Länge l nebeneinander (Stoß auf der Mittelstütze), so entstände das Bild der Fig. 742.

Für Fig. 741 und für Fig. 742 lautet die Festigkeitsgleichung

$$\frac{1}{8} Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w},$$

so daß die Tragkraft Q in beiden Fällen dieselbe ist. In Fig. 741 erscheinen gegenüber Fig. 742 die Endstützen von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{3}{8}$ entlastet, die Mittel-

stütze von 1 auf $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ mehrbelastet, die Durchbiegung ist $0{,}005\,64\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ für Fig. 741 und $0{,}013\,02\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ für Fig. 742.

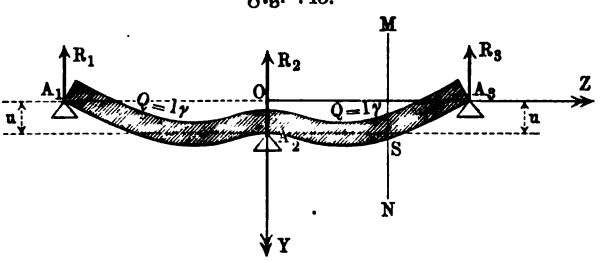
Vergleicht man die Momentenskizzen (*b*) von Fig. 741 und Fig. 742, so sieht man, daß die Mitte von Fig. 741 und Fig. 742 infolge des Zusammenhanges der beiden Teilbalken gesenkt erscheint.

Man kann nun für Fig. 741 die Tragkraft gegenüber Fig. 742 vermehren, falls man die **Mittelstütze in bestimmter Weise senkt.**

Ist die Mittelstütze in Fig. 743 gegen die Flucht der anderen beiden Stützen um u gesenkt, so gilt für die Reaktionen $[R_1]$, $[R_2]$, $[R_3]$

1. $R_1 + R_2 + R_3 = 2Q$
2. $R_1 = R_3$.

Fig. 743.



Die dritte Gleichung, welche zu deren Bestimmung nötig ist, setzt wieder die Elasticitätslehre voraus.

Denkt man sich die Hälfte des Trägers unter Beseitigung der Stütze A_1 oder A_3 als einen Freiträger, der bei A_2 wagerecht eingespannt ist, so hat man für dessen Durchbiegung am freien Ende, welche u beträgt, gemäß S. 945

$$\frac{1}{3}\,\frac{R_3 l^3}{E\mathfrak{T}r} - \frac{1}{8}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}.$$

Demnach ist

$$R_3 = \frac{3\,Ql^3 + 24\,u\,.\,E\mathfrak{T}r}{8\,l^3} = R_1.$$

Daraus folgt

$$R_2 = 2\,Q - R_1 - R_3 = \frac{5\,Ql^3 - 24\,u\,.\,E\mathfrak{T}r}{4\,l^3}.$$

Für $u = \frac{5}{24}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ ist $R_2 = 0$, d. h. R_2 ist nur vorhanden für $u = 0 \ldots \frac{5}{24}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$.

Die Senkung der Mittelstütze u muß also in den Grenzen $0 \ldots \frac{5}{24}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ liegen, wenn diese Stütze überhaupt einen Einfluß haben soll. Für $u > \frac{5}{24}\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ geht der Dreistützenträger über in einen bei A_1 und A_3 aufgelagerten Balken.

Für $OS = x$ hat man für den Schnitt MN bei Benutzung des rechten Balkenstückes

$$Mo = -(l-z)R_3 + \tfrac{1}{2}\gamma(l-z)^2$$
$$= \tfrac{1}{8}\gamma(l^2 - 5lz + 4z^3) - \frac{3u \cdot E\mathfrak{T}r(l-z)}{l^3}.$$

Für $z = 0$ erhält man das Moment für die Mitte

$$Mo_O = -lR_3 + \tfrac{1}{2}\gamma l^2 = \tfrac{1}{8}Ql - 3u \cdot \frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}.$$

Dieses Moment kann positiv oder negativ sein, es hat für

$$u = \tfrac{1}{24}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$$

den Wert Null.

Um innerhalb der Strecke OA_3 das Maximum des Momentes zu bestimmen, betrachten wir dessen Ableitung $+R_3 - \gamma(l-z)$, aus deren Annullierung $z = l - \frac{R_3}{\gamma}$ folgt. Für diesen Wert von z ergiebt sich

$$Mo_{max} = -\tfrac{1}{2}\frac{R_3^2}{\gamma}.$$

Für $u < \frac{1}{24}\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ ist Mo_O positiv. Soll in diesem Falle der Zahlenwert von Mo_{max} mit Mo_O übereinstimmen, so muß

$$\tfrac{1}{2}\frac{R_3^2}{\gamma} = -lR_3 + \tfrac{1}{2}Ql$$

sein, woraus

$$R_3^2 + 2R_3Q - Q^2 = 0$$

folgt.

Bestimmt man hier R_3, so ist

$$R_3 = Q(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Da das Minuszeichen keinen Sinn hat, so ist

$$R_3 = Q(\sqrt{2} - 1) = 0{,}4142\,Q,$$

woraus $u = 0{,}013\,07\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ folgt.

Für diese Senkung (u) ist also Mo_O positiv und stimmt überein in seinem Zahlenwerte mit Mo_{max}, welcher $0{,}0858\,Ql$ beträgt.

Man bezeichnet diese Anordnung als die günstigste Stützensenkung, weil ihr das Maximum der Tragfähigkeit (Q) entspricht.

Für $u > 0{,}013\,07\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ wird das (positive) Moment Mo_O größer, für $u < 0{,}013\,07\,\frac{Ql^3}{E\mathfrak{T}r}$ wird das (negative) Moment Mo_{max} seinem Zahlenwert nach größer als der gemeinsame Wert $0{,}0858\,Ql$.

Für die günstigste Stützensenkung lautet die Festigkeitsgleichung

$$0{,}0858\,Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 385)$$

Liegen die drei Stützen in einer Flucht oder verwendet man zwei Balken, die über der Mittelstütze zusammenstoßen, so lautet die Festigkeitsgleichung

$$\tfrac{1}{8} Ql = 0{,}125\, Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}.$$

Im ersten Falle ist $Q = \frac{1}{0{,}0858} \cdot k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \cdot \frac{1}{l}$ gemäß Gleichung Nr. 385), im zweiten Falle $\frac{1}{0{,}125} \cdot k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \cdot \frac{1}{l}$, d. h. die beiden Werte verhalten sich wie 125 : 86 oder rund wie $1\frac{1}{2} : 1$.

Der Balken mit gesenkter Mittelstütze hat also im Falle der günstigsten Stützensenkung die einundeinhalbfache Tragkraft des Balkens für gleiche Stützenflucht.

Für den Fall der günstigsten Stützensenkung liegen die Maxima von Mo in der Mitte und symmetrisch zu dieser im Abstande $0{,}558\, l$ von ihr.

Hier wird $Mo = 0$ für $z = 0{,}1716\, l$.

Wir bestimmen nun die Biegungslinie gemäß dem Kreuze der Fig. 743. Aus

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f''(z) = -R_3(l - z) + \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - 2lz + z^2)$$

folgt

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f'(z) = -R_3(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 z - lz^2 + \tfrac{1}{3}z^3) + C,$$

wobei $C = 0$ ist, weil $f'(z) = 0$ ist für $z = 0$ in O.

Des weiteren ist

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f(z) = -R_3(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + \tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}l^2z^2 - \tfrac{1}{3}lz^3 + \tfrac{1}{12}z^4) + C'.$$

Da $y = f(z) = u$ ist für $z = 0$ in O, so ist

$$E\mathfrak{T}r \,.\, u = C',$$

d. h. man hat

$$E\mathfrak{T}r \,.\, f(z) = -R_3(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3) + \tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}l^2z^2 - \tfrac{1}{3}lz^3 + \tfrac{1}{12}z^4) + E\mathfrak{T}r \,.\, u.$$

Beachtet man noch, daß $y = f(z) = 0$ ist für $z = l$ in A_3, so erhält man noch eine Gleichung, welche wieder R_3 bestimmt.

Um das Maximum von y zu bestimmen, setzen wir $f'(z) = 0$, woraus neben $z = 0$ folgt

$$-R_3(l - \tfrac{1}{2}z) + \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - lz + \tfrac{1}{3}z^2) = 0.$$

Dem Falle der günstigsten Stützensenkung, in dem $R_3 = 0{,}4142\, Q$ ist, entspricht $\left(l = \frac{Q}{\gamma}\right)$

$$z^2 - 1{,}7574\, lz + 0{,}5148\, l^2,$$

woraus folgt $z = 0{,}3714\, l$.

Über die graphostatische Behandlung werden im nächsten Paragraphen die nötigen Bemerkungen folgen.

158. Durchgehende Träger. Nachdem wir im vorigen § 157 den einfachsten Fall der durchgehenden Träger behandelt haben, wenden wir uns nun zu deren allgemeiner Betrachtung.

Nachdem der Träger unter seiner Belastung zum Gleichgewichte gelangt ist, kann man sich ihn wieder in dem gebogenen Zustande über den einzelnen

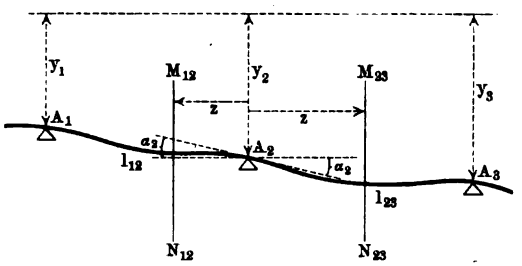
Stützen eingemauert denken, so daß er bei n Öffnungen in n, im allgemeinen schief eingespannte Träger von einfacher Befestigung zerfällt (vergl. S. 1014).

Wir betrachten nun ein Stück eines durchgehenden Trägers, das über drei Stützen geht, die wir durch die Zahlen 1, 2, 3 unterscheiden wollen (vergl. Fig. 744).

Die Momente über den Stützen mögen D_1, D_2, D_3 heißen, während α_2 den Winkel der Tangente in A_2 gegen den Horizont bezeichnen soll.

Für die Tangente dieses Winkels ergeben sich gemäß Nr. 384) leicht zwei Ausdrücke, wobei für das linke Trägerstück die Formel für $tng\,\alpha_2$ und für das rechte Trägerstück die Formel für $tng\,\alpha_1$ zu benutzen ist.

Fig. 744.



Dabei mögen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ die Momente D_1 und D_2 bezeichnen für den Fall, daß der einfache Balken A_1A_2 bei Erhaltung seiner Belastung auf gleich hohen Stützen wagerecht eingespannt ist, während $\mathfrak{D}_2'$ und $\mathfrak{D}_3$ ebenso bezw. die Momente D_2 und D_3 für den einfachen Balken A_2A_3 darstellen sollen.

Die Senkung beträgt dabei $y_2 - y_1$, für A_1A_2 und $y_3 - y_2$ für A_2A_3. Man hat dann, gemäß $tng\,\alpha_2$ auf S. 1016 hier

$$tng\,\alpha_2 = +\frac{l_{12}}{6\,E\mathfrak{T}r}(D_1 + 2\,D_2 - \mathfrak{D}_1 - 2\,\mathfrak{D}_2) + \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}$$

und gemäß $tng\,\alpha_1$ auf S. 1016 hier

$$tng\,\alpha_2 = -\frac{l_{23}}{6\,E\mathfrak{T}r}(2\,D_2 + D_3 - 2\,\mathfrak{D}_2' - \mathfrak{D}_3) + \frac{y_3 - y_2}{l_{23}}.$$

Die beiden Ausdrücke für $tng\,\alpha_2$ ergeben die Gleichung

$$l_{12}(D_1 + 2\,D_2 - \mathfrak{D}_1 - 2\,\mathfrak{D}_2) + 6\,E\mathfrak{T}r \cdot \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}$$
$$+ l_{23}(2\,D_2 + D_3 - 2\,\mathfrak{D}_2' - \mathfrak{D}_3) - 6\,E\mathfrak{T}r \cdot \frac{y_3 - y_2}{l_{23}} = 0,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &l_{12}D_1 + 2\,(l_{12} + l_{23})\,D_2 + l_{23}D_3 \\ &= l_{12}\mathfrak{D}_1 + 2\,l_{12}\mathfrak{D}_2 + 2\,l_{23}\mathfrak{D}_2' + l_{23}\mathfrak{D}_3 - 6\,E\mathfrak{T}r\left(\frac{y_2 - y_1}{l_{12}} - \frac{y_3 - y_2}{l_{23}}\right) \end{aligned}\right\} \quad 386)$$

Durch Gleichung Nr. 386) sind die Momente über drei aufeinander folgenden Stützen durch bekannte Größen ausgedrückt, falls die Belastung der beiden betrachteten Felder und die Höhenunterschiede der Stützen gegeben sind.

Setzt man diese Gleichung der Reihe nach für je drei Stützen des Balkens an, vom linken Ende aus zählend, so erhält man bei n Stützen $n - 2$ Glei-

chungen, zu welchen noch die beiden Bestimmungen über die Befestigung an den Endstützen hinzutreten, so daß für die n Größen D_1, D_2, ... D_n ein Gleichungssystem erster Ordnung vorliegt.

Sind die beiden Enden des Balkens bezw. eins derselben frei aufgelagert, d. h. nicht eingespannt, so ist $D_1 = 0$ und $D_n = 0$ bezw. $D_1 = 0$ oder $D_n = 0$.

Sind die beiden Enden des Balkens bezw. eines derselben eingespannt, so sind die Winkel der Einspannung α_1 und α_n gegeben bezw. einer derselben α_1 oder α_n, so daß dann die Gleichungen für $tng\,\alpha_1$ und $tng\,\alpha_n$ bezw. eine derselben hinzutreten.

Man nennt die abgeleiteten Gleichungen, welche sich als „Gleichungen für drei Momente" charakterisieren, allerdings meist für den Sonderfall einer gleichmäßigen Belastung der einzelnen Felder, die Clapeyronschen Gleichungen, weil von ihm zum erstenmale die Betrachtung der Momente für je drei aufeinander folgende Stützen eingeführt worden ist.

Liegt der Fall der gleichmäßigen Belastung der einzelnen Felder vor, so sind bei einer Belastung γ_{12} für l_{12} und bei einer Belastung γ_{23} für l_{23} die Größen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{D}_3$ folgendermaßen gegeben.

Es ist $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \frac{1}{12}\gamma_{12} l_{12}^2$ und $\mathfrak{D}_2' = \mathfrak{D}_3 = \frac{1}{12}\gamma_{23} l_{23}^2$ gemäß S. 968, d. h. man hat für gleichmäßige Belastung

$$\left.\begin{aligned} & l_{12}D_1 + 2(l_{12} + l_{23})D_2 + l_{23}D_3 \\ &= \tfrac{1}{4}(\gamma_{12} l_{12}^3 + \gamma_{23} l_{23}^3) - 6E\mathfrak{T}r\left(\frac{y_2 - y_1}{l_{12}} - \frac{y_3 - y_2}{l_{23}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 387)$$

Trägt das Stück $A_1 A_2$ eine Einzellast P_{12} im Abstande a_{12} vom linken Ende A_1, so ist $\mathfrak{D}_1 = P_{12}\frac{a_{12}(l_{12} - a_{12})^2}{l_{12}^2}$ und $\mathfrak{D}_2 = P_{12}\frac{(l_{12} - a_{12})a_{12}^2}{l_{12}^2}$ gemäß S. 965, so daß $l_{12}\mathfrak{D}_1 + 2l_{12}\mathfrak{D}_2 = P_{12}\frac{a_{12}(l_{12}^2 - a_{12}^2)}{l_{12}}$ wird; für mehrere Einzellasten tritt die entsprechende Summe ein.

Trägt das Stück $A_2 A_3$ eine Einzellast P_{23} im Abstande a_{23} vom rechten Ende A_3, so ist ebenso $2l_{23}\mathfrak{D}_2' + l_{23}\mathfrak{D}_3 = P_{23}\frac{a_{23}(l_{23}^2 - a_{23}^2)}{l_{23}}$ u. s. w.

Demgemäß gilt für Beanspruchung durch Einzellasten

$$\left.\begin{aligned} & l_{12}D_1 + 2(l_{12} + l_{23})D_2 + l_{23}D_3 \\ &= \Sigma P_{12}\frac{a_{12}(l_{12}^2 - a_{12}^2)}{l_{12}} + \Sigma P_{23}\frac{a_{23}(l_{23}^2 - a_{23}^2)}{l_{23}} \\ &\quad - 6E\mathfrak{T}r\left(\frac{y_2 - y_1}{l_{12}} - \frac{y_3 - y_2}{l_{23}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 388)$$

wobei a_{12} vom linken Ende aus und a_{23} vom rechten Ende aus gerechnet ist.

Mit Hülfe der Momente D_1, D_2, D_3 läßt sich nun auch leicht die Reaktion der Stütze A_2 in Fig. 744 bestimmen, entweder gemäß den Gleichungen auf S. 1015 oder durch die Schnitte $M_{12}N_{12}$ und $M_{23}N_{23}$ der Fig. 744.

Bezeichnet man die Reaktion von A_2, welche von dem Felde $A_1 A_2$ herrührt, durch R_{12}, und die Reaktion von A_2, welche von dem Felde $A_2 A_3$ her-

rührt, durch R_{23}, so ist die gesamte Reaktion von A_2 durch $R_2 = R_{12} + R_{23}$ gegeben. Man hat für den Schnitt $M_{12}N_{12}$

$$Mo = -R_{12} \cdot x + D_2 + B_{12}^{(x)},$$

falls man das Moment der Belastung für die Schnittstelle durch $B_{12}^{(x)}$ bezeichnet.

Für $x = l_{12}$ ist $Mo = D_1$, d. h. man hat

$$R_{12} = \frac{D_2 - D_1 + B_{12}}{l_{12}},$$

falls man das Moment der Belastung von A_1A_2 für A_1 kurz durch B_{12} bezeichnet. Ebenso ist

$$R_{23} = \frac{D_2 - D_3 + B_{23}}{l_{23}}.$$

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= R_{12} + R_{23} \\ &= D_2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}}\right) - D_1 \cdot \frac{1}{l_{12}} - D_3 \cdot \frac{1}{l_{23}} + B_{12} \cdot \frac{1}{l_{12}} + B_{23} \cdot \frac{1}{l_{23}} \end{aligned}\right\} \quad 389)$$

falls man das Moment der Belastung von A_1A_2 für A_1 durch B_{12} und das Moment der Belastung von A_2A_3 für A_3 durch B_{23} bezeichnet.

Für die oben angegebene gleichmäßige Belastung ist z. B.

$$B_{12} \cdot \frac{1}{l_{12}} = \tfrac{1}{2}\gamma_{12}l_{12} \quad \text{und} \quad B_{23} \cdot \frac{1}{l_{23}} = \tfrac{1}{2}\gamma_{23}l_{23},$$

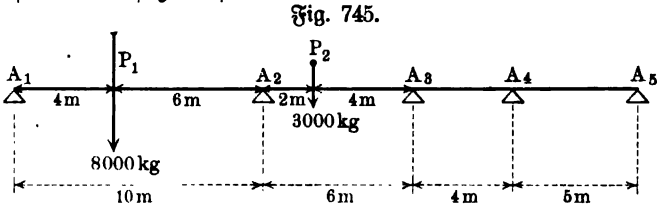
während für die oben bezeichneten Einzellasten

$$B_{12} = \Sigma P_{12}a_{12} \quad \text{und} \quad B_{23} = \Sigma P_{23}a_{23}$$

ist u. s. w.

Dabei treten für die Enden je nach der Art von deren Befestigung wieder besondere Ansätze auf.

Fig. 745.



Als Beispiel diene die Anordnung der Fig. 745, bei welcher alle fünf Stützen gleich hoch liegen und die Trägerenden in A_1 und A_5 frei aufgelagert sind.

Faßt man A_1A_2 als einen wagerecht beiderseits eingespannten Träger auf, so ist in Tonnen (1 t = 1000 kg)

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{8 \cdot 6^2 \cdot 4}{10^2} = 11{,}520\,\text{mt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{8 \cdot 4^2 \cdot 6}{10^2} = 7{,}680\,\text{mt}.$$

Für A_2A_3 ergiebt sich ebenso

$$\mathfrak{D}_2' = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 2}{6^2} = 2{,}667\,\text{mt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_3 = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 4}{6^2} = 1{,}333\,\text{mt}.$$

Die entsprechenden Größen für die Felder A_3A_4 und A_4A_5 haben die Werte Null, weil diese Felder unbelastet sind.

Man hat also, da die Höhenunterschiede der Stützen fortfallen, nach Gleichung Nr. 386) für die Strecke $A_1A_2A_3$

$$10 \cdot D_1 + 32\,D_2 + 6\,D_3 = 10 \cdot 11{,}520 + 20 \cdot 7{,}680 + 12 \cdot 2{,}667 + 6 \cdot 1{,}33,$$

wobei $D_1 = 0$ ist, da A_1 thatsächlich ohne Einspannung ist.

Ebenso gilt für die Strecke $A_1A_3A_4$

$$6\,D_2 + 20 \cdot D_3 + 4\,D_4 = 6 \cdot 2{,}667 + 12 \cdot 1{,}333 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0$$

und für die Strecke $A_3A_4A_5$

$$4\,D_3 + 18\,D_3 + 5\,D_5 = 0,$$

wobei auch $D_5 = 0$ ist wegen der Unterstützung in A_5.

Man hat also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 32\,D_2 + 6\,D_3 &= 308{,}8 \\ 6\,D_2 + 20\,D_3 + 4\,D_4 &= 32 \\ 4\,D_2 + 18\,D_3 &= 0, \end{aligned}$$

woraus neben $D_1 = 0$ und $D_5 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} D_2 &= +\,9{,}918\,\text{mt} \\ D_3 &= -\,1{,}442\,\text{mt} \\ D_4 &= +\,0{,}321\,\text{mt}. \end{aligned}$$

Man erhält ferner unmittelbar durch einen Schnitt durch A_2

$$-R_1 \cdot 10 + 6 \cdot 8 = D_2 = 9{,}918,$$

d. h. $R_1 = +\,3{,}808\,\text{t}$.

Gemäß Gleichung Nr. 389) folgt weiter

$$R_2 = 9{,}918\left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{6}\right) - 0 \cdot \tfrac{1}{10} + 1{,}442 \cdot \tfrac{1}{6} + B_{12} \cdot \tfrac{1}{10} + B_{21} \cdot \tfrac{1}{6},$$

wobei $B_{12} = 4 \cdot 8 = 32$ und $B_{23} = 4 \cdot 3 = 12$ ist, so daß man erhält

$$R_2 = 8{,}085\,\text{t}.$$

Ebenso ist $R_3 = -\,1{,}331\,\text{t}$, $R_4 = +\,0{,}502\,\text{t}$ zu berechnen, während sich $R_5 = -\,0{,}064$ wieder unmittelbar durch einen Schnitt ergiebt.

Man hat zur Kontrolle $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 11\,\text{t}$.

Demnach sind die Stützen der Fig. 745 für A_1, A_2 und A_4 richtig, während sie für A_3 und A_5 umgekehrt werden müssen.

Die Berechnung der Winkel für die schiefen Einspannungen an den Stützen ergiebt sich ohne weiteres gemäß S. 1016 als

$$6\,E\mathfrak{T}r \cdot tng\,\alpha_1 = -\,10\,(2 \cdot 0 + 9{,}918 - 2 \cdot 11{,}520 - 7{,}680) = +\,208{,}2.$$

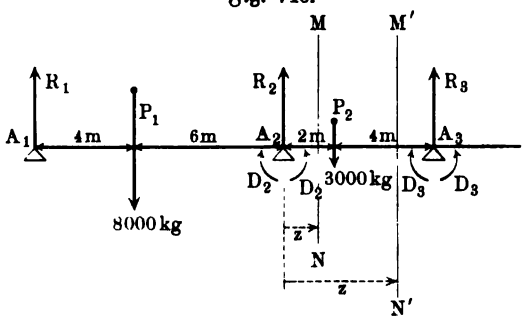
Ebenso folgt

$$\begin{aligned} 6\,E\mathfrak{T}r\,tng\,\alpha_2 &= -\,70{,}36 \\ 6\,E\mathfrak{T}r\,tng\,\alpha_3 &= +\,10{,}21 \\ 6\,E\mathfrak{T}r\,tng\,\alpha_4 &= -\,3{,}21 \\ 6\,E\mathfrak{T}r\,tng\,\alpha_5 &= +\,1{,}61, \end{aligned}$$

wobei $tng\,\alpha_2$, $tng\,\alpha_3$ und $tng\,\alpha_4$ zur Kontrolle sowohl nach der Formel für $tng\,\alpha_1$ wie auch nach der Formel für $tng\,\alpha_2$ berechnet werden können.

Um die Maxima für den Zahlenwert des Momentes zu bestimmen, hat man die ersten Felder der Reihe nach durch Schnitte zu untersuchen.

Fig. 746.



Dabei kann man entweder den ganzen Träger, etwa stets unter Verwendung des linken Stückes, betrachten, wobei nur Reaktionen der Stützen und die Belastung eine Rolle spielen, da die Momente über den Stützen immer links und rechts im Gleichgewichte stehen, oder man kann jedes Feld für sich betrachten, wobei die Momente über den Stützen zu berücksichtigen sind und auch eine Verteilung der Reaktionen nach den Feldern vorzunehmen ist.

Wir führen dies für das zweite Feld durch.

Bei Betrachtung des ganzen Trägers ist für den Schnitt MN

$$\begin{aligned} Mo &= -R_1(10 + z) + 8(6 + z) - R_2 z \\ &= -R_1 . 10 + 8 . 6 + z(8 - R_1 - R_2) = +9{,}92 - 3{,}893 . z. \end{aligned}$$

Will man das Feld A_2A_3 für sich betrachten, so ist erst $[R_2]$ auf die Felder A_1A_2 und A_2A_3 zu verteilen, wobei $R_2 = R_2' + R_2''$ sein mag; es ist dann $R_1 + R_2' = 8$, so daß $R_2' = 4{,}192$ und $R_2'' = 3{,}893$ ist. Jetzt ist für denselben Schnitt MN

$$Mo = D_2 - R_2'' . z = 9{,}918 - 3{,}893 . z.$$

Für den Schnitt $M'N'$ desselben Feldes ergiebt sich ebenso

$$Mo = (9{,}918 - 3{,}893\,z) + (z - 2)\,3 = 3{,}918 - 0{,}893\,z.$$

$[Mo]$ hat im Felde A_2A_3 zunächst den Wert $D_2 = +9{,}918$, von dem aus es allmählich in $+2{,}132$ für die Belastungsstelle ($z = 2$) übergeht, um von da durch den Wendepunkt $\left(z = \frac{3{,}918}{0{,}893} \sim 4{,}3\right)$ in $D_3 = -1{,}44$ überzugehen.

Für unbelastete Felder des Balkens muß die Verteilung der Reaktionen gemäß S. 1024 erfolgen.

Man erhält so für den Verlauf des Momentes die Tabelle

A_1	P_1	A_2	P_2	A_3	A_4	A_5
0	$-15{,}232$	$+9{,}920$	$+2{,}132$	$-1{,}442$	$+0{,}321$	0

Wendepunkte ($Mo = 0$) sind auf A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_4 vorhanden.

Die Maximalwerte des Momentes, welche auch der Verlauf der Vertikalkraft anzeigt, haben ihren Größtwert im ersten Felde.

Das Ergebnis wird durch die folgende Fig. 747 dargestellt.

Für gleichmäßige Felderverteilung (l) und gleiche Höhe der Stützen geht Gleichung Nr. 387) bei gleichmäßiger Belastung über in

$$D_1 + 4D_2 + D_3 = \tfrac{1}{2} l^2 \gamma.$$

Man hat also hier z. B. für fünf Stützen bei freier Auflagerung der Enden ($D_1 = 0$ und $D_5 = 0$) das System

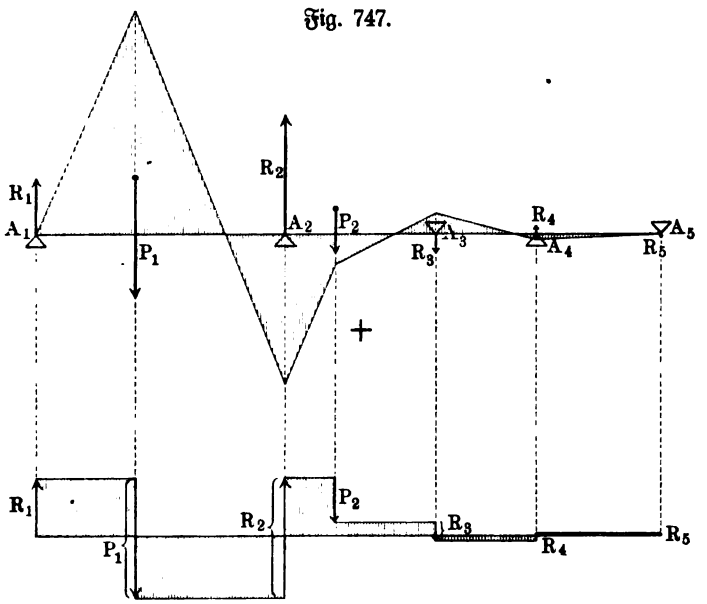
$$\left\{\begin{array}{l} 0 + 4D_2 + D_3 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ D_2 + 4D_3 + D_4 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ D_3 + 4D_4 + 0 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma \end{array}\right\}$$

Da $D_2 = D_4$ ist wegen der Symmetrie, so ist die letzte Gleichung mit der ersten identisch, während die zweite in $2D_2 + 4D_3 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma$ übergeht, d. h. es ist

$$\left\{\begin{array}{l} 4D_2 + D_3 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ 2D_2 + 4D_3 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma \end{array}\right\},$$

woraus $D_2 = D_4 = 0{,}1071\, l^2\gamma$ und $D_3 = 0{,}0714\, l^2\gamma$ folgt.

Fig. 747.



Man hat für die Lösung dieser Gleichungssysteme, und zwar auch in dem allgemeinen Fall, der Gleichung Nr. 387) entspricht, besondere Hülfsmittel, sogen. adjugierte Systeme eingeführt, durch welche jede der Unbekannten D_1, D_2 ... rasch bestimmt werden kann.

Für den vorliegenden einfachen Fall wird das adjugierte System durch die sogen. Clapeyronschen Zahlen gebildet, welche $e_1 = -1$, $e_2 = +4$, $e_3 = -15$, $e_4 = +56$, $e_5 = -209$, $e_6 = +780$, $e_7 = -2911$, $e_8 = +10\,864$, $e_9 = -40\,545$, $e_{10} = +157\,316$ u. s. w. lauten.

Addiert man die Gleichungen für D_1, D_2, ..., nachdem man deren letzte mit der ersten Clapeyronschen Zahl e_1, deren vorletzte mit der zweiten

dieser Zahlen (e_2) u. s. w. multipliziert hat, so ergiebt sich sofort eine Gleichung für D_2, falls $D_1 = 0$ ist, und damit auch die Bestimmung von D_3 aus der ersten Gleichung, die von D_4 aus der zweiten Gleichung u. s. w.

Für den oben angegebenen Fall der fünf Stützen ist zu bilden

$$-15(0 + 4D_2 + D_3) + 4(D_2 + 4D_3 + D_4) - (D_3 + 4D_4 + 0) = \tfrac{1}{2} l^2\gamma(-15 + 4 - 1) = -6l^2\gamma,$$

d. h.

$$-56 D_2 = -6l^2\gamma \quad \text{oder} \quad D_2 = \tfrac{3}{28} l^2\gamma = 0{,}1071\, l^2\gamma.$$

Nun folgt aus der ersten Gleichung $D_3 = \frac{1}{2} l^2\gamma - 4D_2 = 0{,}0714\, l^2\gamma$ u. s. w.

Außerdem sind für diese Träger besondere Tabellen[1]) berechnet worden, aus denen man die Momente über den Stützen, die Reaktionen u. s. w. entnehmen kann.

Gelegentlich kann man auch mit Vorteil zunächst die Reaktionen an den Stützen bestimmen, indem man sich diese erst entfernt denkt und dann die Durchbiegung für die Stellen bestimmt, an welchen Stützen vorhanden waren u. s. w. Bei dem im § 157 behandelten Dreistützenträger ist z. B. die Durchbiegung für die Mitte als $\frac{5}{384}\frac{\gamma(2l)^4}{E\mathfrak{T}r}$ gegeben, während eine Kraft $[R]$ in der Mitte die Durchbiegung $\frac{R(2l)^3}{48 E\mathfrak{T}r}$ hervorriefe; für die thatsächlich bei Einstellung der Stütze vorhandene Durchbiegung u ist also

$$\frac{R(2l)^3}{48 E\mathfrak{T}r} = \tfrac{5}{384}\frac{\gamma(2l)^4}{E\mathfrak{T}r} - u,$$

d. h.

$$R = \frac{5Ql^3 - 24 u E\mathfrak{T}r}{4l^3}$$

für $Q = l\gamma$, und es ist im besondern $R = \frac{5}{4} Q$ für $u = 0$.

Wir kommen darauf im § 165 zurück.

Die graphostatische Behandlung der durchgehenden Träger ist im wesentlichen durch die Betrachtung auf S. 994 u. f. mit gegeben, falls man noch den bekannten Satz der Planimetrie heranzieht: Bewegen sich die Ecken eines beweglichen Dreiecks auf drei festen Parallelen und gehen dabei zwei Seiten des Dreiecks je durch einen festen Punkt, so geht auch die dritte Seite des Dreiecks durch einen festen Punkt, welcher mit jenen beiden in einer Geraden liegt.

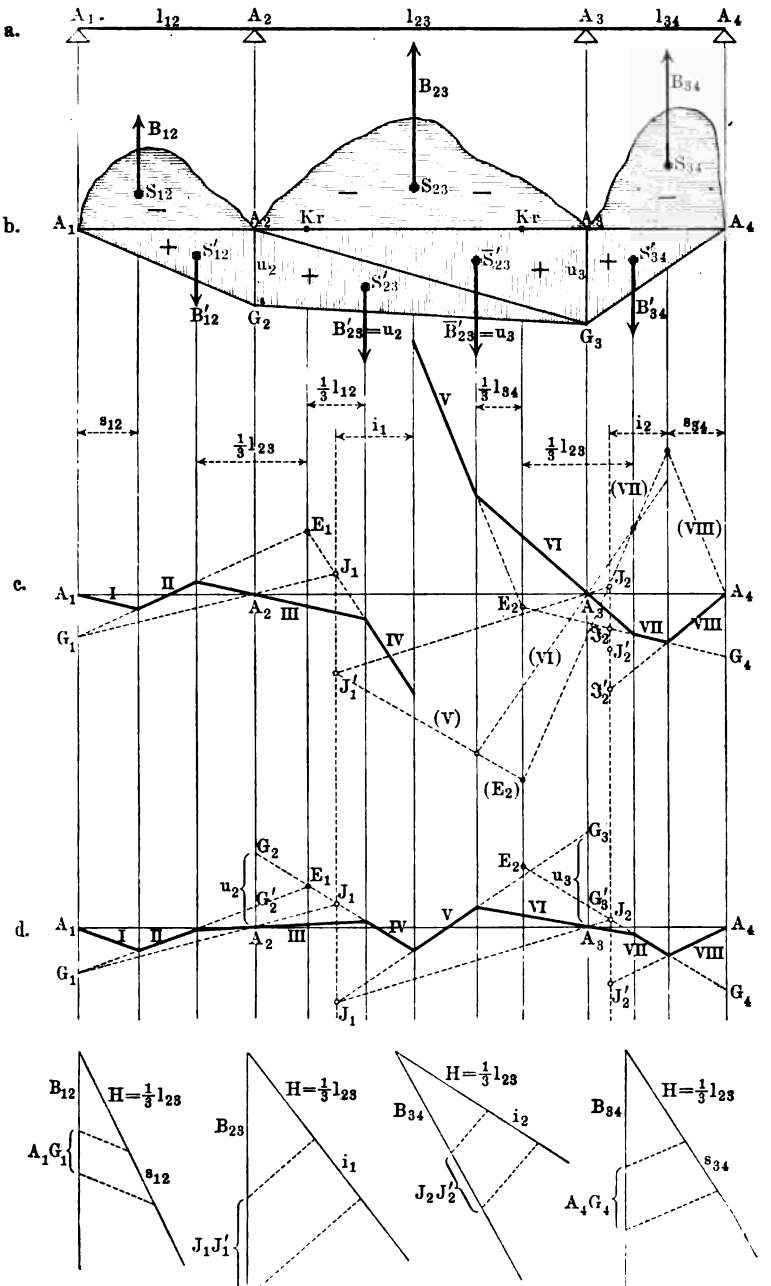
Als Beispiel behandeln wir den Vierstützenträger, den Fig. 748 darstellt, bei beliebiger Belastung.

Denkt man die drei Felder durch drei Balken, die frei auf je zwei Stützen liegen, gebildet, so lassen sich die Momente der gegebenen Belastung für diese Zweistützenträger stets feststellen. Faßt man diese drei Momente als Belastungen auf, so ist in Fig. 748 für S_{12}, S_{23} und S_{34} als Belastung bezw. gegeben $[B_{12}]$, $[B_{23}]$, $[B_{34}]$.

Wegen der Kontinuität der Träger kommen die vier Einspannungsmomente hinzu, welche als Belastungen aufgefaßt, durch $[B'_{12}]$, $[B'_{23}]$, $[\overline{B}'_{23}]$, $[B'_{34}]$, wirksam in S'_{12}, S'_{23}, $\overline{S}'_{23}$, S'_{34} dargestellt werden mögen.

[1]) Vergl. z. B. „Des Ingenieurs Taschenbuch", 1899, S. 382.

Fig. 748.


a.
b.
c.
d.
A_1
l_{12}
A_2
l_{23}
A_3
l_{34}
A_4
B_{12}
B_{23}
B_{34}
S_{12}
S_{23}
S_{34}
Kr
S'_{12}
S'_{23}
S'_{34}
u_2
u_3
B'_{12}
G_2
$B'_{23}=u_2$
$\overline{B}'_{23}=u_3$
G_3
B'_{34}
$\frac{1}{3}l_{12}$
$\frac{1}{3}l_{34}$
s_{12}
i_1
i_2
s_{34}
$\frac{1}{3}l_{23}$
E_1
J_1
E_2
J_2
G_1
G_4
J'_1
J'_2
(E_2)
(V)
(VI)
(VII)
(VIII)
G'_2
G'_3
$H=\frac{1}{3}l_{23}$
A_1G_1
$J_1J'_1$
$J_2J'_2$
A_4G_4

Das Seileck, welches diesen sieben Belastungen entspricht und außerdem der Befestigungsart des Trägers angepaßt ist, läßt sich wieder zeichnen, obwohl für die Einspannungsmomente als Belastungen nur die Schwerpunkte und nicht deren Werte gegeben sind; es ist durch den Streckenzug *I II ... VIII* in Fig. 748 d (a. v. S.) dargestellt; seine Entstehung zeigt Fig. 748 c.

Der Schnittpunkt E_1 von *II* und *IV* liegt auf der Resultante von $[B'_{12}]$ und $[B'_{23}]$, welche sich verhalten wie $l_{12} : l_{23}$, d. h. die Vertikale von E_1 teilt den Parallelstreifen zwischen S'_{12} und S'_{23} im Verhältnisse $l_{23} : l_{12}$.

Entsprechendes gilt für den Schnittpunkt E_2 von *V* und *VII* und dessen Vertikale.

Da die Vertikalen von S'_{12} und S'_{23} den Abstand $\frac{1}{3}(l_{12} + l_{23})$ haben, so liefert dessen Teilung im Verhältnisse $l_{23} : l_{13}$ die Teilstrecken $\frac{1}{3} l_{23}$ und $\frac{1}{3} l_{13}$ als Abstände der Vertikalen durch E_1 von den Vertikalen durch S'_{12} und S'_{23}. Entsprechendes gilt für E_2.

Die beiden Vertikalen durch E_1 und E_2, welche „verschränkte Drittellinien" heißen, sind demnach gegeben.

Der Schnitt von *II* mit der Vertikalen von A_1 bestimmt den Punkt G_1, so daß $H \,.\, \overline{A_1 G_1}$ das bekannte Moment von $[B_{12}]$ für A_1 ist; ebenso bestimmt der Schnitt von *VII* mit der Vertikalen von A_4 den Punkt G_4, so daß $H \,.\, A_4 G_4$ das bekannte Moment von $[B_{34}]$ für A_4 ist.

Zieht man *I* beliebig durch A_1, so ist *II* durch $A_1 G_1$ bestimmt, also auch *III* durch A_2 und *IV* durch E_1.

Zieht man ebenso *VIII* beliebig durch A_4, so ist *VII* durch $A_4 G_4$ bestimmt, also auch *VI* durch A_3 und *V* durch E_2.

Die beiden so gezeichneten Seilecke treffen im allgemeinen nicht auf der Vertikalen von $[B_{23}]$ zusammen, so daß sie nicht zusammen das gesuchte Seileck darstellen. Vgl. hierzu Fig. 748 c.

Versucht man durch Änderung der Lage von *I* das richtige Seileck durch Probieren zu finden, d. h. das Seileck *I, II, III, IV*, welches an das Seileck *V, VI, VII* und *VIII* Anschluß hat, so bemerkt man, daß die Seiten *IV* verschiedener Seilecke sich in einem Punkte J_1 schneiden. Entsprechendes tritt ein für *V*, wenn man durch Änderung der Lage von *VIII* den Anschluß zu erreichen sucht. Daß die Seiten *IV* verschiedener Seilecke durch einen Punkt J_1 gehen, erklärt sich leicht durch Betrachtung des Dreiecks, welches aus *II, III, IV* gebildet wird; seine Ecken liegen bei jedem Seileck auf denselben Parallelen, während *II* stets durch G_1 und *III* stets durch A_2 geht, so daß also auch *IV* stets durch einen festen Punkt J_1 gehen muß, der mit G_1 und A_2 in einer Geraden liegt.

Man findet J_1 als Schnittpunkt von $G_1 A_2$ mit der Seite *IV* irgend eines der Seilecke, die von A_1 ausgehen.

Kämen *IV* und *V* in Fig. 748 c auf der Vertikalen von $[B_{23}]$ zum Anschlusse, so würde eine Verlängerung von *V* bis zum Schnitte J'_1 mit der Vertikalen von J_1 eine Strecke $J_1 J'_1$ liefern, und es wäre dann $H \,.\, J_1 J'_1$ das bekannte Moment von $[B_{23}]$ für irgend einen Punkt der Vertikalen von J_1. Demnach ist J'_1 durch $J_1 J'_1$ zu gewinnen und zwar ist nun J'_1 ein fester Punkt für eine Seite *V*, die mit *IV* wirklich zum Anschlusse kommt.

Für richtig gezeichnete Seiten *V*, *VI* und *VII* gilt nun Folgendes: da die Ecken des Dreiecks, das aus *V*, *VI* und *VII* gebildet wird, für jedes Seileck auf denselben Parallelen liegen, während *V* stets durch J_1' und *VI* stets durch A_3 geht, so geht auch *VII* durch einen festen Punkt J_2, der mit J_1' und A_3 auf einer Geraden liegt.

Man findet J_2 durch irgend ein in J_1' entspringendes Seileck (*V*), (*VI*), (*VII*), (*VIII*) und zwar als Schnitt von $J_1'A_3$ mit (*VII*), wie es Fig. 748 c zeigt.

Verlängerte man *VIII* bei richtiger Zeichnung bis zum Schnitte J_2' mit der Vertikalen von J_2, so wäre $H \,.\, \overline{J_2J_2'}$ das bekannte Moment von $[B_{34}]$ für Punkte der Vertikalen durch J_2, d. h. Punkt J_2', der durch J_2 und J_2J_2' gegeben ist, ist ein fester Punkt für *VIII*.

Demnach kann das richtige Seileck von A_4 aus konstruiert werden, indem man *VIII* durch J_2' legt und dann *VII* von G_4 aus durch J_2 zieht, wodurch *VI* mit Hülfe von A_3 und dann *V* mit Hülfe von E_2 oder J_1' gegeben ist u. s. f.

Hätte man versucht, das Seileck von A_4 aus zu zeichnen, anstatt von A_1 aus, so hätte man ebenso links von A_3 und von A_2 Punkte gefunden, welche J_1 und J_1', sowie J_2 und J_2' entsprechen, und hätte dann von A_1 aus das richtige Seileck zeichnen können.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Vertikalen aller dieser Punkte *J*, welche **Inflexionsachsen** genannt werden, nur von der **Einteilung der Felder** und nicht von der Art der Belastung abhängen.

Das Dreieck aus *II*, *III*, *IV*, durch welches J_1 bestimmt wird, gleitet mit seinen Ecken auf den Vertikalen durch S_{12}', E_1 und S_{23}', deren Lage von der Belastung unabhängig ist. Von den drei Punkten G_1, A_2 und J_1 ist A_2 fest, während sich G_1 bei Änderung der Belastung auf der Vertikalen durch A_1 bewegt, so daß sich dabei J_1 nach einem bekannten planimetrischen Satze gleichfalls auf einer festen Vertikalen bewegen muß u. s. w.

Die Momente über den Stützen A_2 und A_3, durch welche die gesamte Momentenfläche endgültig bestimmt ist, sind gegeben durch den Abschnitt A_2G_2, welchen *IV* und *III*, und A_3G_3, welchen *V* und *VI* bestimmt, ebenso durch den Abschnitt A_2G_2', welchen *II* und *III*, und A_3G_3', welchen *VII* und *VI* bestimmt.

Das Moment von B_{23}' für Punkte der Vertikalen durch A_2 ist durch $(\frac{1}{2}u_2 \,.\, l_{23}) \,.\, \frac{1}{3}l_{23}$ und durch $H \,.\, \overline{A_2G_2}$, das Moment von $\overline{B}_{23}'$ für Punkte der Vertikalen durch A_3 ist durch $(\frac{1}{2}u_3 \,.\, l_{23}) \,.\, \frac{1}{3}l_{23}$ und durch $H \,.\, \overline{A_3G_3}$ darstellbar, so daß für $\frac{1}{2}l_{23}$ als Basis für die Darstellung der ursprünglichen Momente als Belastungen und für $H = \frac{1}{3}l_{23}$ wiederum $A_2G_2 = u_2$ und $A_3G_3 = u_3$ ist.

Das Moment von B_{12}' für Punkte der Vertikalen durch A_2 ist durch $(\frac{1}{2}u_2 \,.\, l_{12})\frac{1}{3}l_{12}$ und durch $H \,.\, \overline{A_2G_2'}$ darstellbar, so daß für $\frac{1}{2}l_{12}$ als Basis für die Darstellung der ursprünglichen Momente als Belastungen und für $H = \frac{1}{3}l_{12}$ auch $A_2G_2' = u_2$ würde.

Das Moment von B_{34}' für Punkte der Vertikalen durch A_3 ist durch $(\frac{1}{2}u_3 \,.\, l_{34})\frac{1}{3}l_{34}$ und durch $H \,.\, \overline{A_3G_3'}$ darstellbar, so daß für $\frac{1}{2}l_{34}$ als Basis für die Darstellung der ursprünglichen Momente als Belastungen und für $H = \frac{1}{3}l_{34}$ auch $A_3G_3' = u_3$ würde.

Wählt man, was hier am zweckmäßigsten ist, die halbe Länge des mittleren Feldes als Basis ($\frac{1}{2} l_{23}$) für die Darstellung der ursprünglichen Momente als Belastungen, so ist $B'_{23} = \frac{1}{2} l_{23} \cdot u_2$ durch u_2 und $B'_{23} = \frac{1}{2} l_{23} \cdot u_3$ durch u_3 darzustellen, während $B'_{12} = \frac{1}{2} l_{12} \cdot u_2 = \frac{1}{2} l_{23} \cdot \frac{l_{12}}{l_{23}} \cdot u_2$ durch $\frac{l_{12}}{l_{23}} \cdot u_2$ und $B'_{34} = \frac{1}{2} l_{34} \cdot u_3 = \frac{1}{2} l_{23} \cdot \frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot u_3$ durch $\frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot u_3$ darzustellen ist.

Für $\frac{1}{2} l_{23}$ als Basis ist auch $B_{23} = \frac{1}{2} l_{23} \cdot b_{23}$ durch b_{23} darzustellen, während

$$B_{12} = \tfrac{1}{2} l_{12} \cdot b_{12} = \tfrac{1}{2} l_{23} \cdot \frac{l_{12}}{l_{23}} \cdot b_{12} \text{ durch } \frac{l_{12}}{l_{23}} \cdot b_{12}$$

und

$$B_{34} = \tfrac{1}{2} l_{34} \cdot b_{34} = \tfrac{1}{2} l_{23} \cdot \frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot b_{34} \text{ durch } \frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot b_{34}$$

darzustellen ist.

Man nennt das Feld, dessen Länge für die Herstellung der Basis benutzt ist, das „maßgebende" Feld.

Für den Sonderfall gleichmäßiger Belastung sind die Flächen für B_{12}, B_{23}, B_{34} bezw. Parabeln von den Pfeilhöhen h_{12}, h_{23}, h_{34}, so daß dann wegen $B_{12} = \frac{2}{3} l_{12} \cdot h_{12}$ u. s. w. $b_{12} = \frac{4}{3} h_{12}$, $b_{23} = \frac{4}{3} h_{23}$ und $b_{34} = \frac{4}{3} h_{34}$ ist.

Das Moment von B_{12} für die Vertikale durch A_1 ist durch $B_{12} \cdot s_{12} = H \cdot \overline{A_1 G_1}$ gegeben, so daß $A_1 G_1 = \frac{3}{2} \frac{l_{12}}{l_{23}} \cdot \frac{b_{12}}{l_{23}} \cdot s_{12}$ ist, während das Moment von B_{34} für die Vertikale durch A_4 ebenso zu $A_4 G_4 = \frac{3}{2} \frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot \frac{b_{34}}{l_{23}} \cdot s_{34}$ führt für $H = \frac{1}{3} l_{23}$.

Man hat also $A_1 G_1$ oder $A_4 G_4$ für $\frac{1}{2} l_{23}$ als Basis und $H = \frac{1}{3} l_{23}$ durch vierte Proportionalen darzustellen, ebenso $J_1 J'_1$ und $J_2 J'_2$, doch ist letztere Strecke auch als $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}'_2$ durch *VIII* und *VII* in Fig. 748 c gegeben.

Die Punkte J_1 und J'_1, sowie J_2 und J'_2 aus Fig. 748 c sind in die Fig. 748 d übertragen, welche das von A_4 aus gezeichnete richtige Seileck darstellt; in Fig. 748 e sind die entsprechenden Hülfskonstruktionen gegeben, unter der Voraussetzung, daß $[B_{12}]$, $[B_{23}]$ und $[B_{34}]$ in Fig. 748 b bereits für $\frac{1}{2} l_{23}$ als Basis dargestellt sind. Da $H = \frac{1}{3} l_{23}$ ist, so ergeben $A_2 G_2$ und $A_3 G_3$ unmittelbar die Werte von u_2 und u_3, mit denen Fig. 748 b vervollständigt werden kann.

Klappt man den Streckenzug der Einspannungsmomente in Fig. 748 b um $A_1 A_4$, so entsteht im Verein mit den Flächen für B_{12}, B_{23}, B_{34} die gesamte Momentenfläche, aus welcher dann auch die Biegungslinie wieder leicht abgeleitet werden kann.

159. Bewegliche Belastungen. Die Einwirkung einer einzelnen Last, welche sich über einen Zweistützenträger hin bewegt, ist bereits früher (vergl. S. 372) betrachtet worden. Wir untersuchen diese Einwirkung jetzt noch auf einem anderen Wege, um die Betrachtung dabei weiter auszudehnen.

Um das Moment und die Vertikalkraft gemäß Fig. 749 für einen bestimmten Schnitt MN bei beweglichen Belastungen festzustellen, denken wir für eine bestimmte Stellung alle Belastungen, links von MN, zu $[P_1]$ und alle Belastungen, rechts von MN, zu $[P_2]$ vereinigt. Es ist dann zunächst

$$R_1 = \frac{P_1(l-\zeta_1)+P_2\zeta_2}{l} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{P_1\zeta_1+P_2(l-\zeta_2)}{l} \qquad 390)$$

Für die Schnittstelle MN erhält man bei Benutzung des linken Balkenstückes

$$Mo = -R_1 z_1 + P_1(z_1-\zeta_1) = -P_1\zeta_1\cdot\frac{z_2}{l} - P_2\zeta_2\cdot\frac{z_1}{l} \qquad 391)$$

Man sieht, daß sich die Einwirkungen von P_1 und P_2 bei gegebenen Werten von z_1 und z_2 gegenseitig verstärken und daß also Mo um so größer wird, je größer einerseits P_1 und P_2 und anderseits ζ_1 und ζ_2 sind, d. h. je schwerere Lasten von rechts und links möglichst nahe an die Schnittstelle rücken.

Die Vertikalkraft für den Schnitt MN ist, von links aus berechnet

$$V = -R_1 + P_1 = +P_1\frac{\zeta_1}{l} - P_2\frac{\zeta_2}{l} \quad \cdots \quad 392)$$

Man sieht, daß sich die Einwirkungen von P_1 und P_2 gegenseitig vermindern, d. h. V erhält seinen größten positiven Wert, wenn $P_1\zeta_1$ möglichst groß und $P_2\zeta_2$ möglichst klein ist, es erreicht seinen größten negativen Wert,

Fig. 749.

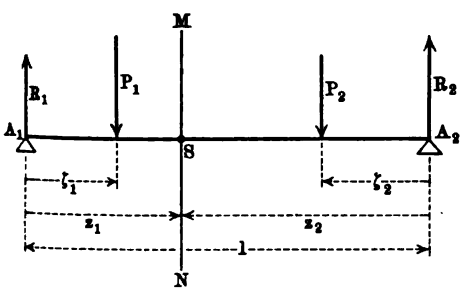
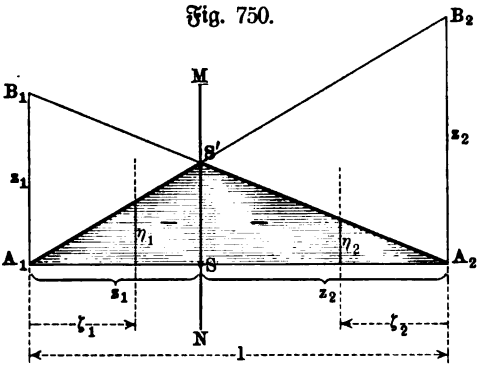


Fig. 750.



wenn $P_1\zeta_1$ möglichst klein und $P_2\zeta_2$ möglichst groß ist, d. h. V ist (abgesehen vom Vorzeichen) um so größer, je schwerere Lasten von der einen Seite aus möglichst nahe an die Schnittstelle rücken, während die andere Seite möglichst entlastet ist.

Vorstehende Ergebnisse stellt man durch Einflußlinien graphisch dar, indem man sich ζ_1 von $0 \ldots z_1$ und ζ_2 von $0 \ldots z_2$ veränderlich denkt und die entsprechenden Werte von $[Mo]$ und von $[V]$ als zugehörige Ordinaten der Balkenachsen aufträgt, und zwar in folgender Weise. Bei $P_1 = 1$ und $P_2 = 0$ ändert sich Mo für $\zeta_1 = 0 \ldots z_1$ linear von 0 bis $-\frac{z_1 z_2}{l}$ und bei $P_1 = 0$ und $P_2 = 1$ ändert sich Mo für $\zeta_2 = 0 \ldots z_2$ linear von 0 bis $-\frac{z_2 z_1}{l}$. Trägt man also, wie Fig. 750 zeigt, $A_1B_1 = z_1$ und $A_2B_2 = z_2$ auf, so ist $S'S = \frac{z_1 z_2}{l}$ und es stellen A_1S' und A_2S' bezw. die Einflußlinie von

$P_1 = 1$ und $P_2 = 1$ für Mo dar, so daß durch sie für die Stellungen ξ_1 und ξ_2 von $[P_1]$ und $[P_2]$ für die Stelle MN gegeben ist $Mo = -\eta_1 P_1 - \eta_2 P_2$. Diese graphische Darstellung zeigt wieder, daß Mo_{max} für $\xi_1 = \varepsilon_1$ und $\xi_2 = \varepsilon_2$ eintritt.

Bei $P_1 = 1$ und $P_2 = 0$ ändert sich V für $\xi_1 = 0 \ldots \varepsilon_1$ linear von 0 bis $\frac{\varepsilon_1}{l}$ und bei $P_1 = 0$ und $P_2 = 1$ ändert sich V für $\xi_1 = 0 \ldots \varepsilon_2$ linear von 0 bis $-\frac{\varepsilon_2}{l}$. Trägt man also, wie Fig. 751 zeigt, $A_1 C_1 = 1$ und $A_2 C_2 = 1$ auf, so ist $SS_1 = +\frac{\varepsilon_1}{l}$ und $SS_2 = -\frac{\varepsilon_2}{l}$ und es stellen $A_1 S_1$ und $A_2 S_2$ bezw. die **Einflußlinie von $P_1 = 1$ und $P_2 = 1$** für V dar, so daß durch sie für die Stellungen ξ_1 und ξ_2 von $[P_1]$ und $[P_2]$ für die Stelle MN gegeben ist

$$V = +\eta_1 P_1 - \eta_2 P_2.$$

Fig. 751.

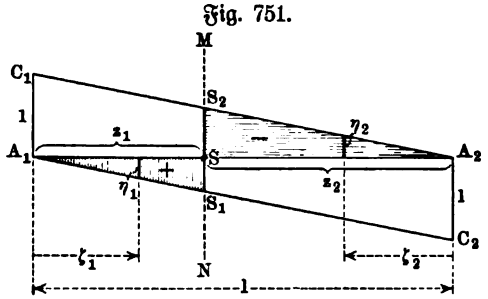
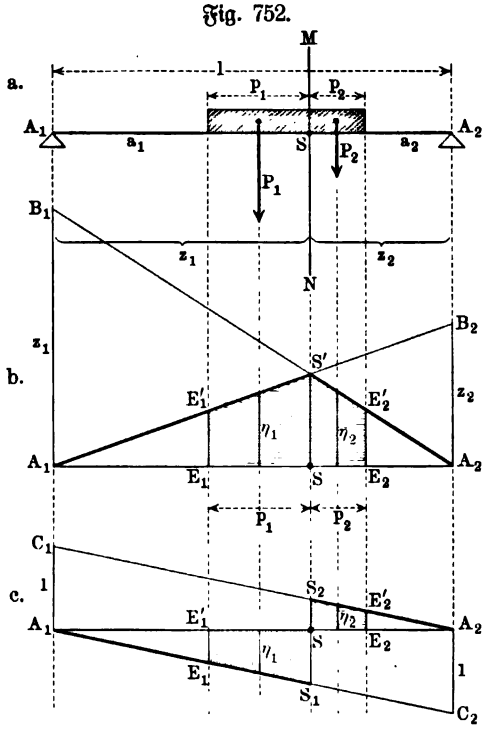


Fig. 752.



Diese graphische Darstellung zeigt wieder, daß der positive Größtwert von V für $\xi_1 = \varepsilon_1$ und $\xi_2 = 0$ oder $P_2 = 0$ eintritt, der negative für $\xi_2 = \varepsilon_2$ und $\xi_1 = 0$ oder $P_1 = 0$.

Die durchgeführten Betrachtungen gelten für $[P_1]$ und $[P_2]$ als Einzellasten und auch für $[P_1]$ und $[P_2]$ als Resultanten beliebiger Belastungen bezw. des linken und rechten Trägerstückes.

Da nämlich in den Ausdrücken für Mo und für V nur die Momente $P_1 \xi_1$ und $P_2 \xi_2$ vorkommen, so ist es gleichgültig, ob diese Ausdrücke für einzelne Lasten oder für deren Resultante gebildet werden, falls nur dabei die Schnittstelle als Trennungsstelle der linken und der rechten Seite festgehalten wird. Besteht also die Belastung des linken Stückes aus den Kräften $P_1', P_1'', \ldots$ mit den Abständen $\xi_1', \xi_1'' \ldots$, so ist $P_1 \xi_1 = P_1' \xi_1' + P_1'' \xi_1'' + \cdots$ und Entsprechendes gilt für die rechte Seite.

Demnach kann man auch

entweder für jedes $[P_1']$, $[P_1'']$ ... und $[P_2']$, $[P_2'']$ ... aus Fig. 750 und Fig. 751 das entsprechende η entnehmen, so daß Ausdrücke wie

$$\eta_1' P_1' + \eta_1'' P_1'' + \cdots \quad \text{und} \quad \eta_2' P_2' + \eta_2'' P_2'' + \cdots$$

das gesamte Moment bezw. die gesamte Vertikalkraft für den betrachteten Schnitt darstellen, oder man kann die Resultanten $[P_1]$ und $[P_2]$ für die beiden Seiten einführen und die eben entwickelten Formeln benutzen.

Demnach läßt sich die Betrachtung auch unter anderem ohne weiteres auf eine gleichmäßige Belastung, wie sie Fig. 752 zeigt, anwenden. Man hat hier

$$\begin{aligned} Mo &= -(\eta_1 P_1 + \eta_2 P_2) \\ &= -\gamma(\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2). \end{aligned}$$

Da aber $\eta_1 p_1$ die Fläche $S' E_1' E_1 S$ und $\eta_2 p_2$ die Fläche $S' E_2' E_2 S$ darstellt, so ist Mo für die Schnittstelle MN stets proportional zu der entsprechenden, in Fig. 752 b schraffierten Fläche.

Ist der ganze Träger belastet, so ist

$$Mo = -\gamma \cdot \triangle A_1 S' A_2 = -\gamma \cdot \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{l}\right) \cdot \frac{l}{2} = -\tfrac{1}{2}\gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

für MN, was mit dem früher gefundenen Werte $-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon(l-\varepsilon)$ für ruhende Belastung übereinstimmt.

Gemäß Fig. 752 c ist ebenso

$$\begin{aligned} V &= +\eta_1 P_1 - \eta_2 P_2 \\ &= \gamma(\eta_1 p_1 - \eta_2 p_2), \end{aligned}$$

d. h. es ist V stets proportional der Differenz der in Fig. 752 c schraffierten Flächen.

Ist der ganze Träger belastet, so ist

$$\begin{aligned} V &= \gamma\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{l} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 \cdot \frac{\varepsilon_2}{l}\right) = \tfrac{1}{2}\gamma \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{l} \\ &= \tfrac{1}{2}\gamma \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{l} = \tfrac{1}{2}\gamma(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \end{aligned}$$

was mit dem früher gefundenen Werte $-\frac{1}{2}\gamma(l-2\varepsilon)$ für ruhende Belastung übereinstimmt.

Um nun die Schnittstellen $(\varepsilon_1 : \varepsilon_2)$ zu bestimmen, in welchen bei beweglichen Lasten die größten Werte von Mo und V liegen, hat man die Veränderung der Einflußlinien zu betrachten, welche einer Änderung von $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ entsprechen.

Für Fig. 750 ist $SS' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{l} = \frac{\varepsilon_1(l-\varepsilon_1)}{l} = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1^2}{l}$, ein Ausdruck, der für $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}l$ sein Maximum erhält, d. h. das Moment ist am größten, wenn sich $[P_1]$ und $[P_2]$ beide in der Mitte des Trägers befinden. Vergl. dazu S. 372.

Können $[P_1]$ und $[P_2]$ nicht beide in die Mitte des Trägers gebracht werden, z. B. weil sie eine feste Entfernung behalten müssen, so tritt das Maximalmoment ein, wenn $[P_1]$ für $P_1 > P_2$ in die Mitte des Trägers tritt.

Ebenso tritt für gleichmäßige Belastung gemäß Fig. 752 das Maximum von *Mo* ein für $e_1 = e_2$ und $p_1 = p_2$; berücksichtigt man noch das Eigengewicht (γ') des prismatischen Trägers, so kommt für die Mitte noch $\frac{1}{8}\gamma' l^2 = \frac{1}{8} Ql$ hinzu.

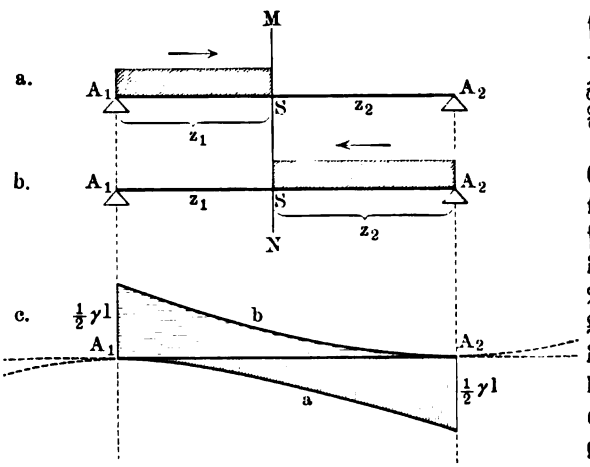
Aus Fig. 751 ist ersichtlich, daß V bei völliger Entlastung der rechten oder linken Seite sein Maximum erhält. Für gleichmäßige Belastung stellen also Fig. 753 a und b die Bedingungen des positiven und des negativen Maximums von V dar. Man hat gemäß Fig. 752 c für Fig. 753 a

$$+ V_{max} = \quad \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, A_1 S \,.\, SS_1 = + \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, e_1 \cdot \frac{e_1}{l} = + \tfrac{1}{2}\gamma \cdot \frac{e_1^2}{l}$$

und für Fig. 753 b

$$- V_{max} = - \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, A_2 S \,.\, SS_2 = - \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, e_2 \cdot \frac{e_2}{l} = - \tfrac{1}{2}\gamma \cdot \frac{e_2^2}{l}.$$

Fig. 753.

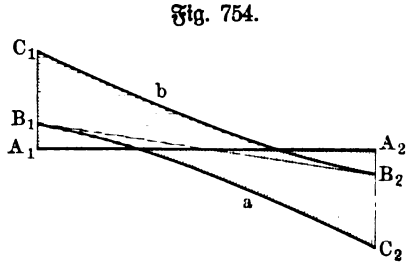


Die graphische Darstellung von $+ V_{max}$ und $- V_{max}$ der Fig. 753 zeigt zwei Parabeln, welche Fig. 753 c darstellt.

Berücksichtigt man das Eigengewicht des prismatischen Trägers $Q = l\gamma'$, so stellt $B_1 B_2$ in Fig. 754 die Vertikalkräfte dar. Diese Gerade liefert im Verein mit den Parabeln der Fig. 753 c die Parabeln $B_1 C_2$ und $B_2 C_1$ als graphische Darstellungen von $+ V_{max}$ und $- V_{max}$ für die beweglichen Belastungen der Fig. 753 unter Berücksichtigung des Eigengewichtes des Trägers bezw. überhaupt einer gleichmäßigen Belastung Q.

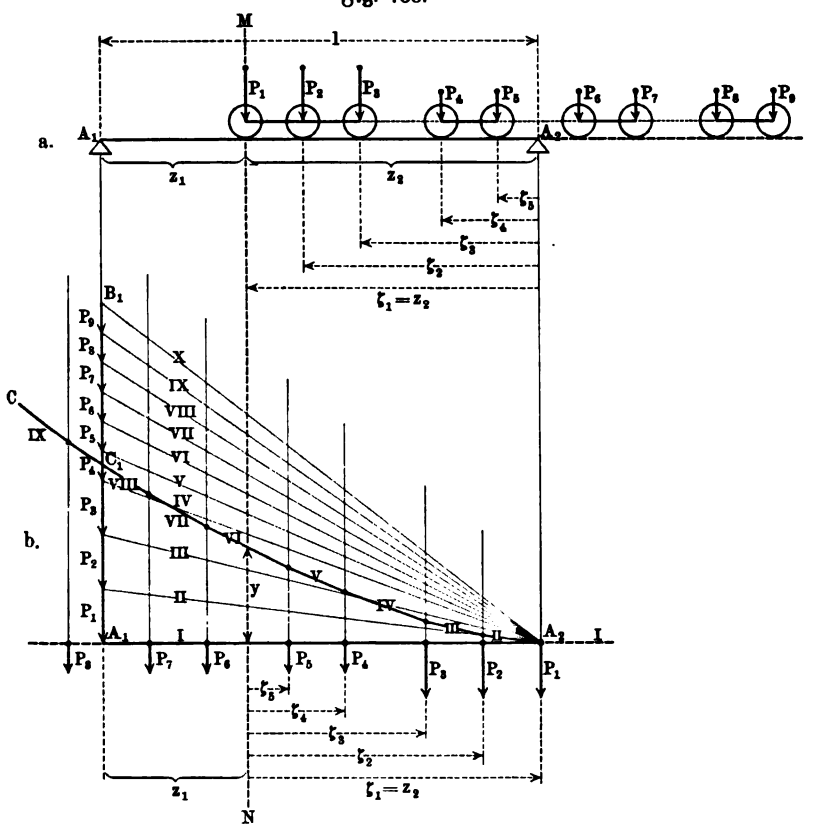
Um vorstehende Betrachtung z. B. auf eine Brücke anzuwenden, welche von Eisenbahnzügen befahren wird, hat man zu beachten, daß die schwersten Lastzugmaschinen die größten Belastungen darstellen. Besteht ein Lastzug schwerster Art aus drei Lokomotiven und einer Anzahl von Wagen, die möglichst stark belastet sind, so wird in einem bestimmten Schnitte eines Trägers (abgesehen von dessen Eigengewicht) die größte Vertikalkraft in dem Augenblicke erzeugt, in welchem die erste Radachse der ersten Lokomotive über den Querschnitt fortgeht.

Fig. 754.



Um das größte Moment für irgend einen Querschnitt zu bestimmen, hat man sich den Zug so geordnet zu denken, daß die schwerste Last seinen Mittelpunkt bildet und daß an diese die übrigen Lasten rechts und links so angereiht werden, daß sie dem Mittelpunkte um so näher liegen, je schwerer sie sind. Das größte Moment tritt für einen bestimmten Querschnitt des Trägers (abgesehen von dessen Eigengewicht) ein, wenn die schwerste Last über ihn fortgeht, falls dabei zugleich ein möglichst großer Teil der Trägerachse belastet ist.

Fig. 755.



In beiden Fällen ist die Korrektur durch das Eigengewicht der Brücke vorzunehmen gemäß der oben gegebenen Betrachtungen.

Um zunächst V_{max} zu bestimmen, denken wir uns einen Zug gemäß Fig. 755 in der Richtung $A_2 A_1$ bis zur Stelle z_1 vorgerückt, wobei V gemäß S. 1033 gegeben ist durch

$$V \cdot l = -P_1\zeta_1 - P_2\zeta_2 - P_3\zeta_3 - P_4\zeta_4 - P_5\zeta_5,$$

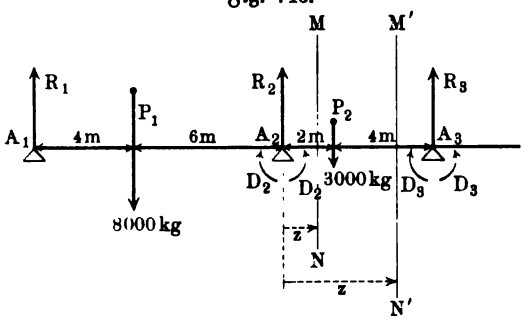
wobei $z_2 = \zeta_1$ ist.

Um $P_1\zeta_1 + P_2\zeta_2 + \cdots$ darzustellen, denken wir den Zug in umgekehrter Anordnung auf $A_2 A_1$ stehend, wie es Fig. 755 b zeigt, und konstruieren

wobei $tng\,\alpha_2$, $tng\,\alpha_3$ und $tng\,\alpha_4$ zur Kontrolle sowohl nach der Formel für $tng\,\alpha_1$ wie auch nach der Formel für $tng\,\alpha_2$ berechnet werden können.

Um die Maxima für den Zahlenwert des Momentes zu bestimmen, hat man die ersten Felder der Reihe nach durch Schnitte zu untersuchen.

Fig. 746.



Dabei kann man entweder den ganzen Träger, etwa stets unter Verwendung des linken Stückes, betrachten, wobei nur Reaktionen der Stützen und die Belastung eine Rolle spielen, da die Momente über den Stützen immer links und rechts im Gleichgewichte stehen, oder man kann jedes Feld für sich betrachten, wobei die Momente über den Stützen zu berücksichtigen sind und auch eine Verteilung der Reaktionen nach den Feldern vorzunehmen ist.

Wir führen dies für das zweite Feld durch.

Bei Betrachtung des ganzen Trägers ist für den Schnitt MN

$$\begin{aligned} Mo &= -R_1(10 + z) + 8(6 + z) - R_2 z \\ &= -R_1 . 10 + 8 . 6 + z(8 - R_1 - R_2) = +9{,}92 - 3{,}893 . z. \end{aligned}$$

Will man das Feld A_2A_3 für sich betrachten, so ist erst $[R_2]$ auf die Felder A_1A_2 und A_2A_3 zu verteilen, wobei $R_2 = R_2' + R_2''$ sein mag; es ist dann $R_1 + R_2' = 8$, so daß $R_2' = 4{,}192$ und $R_2'' = 3{,}893$ ist. Jetzt ist für denselben Schnitt MN

$$Mo = D_2 - R_2'' . z = 9{,}918 - 3{,}893 . z.$$

Für den Schnitt $M'N'$ desselben Feldes ergiebt sich ebenso

$$Mo = (9{,}918 - 3{,}893\,z) + (z - 2)\,3 = 3{,}918 - 0{,}893\,z.$$

$[Mo]$ hat im Felde A_2A_3 zunächst den Wert $D_2 = +9{,}918$, von dem aus es allmählich in $+2{,}132$ für die Belastungsstelle ($z = 2$) übergeht, um von da durch den Wendepunkt $\left(z = \frac{3{,}918}{0{,}893} \sim 4{,}3\right)$ in $D_3 = -1{,}44$ überzugehen.

Für unbelastete Felder des Balkens muß die Verteilung der Reaktionen gemäß S. 1024 erfolgen.

Man erhält so für den Verlauf des Momentes die Tabelle

A_1	P_1	A_2	P_2	A_3	A_4	A_5
0	$-15{,}232$	$+9{,}920$	$+2{,}132$	$-1{,}442$	$+0{,}321$	0

Wendepunkte ($Mo = 0$) sind auf A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_4 vorhanden.

Die Maximalwerte des Momentes, welche auch der Verlauf der Vertikalkraft anzeigt, haben ihren Größtwert im ersten Felde.

Das Ergebnis wird durch die folgende Fig. 747 dargestellt.

Für gleichmäßige Felderverteilung (l) und gleiche Höhe der Stützen geht Gleichung Nr. 387) bei gleichmäßiger Belastung über in

$$D_1 + 4D_2 + D_3 = \tfrac{1}{2} l^2 \gamma.$$

Man hat also hier z. B. für fünf Stützen bei freier Auflagerung der Enden ($D_1 = 0$ und $D_5 = 0$) das System

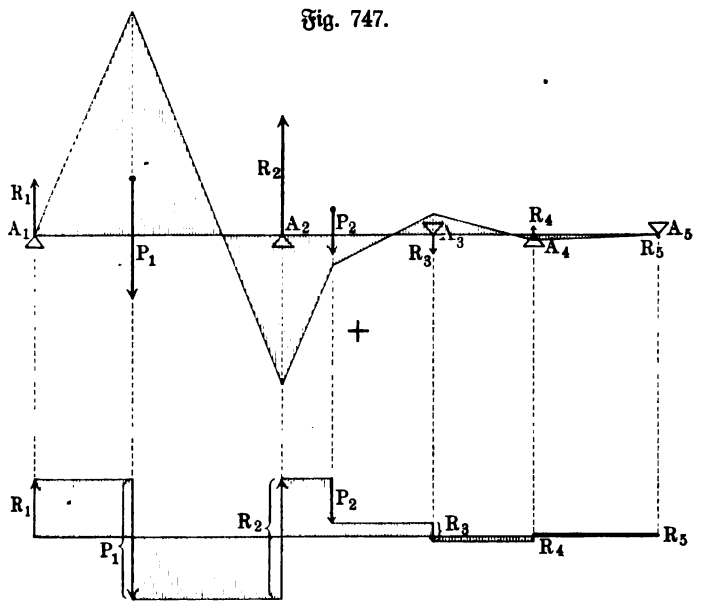
$$\left\{\begin{aligned} 0 + 4D_2 + D_3 &= \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ D_2 + 4D_3 + D_4 &= \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ D_3 + 4D_4 + 0 &= \tfrac{1}{2} l^2\gamma \end{aligned}\right\}$$

Da $D_2 = D_4$ ist wegen der Symmetrie, so ist die letzte Gleichung mit der ersten identisch, während die zweite in $2D_2 + 4D_3 = \tfrac{1}{2} l^2\gamma$ übergeht, d. h. es ist

$$\left\{\begin{aligned} 4D_2 + D_3 &= \tfrac{1}{2} l^2\gamma \\ 2D_2 + 4D_3 &= \tfrac{1}{2} l^2\gamma \end{aligned}\right\},$$

woraus $D_2 = D_4 = 0{,}1071\, l^2\gamma$ und $D_3 = 0{,}0714\, l^2\gamma$ folgt.

Fig. 747.



Man hat für die Lösung dieser Gleichungssysteme, und zwar auch in dem allgemeinen Fall, der Gleichung Nr. 387) entspricht, besondere Hülfsmittel, sogen. adjugierte Systeme eingeführt, durch welche jede der Unbekannten D_1, D_2 ... rasch bestimmt werden kann.

Für den vorliegenden einfachen Fall wird das adjugierte System durch die sogen. Clapeyronschen Zahlen gebildet, welche $e_1 = -1$, $e_2 = +4$, $e_3 = -15$, $e_4 = +56$, $e_5 = -209$, $e_6 = +780$, $e_7 = -2911$, $e_8 = +10\,864$, $e_9 = -40\,545$, $e_{10} = +157\,316$ u. s. w. lauten.

Addiert man die Gleichungen für D_1, D_2, ..., nachdem man deren letzte mit der ersten Clapeyronschen Zahl e_1, deren vorletzte mit der zweiten

Legt man (vergl. Fig. 758) durch A_1 und A_2 beliebige Parallelen, welche die Vertikalen des Feldes $B_1 B_2$ in C_1 und C_2 ſchneiden, ſo beſtimmt der

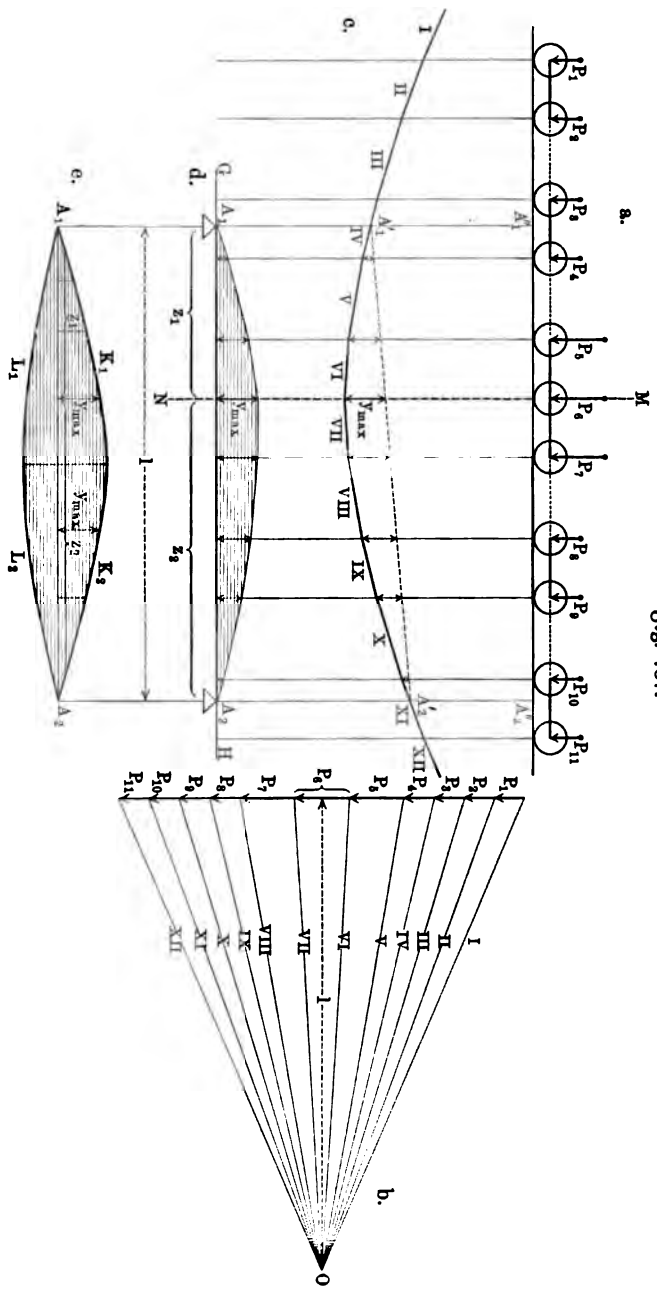


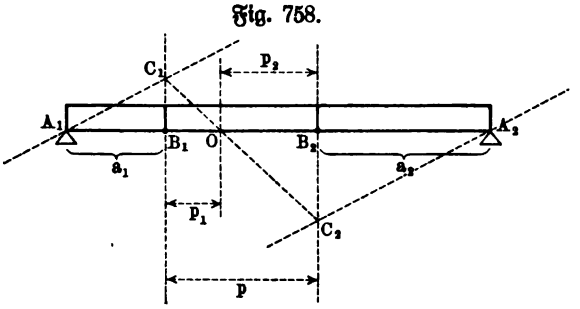
Fig. 757.

Schnitt von C_1C_2 mit A_1A_2 die Belastungsscheide O, weil dann $OB_1 : OB_2 = OC_1 : OC_2$ und $OA_1 : OA_2 = OC_1 : OC_2$ ist.

Rückt P von O aus um h nach links, so vergrößert sich p_2 um h und demnach vergrößern sich P_1 und R_1 bezw. um $\frac{h}{p} \cdot P$ und $\frac{h}{l} \cdot P$, d. h. R_1 wächst weniger als P_1, so daß $V = -R_1 + P_1$ einen positiven Wert hat; rückt P von O aus nach rechts, so wird V ebenso negativ. Man hat also das Ergebnis: **Liegt P im Felde B_1B_2 links von der Belastungsscheide O, so ist die Vertikalkraft des Feldes positiv, liegt P rechts von O, so ist sie negativ.**

Demnach erhält man bei beliebiger Belastung für das Feld B_1B_2 das positive Maximum von V, wenn der Lastzug von A_1 bis zur Belastungsscheide O vorrückt, das negative Maximum dagegen, wenn er von A_2 bis O vorrückt.

Fig. 758.



Eine Betrachtung der Momentenflächen von Fig. 739 und Fig. 740 zeigt, daß die Momente für die Stellen unter den Querträgern gerade so groß sind, als wenn diese nicht vorhanden wären, und daß sie zwischen je zwei Querträgern kein Maximum haben, d. h. **man hat die Maximalmomente bei beweglicher Belastung lediglich für die Stellen unter den Querträgern zu bestimmen, sie als Ordinaten aufzutragen und die damit angedeutete Fläche durch Strecken abzuschließen.**

Vorstehende Betrachtungen beziehen sich lediglich auf den **Zweistützenträger.**

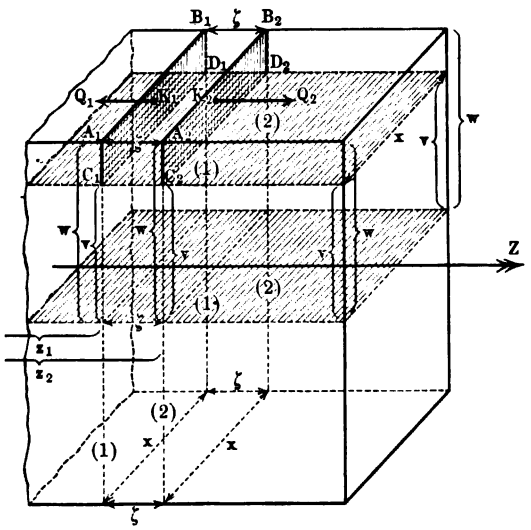
Ihre Ausdehnung auf **durchgehende Träger**, deren einzelne Felder **dann den Fällen 3 und 4 der einfachen Befestigung** entsprechen, ist von besonderem praktischen Werte, bietet aber in theoretischer Hinsicht nur solche Schwierigkeiten, welche durch die bisherigen Betrachtungen Schritt für Schritt überwunden werden können.

160. Schubspannungen im gebogenen Balken. a) **Die Schubspannungen für den Normalfall der Biegung in Faserschichten, welche ursprünglich der Mittelschicht parallel waren, und senkrecht dazu.** Während die einzelnen, parallel zur Achse eines Balkens verlaufenden Fasern durch Zug und Druck so gedehnt werden, daß die Dehnung für verschiedene Stellen einer Faser in erster Annäherung denselben Wert hat (vergl. S. 828 und S. 860), ändert sich die Dehnung für eine entsprechende Faser im gebogenen Balken im allgemeinen von Stelle zu Stelle, und zwar ist deren Wert im Normalfalle abhängig von dem Werte des Momentes der äußeren Kräfte für die betrachtete Stelle und von deren Abstande von der Mittelschicht.

Infolge dieser Beziehungen treten im gebogenen Balken in den Schichten, welche ursprünglich der Mittelschicht parallel waren, im allgemeinen Schubspannungen auf, welche der gezogene oder gedrückte Stab nicht zeigt.

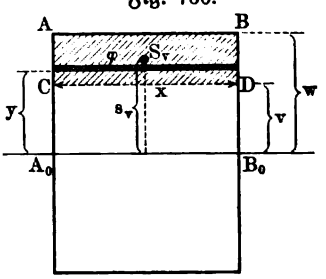
Um diese für den Normalfall der Praxis festzustellen, betrachten wir einen Teil des gebogenen Balkens, der durch eine Schicht im Abstande v von der Mittelschicht und durch zwei Querschnitte begrenzt wird; in Fig. 759 ist ein solcher Teil durch $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ dargestellt und zwar vor der Biegung.

Fig. 759.



Denkt man den Schnitt $A_1B_1C_1D_1$ oder $A_2B_2C_2D_2$ wirklich hergestellt, so werden dabei bestimmte Faserschichten durchschnitten, welche sonst durch Vermittelung der Fläche $A_1B_1C_1D_1$ oder $A_2B_2C_2D_2$ bei der Biegung einen gewissen Zug oder Druck übertragen.

Fig. 760.



Für eine Faserschicht eines Querschnittes im Abstande y von dessen Achse (vergl. Fig. 760) beträgt der zerstörte Zug oder Druck $\varphi \cdot \sigma_y$, wenn die Spannung der Schicht mit σ_y und deren Fläche mit φ bezeichnet wird; da $\sigma_y = \frac{y}{w}\sigma_w$ ist, so läßt sich diese Kraft auch darstellen als $\frac{\sigma_w}{w} \cdot \varphi y$. Die Kraft $[Q]$, welche dem Schnitt von der Tiefe $w - v$ entspricht, hat demnach den Wert

$$Q = \frac{\sigma_w}{w} \cdot \Sigma \varphi y,$$

wobei sich die Summation auf die schraffierte Fläche erstreckt. Bezeichnet man diese Fläche durch f_v und den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse durch s_v, so ist nach dem Momentensatze

$$s_v \cdot f_v = \Sigma \varphi y,$$

und demnach gilt auch

$$Q = \frac{\sigma_w}{w} \cdot s_v f_v.$$

Da nach der Festigkeitsgleichung $\frac{\sigma_w}{w} = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ ist, so gilt auch

$$Q = Mo \cdot \frac{s_v \cdot f_v}{\mathfrak{T}\tau} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 393)$$

Beim prismatischen Balken unterscheiden sich die Werte von $[Q]$ für die einzelnen Querschnitte bei derselben Schnitttiefe $w - v$ nur durch den Wert von Mo, welcher ja im allgemeinen für verschiedene Querschnitte verschieden ist.

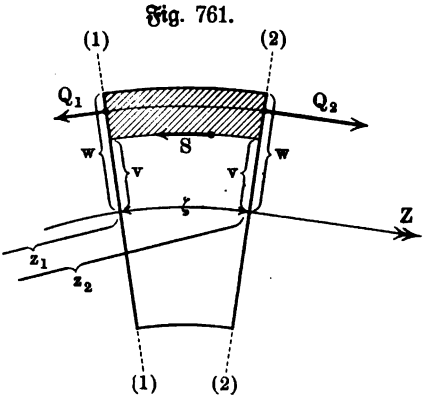
In Fig. 759 bezw. Fig. 761 gilt demnach für die beiden Querschnitte 1 und 2, deren Lage bezw. durch z_1 und z_2 bestimmt ist,

$$Q_1 = f(z_1)\frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\tau} \quad \text{und} \quad Q_2 = f(z_2)\frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\tau},$$

falls man $Mo = f(z)$ setzt.

Da im allgemeinen $Q_1 \gtrless Q_2$ ist, so kann das Balkenstück der Fig. 759 $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ nach der Biegung nur im Gleichgewichte sein, wenn noch andere Kräfte den Unterschied von Q_1 und Q_2 ausgleichen. Da für deren Übertragung nur die Fläche $C_1D_1C_2D_2$ vorhanden ist, so muß der Ausgleich durch Kräfte (S) in dieser (Schubkräfte) erfolgen. Vergl. Fig. 761.

Fig. 761.



Wäre der Balken nicht gebogen, so fielen $[Q_1]$ und $[Q_2]$ in eine Gerade, parallel zu welcher für $Q_2 > Q_1$ eine Schubkraft $[S]$ vom Werte $Q_2 - Q_1$ in der Fläche $C_1D_1C_2D_2$ anzubringen wäre.

Hat der Balken am Grunde des Schnittes die Breite x, so daß $CD = x$ ist in Fig. 760, so verteilt sich $[S]$ auf die Fläche $\zeta \cdot x$, falls $z_2 - z_1 = \zeta$ gesetzt wird, und demnach hat die entsprechende Schubspannung den Mittelwert

$$\tau = \frac{S}{x \cdot \zeta}.$$

Für $S = Q_2 - Q_1$ ergäbe sich dabei

$$\tau = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{\zeta} \cdot \frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\tau} \cdot \frac{1}{x}.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für den gebogenen Balken, falls die Querschnitte 1 und 2 einen unendlich-kleinen Abstand ζ erhalten.

Ändert sich $Mo = f(z)$ für die Strecke ζ stetig, so ist

$$lim\left[\frac{f(z_2) - f(z_1)}{\zeta}\right]_{\zeta=0}$$

die Ableitung von Mo nach z für die betrachtete Stelle, welche wir wieder durch Mo' bezeichnen, d. h. man hat

$$\tau = Mo' \cdot \frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\tau} \cdot \frac{1}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 394)$$

Da alle Fasern der Schicht $C_1D_1C_2D_2$ dieselben Beziehungen darbieten, so darf man eine gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen innerhalb der Fläche $C_1D_1C_2D_2$ annehmen, d. h. der berechnete Wert von τ stellt für die Faserschicht im Abstande v von der Mittelschicht die Schubspannung dar und zwar an der Stelle, welche dem durch x bestimmten Querschnitte entspricht, vorausgesetzt, daß sich das Moment der äußeren Kräfte für die Umgebung von x stetig ändert.

Für den rechteckigen Querschnitt der Fig. 762 ist $f_v = b(w - v)$ und $s_v = w - \frac{w - v}{2} = \frac{w + v}{2}$, so daß sich für $x = b$ und $\mathfrak{T}r = \frac{bh^3}{12}$ ergiebt

$$\frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}r} \cdot \frac{1}{x} = 6 \cdot \frac{w^2 - v^2}{h^3} \cdot \frac{1}{bh}.$$

Führt man $\frac{h}{2} = w$ ein und bezeichnet man ferner die Fläche bh des Querschnittes durch f, so ist

$$\tau = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{Mo'}{f} \cdot \frac{h^2 - 4v^2}{h^2}.$$

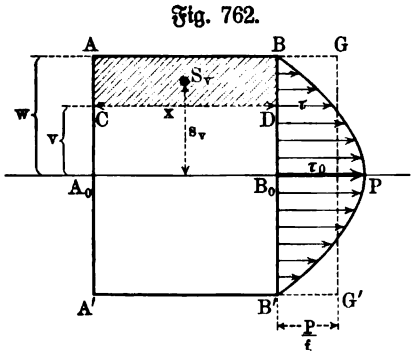
Man sieht, daß τ für $v = 0$, d. h. für die Mittelschicht, sein Maximum hat, und zwar ist

$$\tau_{max} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{Mo'}{f}.$$

Handelt es sich z. B. um einen Freiträger mit der Endbelastung $[P]$, so ist $Mo = P \cdot x$ und $Mo' = P$, d. h.

$$\tau_{max} = \tfrac{3}{2} \frac{P}{f}.$$

Fig. 762.



Für $v = \frac{h}{2} \cdots 0$ ergiebt sich für τ eine Tabelle, welche in graphischer Darstellung der Parabel BPB' der Fig. 762 entspricht. Dreht man diese um BB' als Achse um 90° und verschiebt man sie dann ferner nach AA', so entsteht über dem Querschnitt ein paraboloischer Cylinder, welcher in jeder der Mittelschicht parallelen Schicht die zugehörige Schubspannung abgrenzt.

Bei gleichmäßiger Verteilung von P über die Querschichten träte statt der Parabel BPB' das Rechteck $BGG'B'$ ein mit $\tau = \frac{P}{f}$.

Bezeichnet man allgemein die Schubspannung für die Mittelschicht ($v = 0$) durch τ_0 und die Breite des Querschnittes dort durch x_0, so ist

$$\tau_0 = Mo' \cdot \frac{s_0 f_0}{\mathfrak{T}r} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Man hat also

$$\tau x : \tau_0 x_0 = s_v f_v : s_0 f_0.$$

Da $s_0 f_0$ das Moment der halben Querschnittsfläche ist, während $s_v f_v$ das Moment für einen Teil dieser halben Querschnittsfläche ist, so ist $s_v f_v < s_0 f_0$ und also auch

$$\tau x < \tau_0 x_0.$$

Für $x = x_0$ und für $x > x_0$ ist also $\tau < \tau_0$, d. h. für Querschnitte von konstanter Breite (Rechteck) und für Querschnitte, bei welchen die Mittelschicht die kleinste Breite aufweist, erreicht die Schubspannung für die Mittelschicht ihr Maximum.

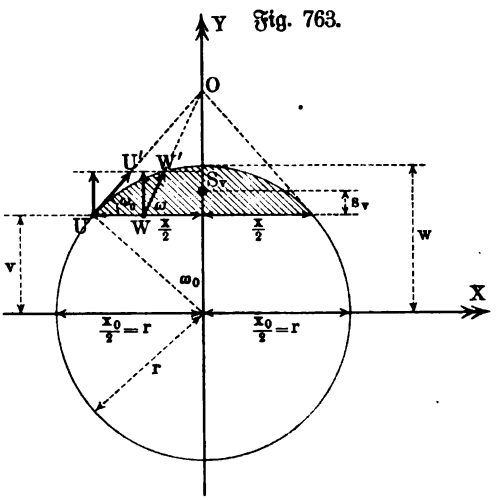
Die Bedingung $\tau_0 \leqq t$ zieht hier die Bedingung $\tau \leqq t$ nach sich, so daß man nur die Schubspannung für die Mittelschicht zu berechnen braucht.

Für $x < x_0$ muß das Verhältnis von $\tau : \tau_0$ von Fall zu Fall bestimmt werden.

Für die äußerste Faserschicht ist stets $\tau = 0$, weil für diese $f_v = 0$ ist.

Wir betrachten noch gemäß § 137 die Verteilung der Schubspannungen im Kreisquerschnitte, bei dem $x_0 > x$ ist. Vergl. dazu b) a. f. S.

Fig. 763.



Man hat für den schraffierten Kreisabschnitt von der Fläche f_v in der Fig. 763

$$s_v = \frac{x^3}{12 f_v}$$

und demnach die Schubspannung in Richtung der Y-Achse, da $\mathfrak{T}r = \frac{\pi}{4} r^4$ ist,

$$\frac{Mo' \cdot \frac{x^3}{12}}{\frac{\pi}{4} r^4} \cdot \frac{1}{x},$$

woraus nach § 137 der Gesamtwert WW' von $[\tau]$ in der Richtung WO durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sin \omega}$ hervorgeht. Man hat also

$$WW' = \frac{Mo' \cdot x^2}{3 \pi r^4} \cdot \frac{1}{\sin \omega}.$$

Da $\sin \omega$ mit ω von der Mitte aus nach dem Rande zu abnimmt, so hat $\frac{1}{\sin \omega}$ am Rande sein Maximum, es ist also

$$UU' = WW'_{max} = \frac{Mo' \cdot x^2}{3 \pi r^4} \cdot \frac{1}{\sin \omega_0},$$

wofür man, da x zum Centriwinkel $2\omega_0$ gehört und also den Wert $2r \sin\omega_0$ hat, auch schreiben kann

$$UU' = \tfrac{4}{3}\frac{Mo'}{r^2\pi}\cdot \sin\omega_0.$$

Vergleicht man nun die Werte von UU' für verschiedene Randpunkte des Querschnittes, so sieht man, daß UU' sein Maximum hat für $\omega_0 = 90^0$, d. h. in dem Randpunkte der Neutralen (in der Mittelschicht). Demnach ist auch hier $\tau_{max} = \tau_0$ und zwar hat man

$$\tau_{max} = \tau_0 = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{Mo'}{r^2\pi},$$

d. h. man hätte z. B. für den Freiträger mit Endbelastung $\tau_{max} = \tfrac{4}{3}\frac{P}{f}$.

b) Die Schubkraft innerhalb des Querschnittes für den Normalfall der Biegung. Da die Schubspannungen stets paarweise auftreten (vergl. S. 820), so stellt der für τ berechnete Wert zugleich Schubspannungen dar in Ebenen, welche auf den zuerst betrachteten senkrecht stehen, d. h. in Querschnitten, und zwar bezeichnet τ deren Schubspannung, senkrecht zu den zuerst betrachteten Schichten.

Laufen diese horizontal, so ist also durch τ die vertikale Komponente der Schubspannung für jeden Punkt des Querschnittes auch gegeben.

Diesen vertikalen Schubspannungen entspricht eine vertikale Schubkraft im Querschnitte, welche sich folgendermaßen berechnen läßt. Betrachtet man in Fig. 764 a die Faserschicht in der Höhe y über der Mittelschicht, so bestimmt diese im Querschnitt einen Flächenstreifen von der Breite x und der Höhe η, auf welchem sich Schubspannungen vom Werte τ finden. Dieser Schicht entspricht also die Schubkraft $\tau(x\eta)$, d. h. die Kraft

$$Mo'\cdot\frac{s_y f_y}{\mathfrak{T}r}\cdot\frac{1}{x}\cdot(x\eta) = \frac{Mo'}{\mathfrak{T}r}\cdot(s_y f_y \eta).$$

Für alle Flächenstreifen des Querschnittes ergiebt sich also eine Kraft

$$V = \frac{Mo'}{\mathfrak{T}r}\cdot\Sigma(s_y f_y \eta).$$

Da die Summe $\Sigma(s_y f_y \eta)$ nur von der Gestalt des Querschnittes abhängt, nicht aber von anderen Größen, so muß sie für jede Art der Belastung denselben Wert annehmen.

Setzt man einen Freiträger mit Endlast $[P]$ voraus, so ist $Mo = Pz$ und $Mo' = P$, während außerdem $V = P$ ist. Hier gilt also

$$P = \frac{P}{\mathfrak{T}r}\cdot\Sigma(s_y f_y \eta),$$

d. h.

$$\Sigma(s_y f_y \eta) = \mathfrak{T}r,$$

und demnach gilt allgemein

$$V = Mo' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 395)$$

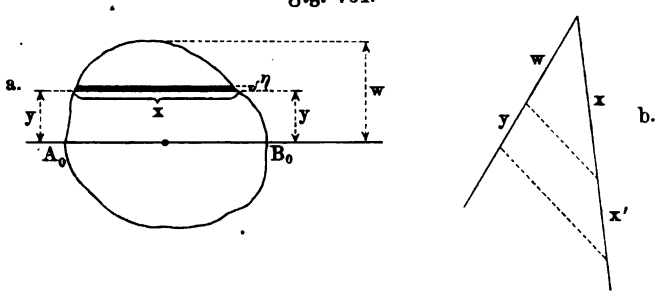
Diese wichtige Gleichung ist an die Bedingung gebunden, unter der die Formel für τ galt, daß nämlich Mo in der Umgebung der betrachteten Stelle stetig verläuft.

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird $V = 0$, wenn $Mo' = 0$ ist, d. h. in diesem Falle wird das Maximum von Mo, welchem ein gefährlicher Querschnitt entspricht, ebensowohl durch $V = 0$ bezeichnet wie durch $Mo' = 0$.

Wir kommen hier also zurück zu den Ergebnissen, welche auf S. 923 f. abgeleitet wurden, wo zugleich die weitergehende Bedeutung der Gleichung $V = 0$ erläutert wurde.

c) Veranschaulichung durch reduzierte Querschnitte. Vorstehende Betrachtung wird sehr durchsichtig, wenn man statt des vorhandenen

Fig. 764.



Querschnittes den sogen. „reduzierten Querschnitt" einführt. Für einen beliebigen Querschnitt, wie ihn Fig. 764 a darstellt, ist die Spannung für die Faserschicht im Abstande η gegeben als

$$\sigma_y = \frac{y}{w} \cdot \sigma_w,$$

so daß die entsprechende Kraft bei einer Breite x und einer Höhe η der Schicht durch

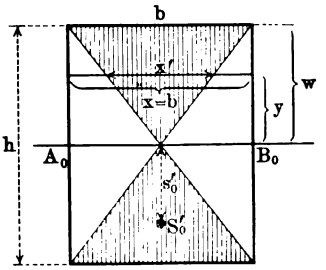
$$(\eta x)\sigma_y = \sigma_w \left(\frac{y \cdot x}{w}\right) \cdot \eta$$

dargestellt wird.

Denkt man sich einen anderen Querschnitt, dessen Breite x' überall durch $x' = \frac{y \cdot x}{w}$ bestimmt ist, so nennt man ihn, da $\frac{y}{w}$ ein echter Bruch ist, den reduzierten Querschnitt, der zum gegebenen gehört. Um ihn zu bestimmen, hat man für jede Parallele zur Biegungsachse des Querschnittes, gemäß Fig. 764 b, die Reduktion von x auf x' zu vollziehen, welche z. B. für das Rechteck in Fig. 765 die schraffierte Fläche als reduzierten Querschnitt ergiebt. Für die Beziehungen der Fig. 766 a (a. f. S.), welche irgend einen reduzierten Querschnitt darstellt, gilt

$$f_v' = \Sigma x' \eta = \frac{1}{w} \Sigma y (x \eta).$$

Fig. 765.



Da $\Sigma y(x\eta)$ für den gegebenen Querschnitt das Massenmoment $s_v \cdot f_v$ darstellt, so ist dieses durch $w f_v'$ veranschaulicht, d. h. man hat

$$f_v' = \frac{1}{w} \cdot f_v \cdot s_v.$$

Die Zugkraft bezw. Druckkraft, welche beim Anschneiden in der Fläche f_v zerstört wird, ist $\Sigma \sigma_w \cdot x' \cdot \eta = \sigma_w \Sigma x'\eta = \sigma_w \cdot f_v'$.

Nennt man diese Kraft wieder Q oder genauer Q_v, so ist also

$$Q_v = \sigma_w \cdot f_v'.$$

Das Moment dieser Kraft, bezogen auf die Biegungsachse des Querschnittes, ist $\Sigma \sigma_w \cdot y \cdot (x'\eta) = \sigma_w \Sigma y(x'\eta) = \sigma_w \cdot f_v' s_v'$. Bezeichnet man dieses Moment durch Mo_v, so ist demnach

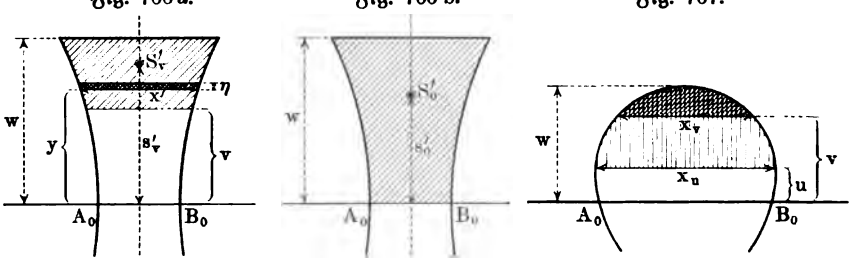
$$Mo_v = \sigma_w \cdot f_v' s_v'.$$

Demgemäß bestimmt sich die Höhenlage η_v des Angriffspunktes von Q_v durch

$$\eta_v \cdot Q_v = Mo_v,$$

woraus $\eta_v = s_v'$ folgt, so daß sich bei symmetrischen Querschnitten mit vertikaler Symmetrale die beim Anschneiden der Fläche f_v zerstörte Kraft im Schwerpunkte der Fläche f_v' verdichtet.

Fig. 766 a. Fig. 766 b. Fig. 767.



Schneidet man den Querschnitt bis zur Neutralen an, wie es Fig. 766 b zeigt, so ist die zerstörte Kraft Q_0, welche in S_0' auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, gegeben als

$$Q_0 = \sigma_w \cdot f_0',$$

während ihr Moment für $A_0 B_0$ gegeben ist als

$$Mo_0 = \sigma_w \cdot f_0' s_0'.$$

Für das Rechteck der Fig. 765 ist $f_0' = \frac{1}{2}\left(b \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4} bh$ und $s_0' = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{3} h$, so daß hier $Q_0 = \frac{1}{4}\sigma_w bh$ und $Mo_0 = \frac{1}{12}\sigma_w bh^2$ ist; berücksichtigt man hier Zugseite (1) und Druckseite (2), so ist $Q_0^{(1)} + Q_0^{(2)} = 0$ und $Mo_0^{(1)} + Mo_0^{(2)} = \frac{1}{6}\sigma_w bh^2 = \sigma_w \frac{\mathfrak{T}r}{w}$, d. h. man kommt zurück zu der **Festigkeitsgleichung.**

Vergleicht man die Fläche zweier verschiedener Schnitte gemäß Fig. 767, so folgt aus $\tau_v = Mo' \cdot \frac{s_v \cdot f_v}{\mathfrak{T}r \cdot x_v}$ die Beziehung

$$\tau_v : \tau_u = \frac{s_v f_v}{x_v} : \frac{s_u f_u}{x_u} = \frac{f'_v}{x_v} : \frac{f'_u}{x_u}.$$

Bezeichnet man die Werte von τ_v und τ_u, welche $x_v = 1$ und $x_u = 1$ entsprechen würden, durch $\tau_v^{(1)}$ und $\tau_u^{(1)}$, so ist einerseits

$$\tau_v = \frac{\tau_v^{(1)}}{x_v} \quad \text{und} \quad \tau_u = \frac{\tau_u^{(1)}}{x_u}$$

und anderseits

$$\tau_v^{(1)} : \tau_u^{(1)} = f'_v : f'_u,$$

d. h. die Schubspannungen für die Breite 1 verhalten sich wie die reduzierten Querschnittsflächen.

Fig. 768.

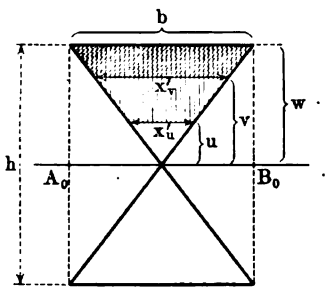
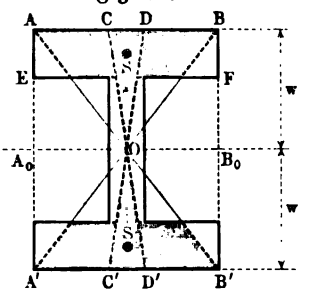


Fig. 769.



Aus diesem Satze folgt z. B. für das Rechteck gemäß Fig. 768

$$\tau_v^{(1)} : \tau_u^{(1)} = \frac{b + x'_v}{2}(w - v) : \left(\frac{b + x'_u}{2}\right)(w - u).$$

Da $\frac{x'_v}{b} = \frac{v}{w}$ und $\frac{x'_u}{b} = \frac{u}{w}$ ist, so gilt auch

$$\tau_v^{(1)} : \tau_u^{(1)} = (w^2 - v^2) : (w^2 - u^2)$$

oder auch

$$\tau_v^{(1)} = C(w^2 - v^2).$$

Da beim Rechtecke $x_u = x_v = b$ ist, so ist hier

$$\tau_v = \frac{C}{b}(w^2 - v^2),$$

und man hat für $v = 0$ die Beziehung $\tau_0 = \frac{C}{b} w^2$, so daß $C = \frac{b\tau_0}{w^2}$ ist und also

$$\tau_v = \tau_0\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)$$

folgt, woraus sich wieder die Parabel BPB' der Fig. 762 ergiebt.

Für ein symmetrisches I-Profil zeigt Fig. 769 die Reduktion; wäre $ABA'B'$ das Profil, so würde die Reduktion durch AB' und BA' gegeben, wäre $CDC'D'$ das Profil, so würde die Reduktion durch CD' und DC' gegeben. Bei dünner Vertikalwand ist der Flantschenquerschnitt $ABEF$ angenähert gleich der halben Fläche des reduzierten Querschnittes und können

in diesem Falle auch die Schwerpunktsabstände der Flantschen (S und S') von der Neutralen eintreten statt der Schwerpunktsabstände der reduzierten Flächen.

d) Bestimmung der Abmessungen mit Rücksicht auf die vorhandenen Schubspannungen. Mit Rücksicht auf die Schubspannungen, welche parallel zur ursprünglichen Mittelschicht auftreten, hat man zunächst im Querschnitt die Schicht aufzusuchen, für welche τ sein Maximum hat, was bei den in der Praxis verwendeten Querschnitten meist (vergl. S. 1045) für die neutrale Schicht eintritt.

Bezeichnet t die zulässige Spannung für Schub, so folgt aus der Beziehung

$$Mo' \cdot \frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot x} \leqq t,$$

welche für die Schicht der maximalen Schubspannungen angesetzt werden muß,

$$x \geqq Mo' \cdot \frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \frac{1}{t},$$

d. h. die Breite x des Querschnittes darf für diese Schicht nicht unter eine gewisse Grenze sinken.

Beim Rechteck, dessen Breite b konstant ist, hat man also

$$b \geqq Mo' \cdot \frac{3}{2h} \cdot \frac{1}{t}.$$

Für den Freiträger mit Endbelastung $[P]$ ist $Mo' = P$, so daß hier bei rechteckigem Querschnitte $b \geqq \frac{3P}{2ht}$ zu nehmen ist.

Da der Träger jedenfalls auf Biegung durchgerechnet werden muß, so vergleicht man in der Praxis die Breite, welche die Biegungstheorie fordert, mit der Breite, welche für Schubsicherheit nötig ist.

Für den Freiträger mit rechteckigem Querschnitt ist $Pl = k \cdot \frac{bh^2}{6}$, so daß die Breite $b \geqq \frac{6Pl}{kh^2}$ für Sicherheit bei Biegung nötig ist; setzt man die beiden Werte für b einander gleich, so ist

$$\frac{3P}{2ht} = \frac{6Pl}{kh^2} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{h} = \frac{k}{4t},$$

d. h. solange $\frac{l}{h} > \frac{k}{4t}$ ist, gewährt hier die Sicherheit bei Biegung zugleich Sicherheit gegen Schub; für $t = \frac{3}{4}k$ muß also $l \geqq \frac{h}{3}$ oder $h \leqq \frac{1}{3}l$ sein, falls das eintreten soll.

Anderseits muß man die Fläche eines Querschnittes wegen des Schubes über einer gewissen Grenze halten, was natürlich mit Rücksicht auf die verjüngten Formen von Wichtigkeit ist.

Die oben abgeleitete Gleichung läßt sich

$$bh \geqq Mo' \cdot \frac{3}{2t}$$

schreiben, so daß für den behandelten Freiträger

$$bh \geqq \frac{3P}{2t}$$

anzusetzen ist.

Man vergleicht auch hier das Ergebnis mit den Abmessungen, welche die Biegungstheorie fordert, d. h. man benutzt für den Freiträger die Gleichung

$$Pl = k \cdot \frac{bh^2}{6},$$

aus welcher $bh \geqq \frac{6Pl}{kh}$ folgt.

Soll die Rechnung für Biegung auch die Sicherheit für Schub gewährleisten, so folgt aus dem Ansatze

$$\frac{3P}{2t} = \frac{6Pl}{kh}$$

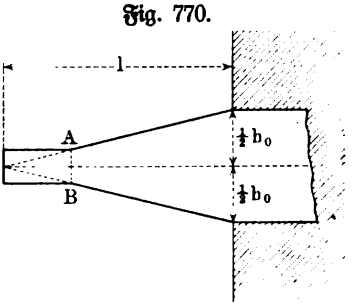
für $t = \frac{3}{4}k$

$$\frac{l}{h} \geqq \frac{1}{3},$$

d. h. die Länge des Balkens muß mindestens ein Drittel der Querschnittshöhe sein, wenn die Sicherheit für Biegung auch die Sicherheit für Schub gewährleisten soll [1]).

Für verjüngte Formen muß für jede Stelle, welche den Abstand z vom freien Ende hat, die Größe des Querschnittes (b' und h') oberhalb der Grenze $\frac{3P}{2t}$ bleiben bezw. muß $z > \frac{1}{3}h'$ sein. Bei konstanter Breite muß $h' \geqq \frac{3P}{2t \cdot b}$ und bei konstanter Höhe muß $b' \geqq \frac{3P}{2t \cdot h}$ sein, so daß z. B. im letzteren Falle statt der Fig. 692 die Fig. 770 eintritt, bei welcher die Verjüngung an der Stelle $AB = \frac{3P}{2t \cdot h}$ aufhört.

Fig. 770.



e) Ältere Bestimmung der Abmessungen für Schub. Früher pflegte man eine gleichmäßige Verteilung der Schubspannung über den Querschnitt anzunehmen, so daß sich

$$\tau = \frac{V}{f}$$

ergab für V als Wert der Vertikalkraft und für f als Fläche des Querschnittes.

Nach dem Gesetze über das Auftreten der Paare von Schubspannungen stellt τ unter der besagten Annahme sowohl die Schubspannung innerhalb

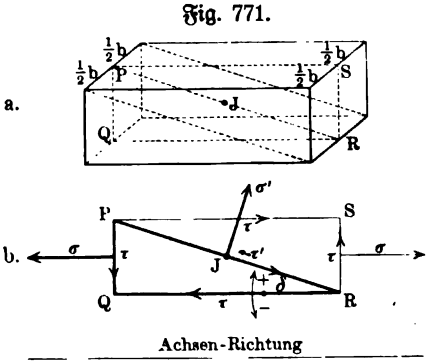
[1]) Vergl. hierzu § 192.

des Querschnittes dar als auch in den Schichten, welche ursprünglich der Mittelschicht parallel waren.

Berechnet man τ für $Mo' = V$ aus der Gleichung Nr. 394) für das Rechteck, so hat τ_{max} gemäß S. 1044 den Wert $\frac{3}{2}\frac{V}{f}$, während sich nach der älteren Theorie $1\frac{V}{f}$ ergiebt, d. h. die ältere Theorie rechnet um 50 Proz. zu niedrig (vergl. Fig. 762). Für die Kreisfläche setzt die ältere Theorie den Wert von τ um $33^1/_3$ Proz., für die Kreisringfläche um 100 Proz., für I-Träger um 150 bis 200 Proz. zu niedrig an.

161. Die größten Anstrengungen in einem Punkte des gebogenen Stabes bei Berücksichtigung des Schubes. Infolge der Belastung eines Stabes treten auch senkrecht zu den Schichten, welche ursprünglich der Mittelschicht des Balkens parallel waren, Normalspannungen auf, welche leicht aus den Vertikalkräften und aus der Belastung berechnet werden können.

Fig. 771.



Da diese Normalspannungen meist sehr gering sind im Vergleich zu den bisher berechneten Spannungen $[\sigma]$ und $[\tau]$, so brauchen sie im allgemeinen nicht berücksichtigt zu werden.

Um aus den bisher berechneten Spannungen die Anstrengung (vergl. S. 846) in einem Punkte J des gebogenen Balkens zu berechnen, betrachten wir gemäß Fig. 770 a und b ein unendlich-kleines dreiseitiges Prisma, dessen Kanten P, Q, R senkrecht auf der Ebene der Zeichnung in Fig. 771 b stehen, wenn diese einen Schnitt durch eine Vertikalschicht des Balkens darstellt. Nach Gleichung Nr. 298) ergeben sich für $\sigma_1' = \sigma$ und $\sigma_2' = 0$ hier als Hauptspannungen

$$\sigma_1 \text{ und } \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 396)$$

wobei die Richtungen von σ_1 und σ_2 gegen die Balkenachse durch

$$tng\, 2\delta = -\frac{2\tau}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 397)$$

bestimmt sind.

Berücksichtigt man auch die im Eingange dieses Paragraphen erwähnten Spannungen, so ist in Fig. 771 senkrecht zu QR noch eine Spannung $\bar{\sigma}$ anzubringen, so daß die Gleichung Nr. 298) für $\sigma_1' = \sigma$ und $\sigma_2' = \bar{\sigma}$ anzuwenden ist.

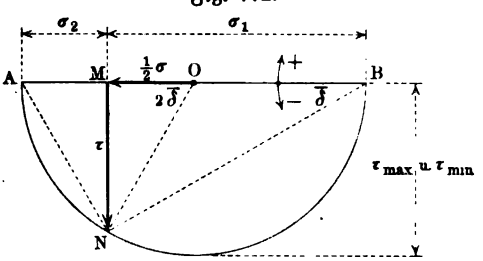
Unterscheidet man Zugspannungen und Druckspannungen als positive und als negative Spannungen, so ist σ_1 für positive und für negative Werte von σ selbst positiv, während σ_2 für positive und für negative Werte von σ negativ ist, d. h. σ_1 tritt stets als Zugspannung und σ_2 tritt stets als Druckspannung auf.

Man bezeichnet σ_1 und σ_2 gewöhnlich als σ_{max} und σ_{min}, wozu noch nach Gleichung Nr. 299)

$$\tau_{max} \text{ und } \tau_{min} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 398)$$

hinzutritt. In Fig. 772 ist aus τ und $\frac{1}{2}\sigma$ das Dreieck OMN konstruiert, dessen Hypotenuse ON mit dem Werte der größten Schubspannung übereinstimmt und zugleich als Radius des Kreises um O die Strecke $BM = \sigma_1$ und $AM = \sigma_2$ liefert; zugleich ist $\measuredangle NOM = -2\bar{\delta}$, weil $tng\, NOM = \dfrac{2\tau}{\sigma}$ ist, und demnach $\measuredangle NBO = -\bar{\delta}$, d. h. NB ist die Richtung der einen Hauptachse (σ_1).

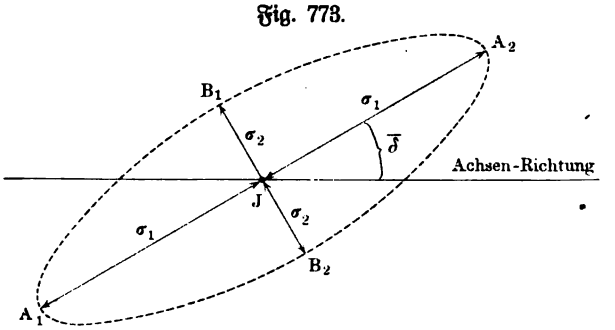
Fig. 772.



Zieht man also durch J in Fig. 771 eine Parallele zu NB, wie es Fig. 773 darstellt, so ist damit die in Fig. 773 gezeichnete Spannungsellipse für J gegeben.

Auf zeichnerischem Wege läßt sich dasselbe Ergebnis folgendermaßen gewinnen. Ist die Breite des Prismas der Fig. 771 vor und hinter der Ebene der Zeichnung wieder $\frac{1}{2}b$, so sind die Kräfte, welche den fünf Spannungen gemäß PQ, QR, RP entsprechen, bezw. $\sigma(b \,.\, PQ)$, $\tau(b \,.\, PQ)$, $\tau(b \,.\, QR)$, $\sigma'(b \,.\, PR)$, $\tau'(b \,.\, PR)$, d. h. sie zeigen die Verhältnisse

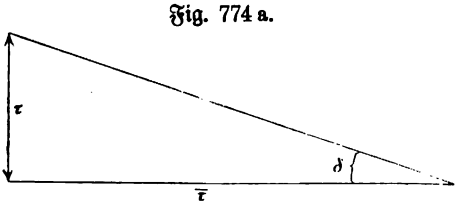
Fig. 773.



$$\sigma : \tau : \tau \,.\, \frac{QR}{PQ} : \sigma' \cdot \frac{PR}{PQ} : \tau' \cdot \frac{PR}{PQ}.$$

Stellt man $\bar{\tau} = \tau \cdot \dfrac{QR}{PQ} = \tau \,.\, cot\,\delta$ als vierte Proportionale oder gemäß Fig. 774 a dar, so läßt sich das Kraftеck für diese fünf im Gleichgewichte stehenden Kräfte leicht zeichnen, da man $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\bar{\tau}]$ und die Richtungen von $[\sigma']$ und $[\tau']$ kennt. Sucht man in diesem Kraftеck, welches Fig. 774 b (a. f. S.) als $ABCDE$ darstellt, den Schnitt C' zwischen CB und AE auf, so ist

Fig. 774 a.



$$BC' = BA \,.\, tng\,\delta = \bar{\tau} \,.\, tng\,\delta = \tau,$$

d. h. $\triangle C'CD$ ist bei Drehung des Schnittes PR in Fig. 771 um J unveränderlich. Bei einer solchen Drehung verschiebt sich A auf OB, während sich E, weil $\measuredangle DEC' = 90^0$ ist, auf dem Kreise vom Durchmesser $DC' = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ bewegt, welcher auch durch C geht.

Da $[DE]$ und $[EA]$ die Größen

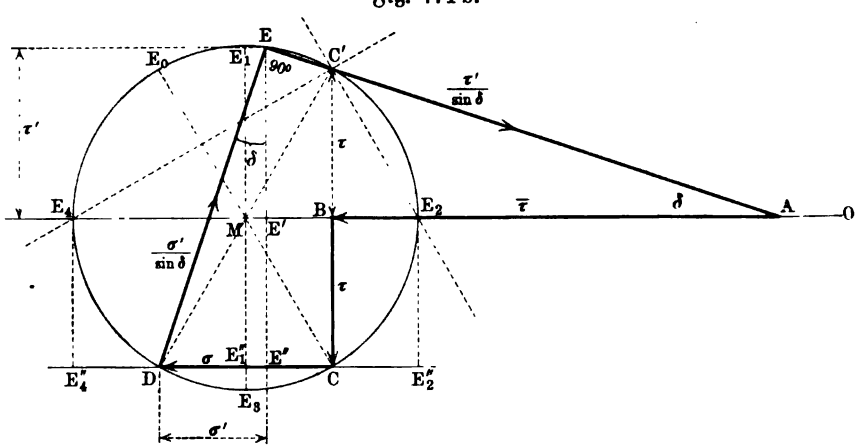
$$\left[\sigma' \cdot \frac{PR}{PQ}\right] = \left[\frac{\sigma'}{\sin\delta}\right] \quad \text{und} \quad \left[\tau' \cdot \frac{PR}{PQ}\right] = \left[\frac{\tau'}{\sin\delta}\right]$$

darstellen, so ist $\sigma' = DE \,.\, \sin\delta$ und $\tau' = AE \,.\, \sin\delta$, so daß σ' und τ' durch die Projektion von E auf CD und OM gegeben werden, und zwar ist

$$\sigma' = DE'' \quad \text{und} \quad \tau' = EE'.$$

Man sieht unmittelbar, daß $EE' = \tau'$ sein Maximum als Radius des Kreises vom Durchmesser $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ erhält, d. h. für die höchste Lage E_1 von E, in welcher $DE_1'' = \sigma' = \frac{1}{2}\sigma$ ist.

Fig. 774 b.



$DE'' = \sigma'$ erreicht dagegen sein Maximum $DE_2'' = +\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$, wenn E in dem rechts gelegenen Endpunkte E_2 des wagerechten Durchmessers liegt, wobei $\tau' = 0$ ist.

Der Drehung von PR in Fig. 771 um J, entsprechend $\delta = 0^0 \ldots 90^0$, entsprechen als Lagen von E die Punkte E_0 und C, so daß dabei von E der Halbkreis $E_0 E_1 E_2 C$ durchlaufen wird.

Bei einer weiteren Drehung von PR um J, entsprechend $\delta = 0^0 \ldots 180^0$, müßte Fig. 774 b gemäß $\triangle QPS$ in Fig. 771 neu entworfen werden. Da $\triangle C'CD$ dabei unverändert bleibt, so entspricht der Halbkreis $CE_3E_4E_0$ der Fig. 774 b der weiteren Drehung, wobei für E_3 wiederum τ' ein Maximum $\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ hat, während für E_4 das Minimum DE_4'' von σ' im Werte von $\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ zugleich mit $\tau' = 0$ auftritt.

Demnach ist $C'E_2$ dem Schnitte durch J parallel, für welchen die Normalspannung σ' ihr Maximum σ_1 hat, während $C'E_4$ dem Schnitte durch J

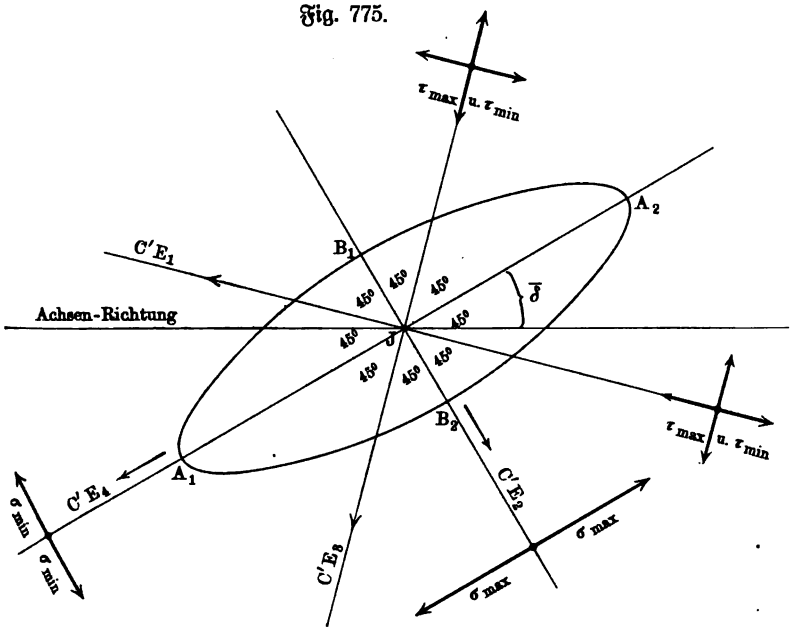
parallel ist, für welchen die Normalspannung σ' ihr Minimum σ_2 hat, d. h. $E_1 C' E_2$ bestimmt die Achsen der Spannungsellipse.

Ebenso sind $C'E_1$ und $C'E_3$ den Schnitten durch J parallel, für welche die Schubspannung τ' ihren größten Wert annimmt.

Die Richtungen $C'E_1$, $C'E_2$, $C'E_3$, $C'E_4$ bilden zwei rechtwinklige Kreuze, welche sich unter Winkeln von 45° schneiden, so daß für jeden Punkt J ein Bild entsteht, wie es Fig. 775 zeigt.

Unsere Entwickelungen gelten gemäß Fig. 771 für eine Zugspannung $[\sigma]$, für eine entsprechende Druckspannung führen sie zu entsprechenden Ergebnissen.

Fig. 775.



Für die Mittelschicht des Balkens ist $\sigma = 0$ und infolgedessen $tng\, 2\overline{\delta} = \infty$ und $\overline{\delta} = \pm 45°$, man hat hier $\sigma_1 = +\tau$ und $\sigma_2 = -\tau$ und τ_{max} und $\tau_{min} = \pm\tau$.

Für die äußersten Schichten des Balkens ist $\tau = 0$ und infolgedessen $tng\, 2\overline{\delta} = 0$ und $\overline{\delta} = 0$ und $\overline{\delta} = 90°$, man hat hier $\sigma_1 = \sigma$ und $\sigma_2 = 0$ und τ_{max} und $\tau_{min} = \pm\frac{1}{2}\sigma$; auf der Zugseite ist $[\sigma_1]$ eine Zugspannung, weil dort $[\sigma]$ eine solche ist, während ebenso auf der Druckseite $[\sigma_1]$ eine Druckspannung ist.

Fig. 776 (a. f. S.) stellt das Ergebnis der ganzen Untersuchung für einen Freiträger mit Endbelastung dar; die Linien der Zugmaxima AZ werden in Z rechtwinklig zu $Z_1 B_1$, die Linien der Druckmaxima BD werden in D rechtwinklig zu $A_1 D_1$, beide Arten von Trajektorien schneiden die Achse unter 45° u. s. w.

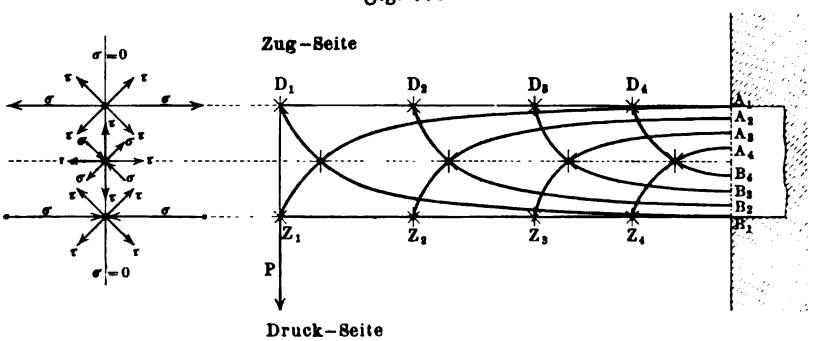
Den Hauptspannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ entsprechen die in ihren Richtungen gelegenen Dehnungen ε_1 und ε_2, während zugleich die Hauptspannung $[\sigma_1]$

in der Richtung von $[\sigma_2]$ die Querdehnung $-\frac{\varepsilon_1}{m}$ und die Hauptspannung $[\sigma_2]$ in der Richtung von $[\sigma_1]$ die Querdehnung $-\frac{\varepsilon_2}{m}$ hervorruft.

Die Dehnungen $\bar{\varepsilon}_1$ und $\bar{\varepsilon}_2$ in den Richtungen der Hauptspannungen, die Hauptdehnungen sind demnach ($\sigma = \varepsilon \cdot E$)

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{m} = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m}\right) \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1}{m} = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m}\right).$$

Fig. 776.



Diesen Hauptdehnungen entsprechen die idealen (reduzierten) Hauptspannungen, welche man als die größten Anstrengungen (vergl. S. 846) des Materials zu bezeichnen pflegt. Man hat für diese

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m},$$

woraus sich bei Benutzung der Werte von σ_1 und σ_2 ergiebt

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \text{und} \qquad \bar{\sigma}_2 &= \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 399)$$

Für $m \sim \frac{10}{3}$ ist $\frac{m-1}{2m} \sim 0{,}35$ und $\frac{m+1}{2m} \sim 0{,}65$.

Die größten Anstrengungen dürfen höchstens die Werte der zulässigen Spannungen k_1 und k_2 erreichen.

Auf die Bestimmung der Stellen im Balken, an welchen die größten Anstrengungen ihre Maxima haben, kommen wir in § 192 zurück.

162. Der Einfluß des Schubes auf die Biegungslinie und die experimentelle Bestimmung von G. Durch die Vertikalkraft $[V]$ wird die Biegungslinie des Balkens, welche bisher allein durch die biegenden Momente bestimmt wurde, verändert. Betrachtet man im Balken eine prismatische Platte $B_1C_1B_2C_2$ von der unendlich-kleinen Dicke ξ, welche senkrecht zur Achse A_1A_2 liegt, wie es Fig. 777 zeigt, so würde die Vertikalkraft $[V]$ bei gleichmäßiger

Verteilung über den Querschnitt eine Formänderung hervorrufen, bei welcher das Rechteck $B_1B_2C_1C_2$ in das Parallelogramm $B_1B_2'C_1C_2'$ übergeht. Da aber die Schubspannungen im Querschnitt für die äußersten Fasern den Wert Null haben und im allgemeinen für die Mittelschicht ein Maximum zeigen, so ändern sich die rechten Winkel $B_1B_2M_2$ bei B_2 und $M_2C_2C_1$ bei C_2 nicht, und infolgedessen bleibt die Fläche $B_2M_2C_2$ auch nach der, durch $[V]$ bewirkten Formänderung in B_2' senkrecht zu B_1B_2' und in C_2' senkrecht zu C_1C_2', während sich bei M_2' im allgemeinen ein Maximum der Abweichung von dem ursprünglichen rechten Winkel zwischen B_2C_2 und der Achsenrichtung A_1A_2 zeigt. Infolgedessen geht die Platte $B_1B_2C_1C_2$ etwa in die in Fig. 777 angedeutete gekrümmte Gestalt über. Um die Senkung $\bar{y}$ von B_2 oder M_2 oder C_2 zu berechnen, geht man davon aus, daß

Fig. 777.

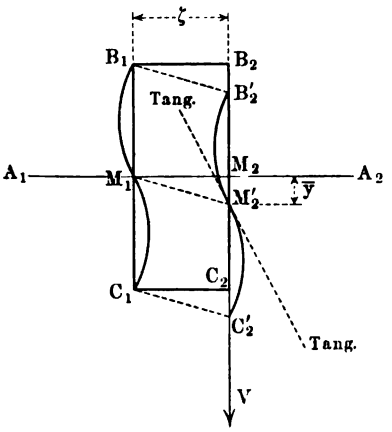
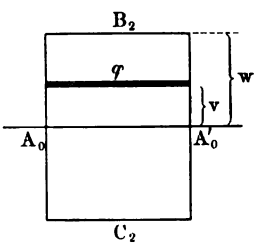


Fig. 778.



die Arbeit von $[V]$, welche dieser Senkung $\bar{y}$ entspricht, zur Hälfte auf Formänderung verwendet wird, während anderseits die Formänderungsarbeit für τ nach Gleichung Nr. 296) für die Einheit des Volumens $\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$ beträgt.

Bezeichnet man wieder (vergl. S. 1042) die Fläche eines Streifens im Querschnitt (vergl. Fig. 778), welcher die Entfernung v von dessen Biegungsachse hat, durch φ, so ist das Volumen des Teiles der Platte $B_1B_2C_1C_2$, welches über φ steht, durch $\varphi \,.\, \zeta$ gegeben; demnach ist für dieses Volumen, falls τ_v den Wert von τ für v bezeichnet, die Arbeit der Formänderung als $\frac{1}{2}\frac{\tau_v^2}{G} \cdot \varphi \,.\, \zeta$ anzusetzen. Für die ganze Platte $B_1B_2C_1C_2$ ergiebt sich diese Arbeit demnach durch Summation über alle Streifen φ, d. h. man hat den Ansatz

$$\tfrac{1}{2} V \,.\, \bar{y} = \Sigma \tfrac{1}{2}\frac{\tau_v^2}{G} \cdot \varphi \,.\, \zeta$$

oder

$$\bar{y} = \zeta \cdot \frac{\Sigma \tau_v^2 \,.\, \varphi}{G \,.\, V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 400)$$

Für einen rechteckigen Querschnitt (vergl. S. 1044) ist (für $f = bh$)

$$\tau_v = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{Mo'}{f} \cdot \frac{h^2 - 4v^2}{h^2},$$

d. h. man hat für das Rechteck als Querschnitt, da $(Mo')^2 = V^2$ ist,

$$\bar{y} = \tfrac{9}{4}\zeta \cdot \frac{V}{f} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{\Sigma(h^2 - 4v^2)^2 \cdot \varphi}{f \cdot h^4}.$$

Teilt man die halbe Höhe, einem Streifen von der Fläche φ entsprechend, in n Teile, so ist $\varphi = b \cdot \frac{h}{2n}$ und $v = p \cdot \frac{h}{2n}$, so daß

$$\Sigma(h^2 - 4v^2)^2 \cdot \varphi = f \cdot h^4 \left[\tfrac{1}{2} - \frac{1}{n^3}\Sigma p^2 + \frac{1}{2n^5} \cdot \Sigma p^4\right]$$

für den halben Querschnitt ($p = 1, 2, \ldots n$) den Wert $\frac{4}{15} f \cdot h^4$ annimmt. Für den ganzen Querschnitt (Rechteck) ist also

$$\bar{y} = \tfrac{6}{5} \cdot \frac{V}{f} \cdot \frac{1}{G} \cdot \zeta.$$

Hätte man eine gleichmäßige Verteilung von V über den Querschnitt angenommen, so hätte man für $\tau = \frac{V}{f}$ aus dem Ansatze

$$\tfrac{1}{2} V \cdot y = \tfrac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \cdot (f \cdot \zeta)$$

für jeden Querschnitt erhalten

$$y = 1 \cdot \frac{V}{f} \cdot \frac{1}{G} \cdot \zeta,$$

d. h. bei der fehlerhaften Annahme einer gleichmäßigen Verteilung erhält man für den rechteckigen Querschnitt nur fünf Sechstel des wahren Wertes.

Führt man, anderen Anschauungen entsprechend, statt des Mittelwertes $\tau = \frac{V}{f}$ das Maximum von τ ein, welches bei Rechtecken $\frac{3}{2}\frac{V}{f}$ ist, so erhält man für das Rechteck statt $\frac{6}{5}$ den Wert $\frac{3}{2}$, d. h. man erhält $\frac{5}{4}$ des wahren Wertes.

Während der Durchschnittswert zu kleine Werte für $\bar{y}$ ergiebt, ergiebt der Maximalwert zu große Werte von y.

Für den Kreis als Querschnitt ergiebt die für das Rechteck durchgeführte Betrachtung

$$y = \tfrac{32}{27} \cdot \frac{V}{f} \cdot \frac{1}{G} \cdot \zeta.$$

Bezeichnet man das Verhältnis des Koeffizienten der genauen Rechnung zum Koeffizienten der Durchschnittsrechnung mit μ, so ist für das Rechteck $\mu = \frac{6}{5} = 1{,}2$, für den Kreis $\mu = \frac{32}{27} = 1{,}185$, während μ für die gebräuchlichen Träger vom Profile I bis auf 3 und darüber steigt.

Vorstehende Betrachtung ist namentlich von Wichtigkeit, wenn man einen der Elasticitätsmoduln E oder G bezw. die Konstante m aus Biegungsversuchen ermitteln will.

Für einen Zweistützenträger (l) mit Mittelbelastung [P] beträgt die Durchbiegung in der Mitte bei Vernachlässigung des Eigengewichtes infolge

der biegenden Momente $y = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$, während die bei Versuchen gemessene Durchbiegung $d = y + \Sigma\bar{y}$ ist, wobei $\bar{y}$ durch Gleichung Nr. 400) bestimmt ist.

Für das Rechteck ergab Gleichung Nr. 400) $\bar{y} = \frac{6}{5}\cdot\frac{V}{f}\cdot\frac{1}{G}\cdot\zeta$ für eine senkrecht zur Achse stehende Platte des Stabes von der unendlich-kleinen Dicke ζ.

Für den Zweistützenträger (l) mit Mittelbelastung [P] ist V bei Vernachlässigung des Eigengewichtes vom linken Ende bis zur Mitte konstant und zwar hat es den Wert $\frac{1}{2}P$, so daß hier die Summe der Durchbiegungen, welche auf Rechnung der Vertikalkräfte kommen, vom linken Ende bis zur Mitte

$$\Sigma y = \frac{6}{5}\cdot\frac{\frac{1}{2}P}{f}\cdot\frac{1}{G}\cdot\Sigma\zeta$$

beträgt, wobei $\Sigma\zeta = \frac{1}{2}l$ ist. Man hat also hier für die gemessene Durchbiegung d den Ansatz

$$d = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r} + \frac{3}{10}\frac{Pl}{f\,.\,G}$$

oder für $\mathfrak{T}r = \frac{bh^3}{12}$ und $f = bh$ auch

$$d = \frac{Pl}{bh}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{l}{h}\right)^2\cdot\frac{1}{E} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{G}\right].$$

Da $G = \frac{m}{2(m+1)}E$ ist, falls m wieder den Koeffizienten der Querdehnung bezeichnet, so gestattet die abgeleitete Gleichung G bei gegebenem m oder E oder m bei gegebenem G oder E zu bestimmen.

Macht man zwei Versuchsreihen für l_1 und l_2, so lassen sich G und E bezw. G und m oder E und m bestimmen; Entsprechendes gilt bei anderer Abänderung der Versuche für dasselbe Material.

Für den Kreis (r) als Querschnitt ergiebt sich ebenso

$$d = \frac{Pl}{r^2\pi}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{l}{r}\right)^2\cdot\frac{1}{E} + \frac{32}{27}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{G}\right].$$

Allgemein ist für den Zweistützenträger mit Mittelbelastung bei Vernachlässigung des Eigengewichtes

$$\Sigma\bar{y} = \frac{1}{4}\mu\frac{Pl}{f\,.\,G}.$$

Aus den Formeln für Rechteck und Kreis als Querschnitt geht hervor, daß der Einfluß des Schubes um so mehr hervortritt, je kleiner $l : h$ bezw. $l : r$ ist, d. h. bei relativ kurzen Balken ist er erheblich; bei Rechtecken beträgt für $m = 4$ und für $l = 3h$ das zweite Glied der Klammer ein Drittel des ersten, d. h. 33⅓ Proz., während für $l = 1{,}732\,h$ die beiden Glieder der Klammer einander gleich werden.

163. Die sogenannte schiefe Belastung des Balkens. Wenn die angreifenden Kräfte wie beim Normalfall der Praxis in einer Ebene (Kraftebene) liegen, welche die Achse des Balkens schneidet, diese Ebene aber dabei die Querschnitte des Balkens nicht in einer ihrer Hauptachsen trifft, so spricht man von einer „schiefen Belastung" des Balkens.

Bei Anwendungen ist die Kraftebene meist eine Vertikalebene, wie im Normalfalle, während der wagerechte Balken so gelagert ist, daß die beiden Hauptachsen des Querschnittes nicht mehr senkrecht bezw. wagerecht verlaufen (vergl. z. B. Fig. 781).

Halten wir dieses Bild fest, so dürfen wir auch hier wieder von einer Belastungsebene sprechen, innerhalb welcher das System der äußeren Kräfte für jeden bestimmten Querschnitt, dessen Schwerpunkt als Zurückführungspunkt gewählt wird, im allgemeinen ein Moment $[Mo]$ und eine Querkraft $[V]$ liefert.

Der Unterschied gegenüber dem Normalfall besteht darin, daß die ursprüngliche Achse des Balkens hier in eine Biegungslinie übergeht, welche aus der Belastungsebene heraustritt und im allgemeinen nicht mehr eben, sondern gewunden ist.

Man sieht dies unmittelbar ein, wenn man $[Mo]$ nach den beiden Ebenen zerlegt, welche durch die Achse (Z) des Balkens und je eine Hauptachse (X und Y) des Querschnittes bestimmt werden; der Fall der schiefen Belastung zerlegt sich dann in zwei Fälle gerader Belastung, so daß die Achse der Biegung zugleich in der Ebene XZ und in der Ebene YZ verbleiben müßte, also im allgemeinen aus beiden Ebenen heraustritt, ohne dabei eine ebene Linie zu bilden.

Man bleibt auch hier mit der Erfahrung in genügender Übereinstimmung, wenn man annimmt, daß die ursprünglichen Querschnitte während der Biegung, ohne Formänderungen zu erleiden, stets senkrecht sind zu der sich bildenden Biegungslinie. Ist diese gegeben, so ist die Stellung jedes Querschnittes im gebogenen Balken wiederum bestimmt, abgesehen von einer Drehung des Querschnittes in sich um seinen Schwerpunkt. In Bezug auf diese Drehung macht man hier folgende Annahme:

Zieht man in zwei benachbarten Querschnitten durch deren Schwerpunkte vor der Biegung zwei beliebige Parallelen, so bildet die Schnittgerade der beiden Querschnitte während der Biegung mit jeder dieser Parallelen stets Winkel von unter sich gleicher Größe.

Legt man nun durch drei benachbarte Punkte P', P, P'' der Biegungslinie die Schmiegungsebene von P (vergl. S. 91), so ersetzt der Kreis durch P', P, P'' die Biegungslinie für die Umgebung von P. In der Mitte S_1 von $P'P$ steht ein Querschnitt F_1 und in der Mitte S_2 von PP'' ein, diesem benachbarter Querschnitt F_2 senkrecht, und zwar sind S_1 und S_2 die Schwerpunkte dieser Querschnitte. Nimmt man, wie es Fig. 779 andeutet, die Schmiegungsebene als Ebene der Zeichnung, so steht die Schnittgerade von F_1 und F_2 in M auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, während $\varrho = MS_1 = MS_2$ den Krümmungsradius ϱ der Biegungslinie für die betrachtete Stelle P darstellt. Parallelen durch S_1 und S_2 zu der Schnittgeraden durch

M, welche natürlich auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehen, bestimmen nach unserer Annahme in den Querschnitten zwei Strecken, welche auch vor der Biegung einander parallel waren.

Eine Ebene, welche man vor der Biegung durch diese Strecken legt, und der Cylinder vom Radius ϱ, dessen Achse die Gerade durch M in Fig. 779 ist, bestimmen demnach für den betrachteten Teil des Balkens vor und nach der Biegung dieselben materiellen Punkte, und ein Gleiches gilt für je eine Ebene im Abstande v von jener ersten und einen entsprechenden Cylinder vom Radius $\varrho + v$. Dasselbe gilt auch für die Ebene der Zeich-

Fig. 779.

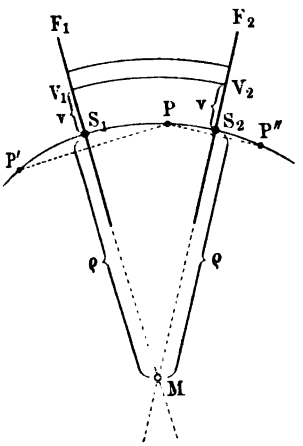
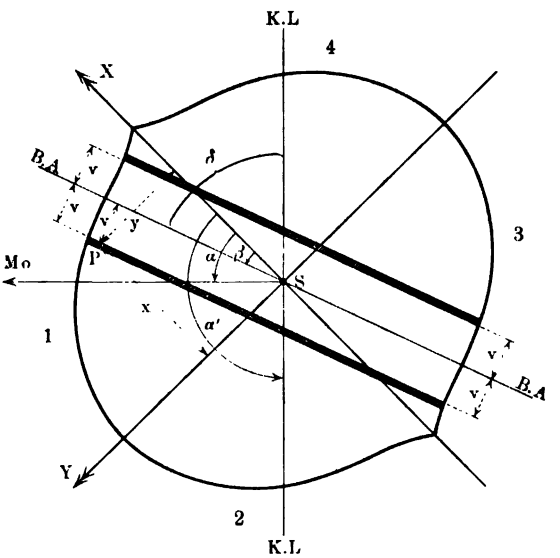


Fig. 780 a.



nung in Fig. 779 und für eine Ebene im ursprünglichen Balken durch S_1 und S_2, welche auf der Ebene jener beiden Strecken senkrecht steht, sowie für Parallelebenen in gleichen Abständen zu den beiden, zuletzt angeführten Ebenen. Das System der, hiermit für den betrachteten Teil des Balkens abgeteilten Fasern hat die Eigenschaft, daß alle Fasern einer Schicht, die im Abstande v von dem Cylinder durch $P'PP''$ der Fig. 779 verläuft, unter sich gleiche Länge haben und daß ein Gleiches für dieselben Fasern vor der Biegung gilt. Demgemäß bleibt auch die auf S. 894 entwickelte Gleichung Nr. 303) bestehen.

Nennt man also die Parallele durch S_1 oder durch S_2 zu der Geraden durch M in Fig. 779 wieder die Biegungsachse des betreffenden Querschnittes, so gilt für die Dehnung ε_v einer Faserschicht, die den Querschnitt im Abstande v von der Biegungsachse durchsetzt (vergl. Fig. 780 a), wieder die Gleichung

$$\varepsilon_v = \varepsilon_0 + \frac{v}{\varrho},$$

in der ϱ wiederum den Krümmungshalbmesser der Biegungslinie für die Stelle bezeichnet, an welcher der betrachtete Querschnitt liegt.

Gilt das Hookesche Gesetz, so hat man ferner auch für die entsprechenden Spannungen

$$\sigma_v = \sigma_0 + \frac{E \cdot v}{\varrho}.$$

Da äußere Kräfte der Voraussetzung gemäß senkrecht zum Querschnitte nicht wirken, so ergiebt sich auch hier wieder $\varepsilon_0 = 0$ bezw. $\sigma_0 = 0$ und

$$\sigma_v = \frac{E \cdot v}{\varrho},$$

d. h. auch hier ist die Biegungsachse eine neutrale Achse oder Nulllinie.

Natürlich erhält auch hier das Moment der inneren Kräfte für die Biegungsachse als Drehungsachse, wenn das Trägheitsmoment des Querschnittes für diese durch Tr bezeichnet wird, den Wert $\mathrm{Tr} \cdot \frac{E}{\varrho}$, aber dieser Wert ist hier nicht zugleich der Wert des Momentes der äußeren Kräfte, da dessen Ebene nicht senkrecht zur Biegungsachse steht.

Führt man die Hauptachsen des Querschnittes SX und SY ein (vergl. Fig. 780 a), so sind die Momente der inneren Kräfte für SX und für SY bezw.

$$+M_x = \Sigma\varphi \cdot \sigma_v \cdot y = \frac{E}{\varrho}\Sigma\varphi \cdot v \cdot y \quad \text{und} \quad +M_y = \Sigma\varphi \cdot \sigma_v \cdot x = \frac{E}{\varrho}\Sigma\varphi \cdot v \cdot x,$$

falls man ein Element der Querschnittsfläche durch φ bezeichnet.

Bildet die Biegungsachse mit SX den Winkel β, so gilt (vergl. Fig. 780 a) für einen Punkt $P = (x; y)$ des Querschnitts, der von der Biegungsachse den Abstand v hat, die Beziehung

$$v = -x \sin\beta + y \cos\beta.$$

Die beiden Momente erhalten also die Gestalt

$$+M_x = \frac{E}{\varrho}\Sigma\varphi(-x\sin\beta + y\cos\beta)y = -\frac{E}{\varrho}\sin\beta\,\Sigma\varphi xy + \frac{E}{\varrho}\cos\beta\,\Sigma\varphi y^2$$

und

$$+M_y = \frac{E}{\varrho}\Sigma\varphi(-x\sin\beta + y\cos\beta)x = -\frac{E}{\varrho}\sin\beta\,\Sigma\varphi x^2 + \frac{E}{\varrho}\cos\beta\,\Sigma\varphi xy.$$

Da die auftretenden Summen bezw. Trägheitsmomente und Deviationsmoment des Querschnittes für das Kreuz der Hauptachsen darstellen und da letzteres den Wert Null hat, so haben die Momente die Werte

$$+M_x = \mathrm{Tr}_x \cdot \frac{E}{\varrho} \cdot \cos\beta \quad \text{und} \quad +M_y = -\mathrm{Tr}_y \cdot \frac{E}{\varrho} \cdot \sin\beta.$$

Bildet das Moment $[Mo]$ der äußeren Kräfte, als Vektor dargestellt, mit der X-Achse den Winkel α, so hat dieser Vektor für die X-Achse eine Komponente vom Werte $Mo \cdot \cos\alpha$ und für die Y-Achse eine Komponente vom Werte $Mo \cdot \sin\alpha$.

Für das Gleichgewicht der inneren und der äußeren Kraft ist also hier erforderlich

$$\pm \mathfrak{T}r_x \cdot \frac{E}{\varrho} \cos\beta = Mo \,.\, \cos\alpha \quad \text{und} \quad \mp \mathfrak{T}r_y \cdot \frac{E}{\varrho} \cdot \sin\beta = Mo \,.\, \sin\alpha.$$

Um die Vorzeichen der Momente zu bestimmen, stellen wir folgende Betrachtung an. In Fig. 780a bildet $[Mo]$ als Vektor mit der X-Achse den spitzen Winkel α und demnach sucht $[Mo \,.\, \cos\alpha]$ die Punkte der Felder 3 und 4 zu heben und die Punkte der Felder 1 und 2 zu senken gegen die Ebene der Zeichnung, während $[Mo \,.\, \sin\alpha]$ ebenso die Punkte der Felder 1 und 4 zu heben und die Punkte der Felder 2 und 3 zu senken sucht. Da die Felder 2 und 4 durch die beiden Komponenten von $[Mo]$ in gleichem Sinne beansprucht werden, so muß die Biegungsachse ($\varepsilon_0 = 0$) durch die Felder 1 und 3 gehen, wie es auch Fig. 780a darstellt. Versteht man also unter β, der Fig. 780 entsprechend, den Winkel, welchen die Biegungsachse im Sinne der Messung von α mit der X-Achse bildet, so sind α und β beide spitze Winkel.

Trägt man also $[Mo]$ als Vektor in den Querschnitt ein und wählt man dann auf dem Kreuze der Hauptachsen die positiven Richtungen so, daß der Winkel α von $[Mo]$ gegen die X-Achse ein spitzer Winkel ist, so kann auch β als spitzer Winkel gewählt werden, wie es in Fig. 780a der Fall ist.

Demgemäß gilt nun:

$$\mathfrak{T}r_x \cdot \frac{E}{\varrho} \cos\beta = Mo \cos\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}r_y \,.\, \frac{E}{\varrho} \sin\beta = Mo \sin\alpha.$$

Durch Division beider Gleichungen folgt

$$tng\,\beta = \frac{\mathfrak{T}r_x}{\mathfrak{T}r_y} \cdot tng\,\alpha$$

und ferner

$$\sin\beta = \frac{\mathfrak{T}r_x \,.\, \sin\alpha}{W} \quad \text{und} \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{T}r_y \,.\, \cos\alpha}{W}$$

für $W^2 = \mathfrak{T}r_x^2 \sin^2\alpha + \mathfrak{T}r_y^2 \cos^2\alpha$, so daß sich ergiebt

$$v = -x \sin\beta + y \cos\beta = \frac{-x\,\mathfrak{T}r_x \sin\alpha + y\,\mathfrak{T}r_y \cos\alpha}{W}.$$

Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen für die Momente folgt ferner

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E} \cdot \frac{W}{\mathfrak{T}r_x \mathfrak{T}r_y}.$$

Da $\sigma_v = \dfrac{E \,.\, v}{\varrho}$ ist, so hat man also

$$\sigma_v = v \,.\, Mo \cdot \frac{W}{\mathfrak{T}r_x \mathfrak{T}r_y} = Mo\left(-\frac{x \sin\alpha}{\mathfrak{T}r_y} + \frac{y \cos\alpha}{\mathfrak{T}r_x}\right).$$

Damit ist für jeden Punkt $P = (x; y)$ des Querschnittes die Spannung σ_v dargestellt, wobei v den Abstand des gewählten Punktes von der Biegungsachse bezeichnet.

Soll σ_v auch durch sein Vorzeichen den Unterschied von Zug und Druck bestimmen, so muß festgesetzt werden, ob der Querschnitt der Zeichnung einem

vor oder hinter der Ebene der Zeichnung gelegenen Balkenstücke angehören soll. Denkt man den vordern Teil des Balkens fortgeschnitten, so daß $[Mo]$ dessen Einwirkung darstellt, so überwiegen oberhalb der Horizontalen die Zugwirkungen und unterhalb derselben die Druckwirkungen. Da x im Felde 2 negativ ist, so hat σ_v für dieses Feld positive Werte, während die Fasern gedrückt werden. Soll ein negativer Wert von σ_v Druckspannungen entsprechen, wie üblich, so muß also gesetzt werden

$$\sigma_v = -Mo\left(-\frac{x\sin\alpha}{\mathfrak{Tr}_y} + \frac{y\cos\alpha}{\mathfrak{Tr}_x}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 401\,a)$$

Führt man statt des Vektors, der $[Mo]$ darstellt, die Ebene des Momentes ein, so bildet diese mit der X-Achse den Winkel $\alpha' = 90^0 + \alpha$, so daß $\sin\alpha' = +\cos\alpha$ und $\cos\alpha' = -\sin\alpha$ ist. Man hat dann für α' und β die Beziehung

$$tng\,\alpha' \,.\, tng\,\beta = -\frac{\mathfrak{Tr}_x}{\mathfrak{Tr}_y}.$$

Da die Centralellipse die Gleichung $x^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_x + y^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_y = C^2$ hat, so bestimmen α' und β konjugierte Richtungen der Centralellipse.

Bezeichnet man die Spur der Ebenen des Momentes als **Kraftlinie** und die Biegungsachse als **Nulllinie**, so liegen also Kraftlinie und Nullinie stets in konjugierten Richtungen der Centralellipse.

Ersetzt man auch in σ_v den Winkel α durch α', so ist

$$\sigma_v = -Mo\left(+\frac{x\cos\alpha'}{\mathfrak{Tr}_y} + \frac{y\sin\alpha'}{\mathfrak{Tr}_x}\right).$$

Aus den Ausdrücken für σ_v geht hervor, daß man den Fall der schiefen Belastung auffassen darf als die **Verbindung zweier Fälle von gerader Belastung.**

Berechnet man nämlich nach der Formel des Normalfalles $Mo = \sigma_v \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{v}$ die Spannungen σ_v für die beiden Fälle, die sich ergeben, wenn man statt $[Mo]$ einmal die Komponente $[Mo \,.\, \cos\alpha]$ und einmal die Komponente $[Mo \,.\, \sin\alpha]$ einführt, so erhält man für diese Spannungen

$$\frac{Mo \,.\, \cos\alpha \,.\, y}{\mathfrak{Tr}_x} \quad \text{und} \quad \frac{Mo \,.\, \sin\alpha \,.\, x}{\mathfrak{Tr}_y}.$$

Vereinigt man diese Spannungen für einen Punkt $P = (x;\, y)$ unter Berücksichtigung der Vorzeichen, so erhält man dasselbe Ergebnis wie oben.

Man kann die Formel für σ_v auch gewinnen, wenn man voraussetzt, daß σ_v auch hier für jeden Punkt $P = (x;\, y)$ eine Funktion ersten Grades seiner Koordinaten x und y ist.

Um das **Maximum von σ_v** zu bestimmen, hat man zu beachten, daß die Spannungen proportional zum Abstande von der Biegungsachse wachsen, so daß die Tangenten des Querschnittsumfanges, welche der Biegungsachse parallel sind, die Punkte größter Spannung bestimmen.

Eine weitere Überlegung zeigt noch, daß man die Formel für σ_v mit

der entsprechenden Formel für den Normalfall in eine wirkliche Übereinstimmung bringen kann, indem man den Faktor $\frac{W}{\mathfrak{Tr}_x \mathfrak{Tr}_y}$ näher untersucht.

Die Ausdrücke für $\sin\beta$ und $\cos\beta$, als deren Nenner W aufgetreten ist, weisen auf das Trägheitsmoment für die Kraftlinie als Achse hin, welches als $\mathfrak{Tr}_K$ bezeichnet werden mag. Man hat

$$\begin{aligned}\mathfrak{Tr}_K &= \mathfrak{Tr}_x \,.\, \cos^2(90^0 + \alpha) + \mathfrak{Tr}_y \,.\, \sin^2(90^0 + \alpha)\\ &= \mathfrak{Tr}_x \,.\, \sin^2\alpha + \mathfrak{Tr}_y \cos^2\alpha = W(\sin\beta\sin\alpha + \cos\alpha\cos\beta)\\ &= W \,.\, \cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Bezeichnet man den Schnittwinkel zwischen Kraftlinie und Nullinie mit δ, so ist $\delta = 90^0 - \alpha + \beta$ gemäß Fig. 780 a, und man hat also

$$\mathfrak{Tr}_K = W \,.\, \sin\delta \quad \text{oder} \quad W = \frac{\mathfrak{Tr}_K}{\sin\delta},$$

so daß nun

$$\sigma_v = v \,.\, Mo \cdot \frac{\mathfrak{Tr}_K}{\mathfrak{Tr}_x \mathfrak{Tr}_y} \cdot \frac{1}{\sin\delta}$$

wird.

Da Kraftlinie und Nulllinie konjugierte Achsen der Trägheitsellipse sind, so läßt sich $\mathfrak{Tr}_K$ leicht auf das Trägheitsmoment für die Nulllinie, welches $\mathfrak{Tr}_N$ heißen mag, zurückführen. Für konjugierte Halbachsen a' und b' einer Ellipse, welche den Winkel δ bilden, gilt bekanntlich die Gleichung

$$a'b'\sin\delta = ab,$$

wenn a und b die halben Hauptachsen sind.

Für Kraftlinie und Nulllinie ist $a' = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_N}}$ und $b' = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_K}}$ zu setzen, so daß also hier

$$\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_K}} \cdot \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_N}} \sin\delta = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_x}} \cdot \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_y}}$$

oder

$$\mathfrak{Tr}_K \,.\, \mathfrak{Tr}_N = \mathfrak{Tr}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_y \,.\, \sin^2\delta$$

gilt.

Demnach hat man schließlich

$$\sigma_v = \frac{Mo \,.\, v}{\mathfrak{Tr}_N} \cdot \sin\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 401\,\text{b})$$

und diese Formel entspricht durchaus der Spannungsformel für gerade Belastung, bei welcher $\delta = 90^0$ und also $\sin\delta = 1$ ist.

Würde man gemäß Fig. 780 b (a. f. S.) statt der senkrechten Abstände v von der Biegungsachse die schiefen, in der konjugierten Richtung der Kraftlinie liegenden Abstände $v' = \frac{v}{\sin\delta}$ einführen und demgemäß auch statt $\mathfrak{Tr}_N = \Sigma v^2\varphi$ eine Größe $\mathfrak{Tr}'_N = \Sigma(v')^2\varphi$ einführen, so wäre

$$\frac{v'}{\mathfrak{Tr}'_N} = \frac{v \,.\, \sin\delta}{\mathfrak{Tr}_N}$$

und man hätte

$$\sigma_v = \frac{Mo \,.\, v'}{\mathfrak{Tr}'_N} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 402)$$

Diese Gleichung Nr. 402) entspricht genau der Festigkeitsgleichung für gerade Belastung.

Fig. 780 b.

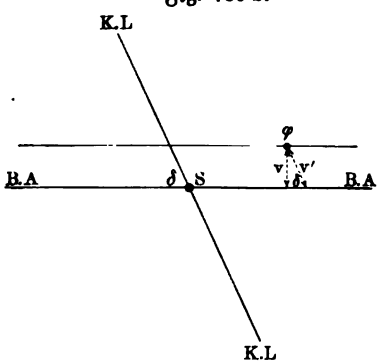
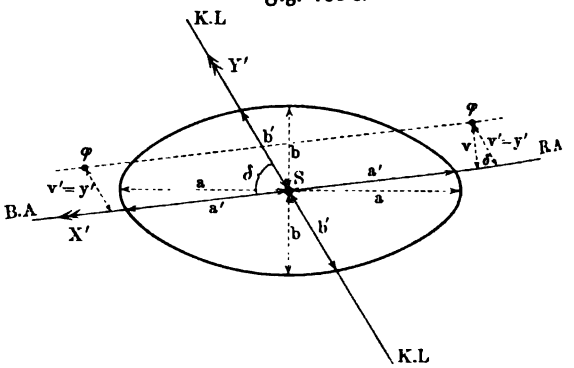


Fig. 780 c.



Führt man für die Trägheitsellipse ein schiefes Kreuz ein und zwar die konjugierten Achsen, welche durch Kraftlinie und Nullinie bestimmt werden, so ist deren Gleichung gemäß Fig. 780 c

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1,$$

wobei $a' = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_N}}$ und $b' = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_K}}$ und $v' = y'$ ist.

Wählt man im besondern die Culmannsche Ellipse (vergl. S. 660) als Trägheitsellipse, für welche $C^2 = \frac{\mathfrak{Tr}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_y}{f}$ ist, falls f die Fläche des Querschnittes bezeichnet, so ist gemäß Gleichung $\mathfrak{Tr}_K \,.\, \mathfrak{Tr}_N = \mathfrak{Tr}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_y \sin^2\delta$ auch

$$C^2 = \frac{\mathfrak{Tr}_K \,.\, \mathfrak{Tr}_N}{f \,.\, \sin^2\delta}$$

und ebenso

$$f \,.\, (a')^2 = \frac{\mathfrak{Tr}_K}{\sin^2\delta} \quad \text{und} \quad f \,.\, (b')^2 = \frac{\mathfrak{Tr}_N}{\sin^2\delta}$$

Da $\mathfrak{Tr}'_N = \frac{\mathfrak{Tr}_N}{\sin^2\delta}$ ist, so ist $\mathfrak{Tr}'_N = f(b')^2$ und also auch

$$\sigma_v = \frac{Mo \,.\, v'}{f(b')^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 403)$$

wobei b' den Halbmesser der Culmannschen Trägheitsellipse für die Richtung der Kraftlinie bezeichnet.

Aus dem Ausdrucke für ϱ ist wieder die Gleichung der Biegungslinie abzuleiten. Läßt man dieselbe Annäherung zu wie im Normalfalle, so ergiebt sich leicht, daß der Fall der schiefen Belastung auch in dieser Hinsicht als Verbindung zweier Normalfälle angesehen werden darf, für welche $[Mo \,.\, \cos\alpha]$ und $[Mo \,.\, \sin\alpha]$ die Momente der äußeren Kräfte

bezw. für die Ebene YZ und für die Ebene XZ als Belastungsebenen sind; die Biegungslinie für die beiden Normalfälle, in welche der Fall der schiefen Belastung zerlegt erscheint, sind die Projektionen der gesuchten Biegungslinie für die Ebenen YZ und XZ, aus denen diese selbst leicht hergestellt werden kann.

Der Fall der schiefen Belastung geht für $\alpha = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0$ in den Normalfall über, wie auch aus der Rechnung zu ersehen, da z. B. für $\alpha = 0^0$ auch $\beta = 0^0$ ist u. s. w.

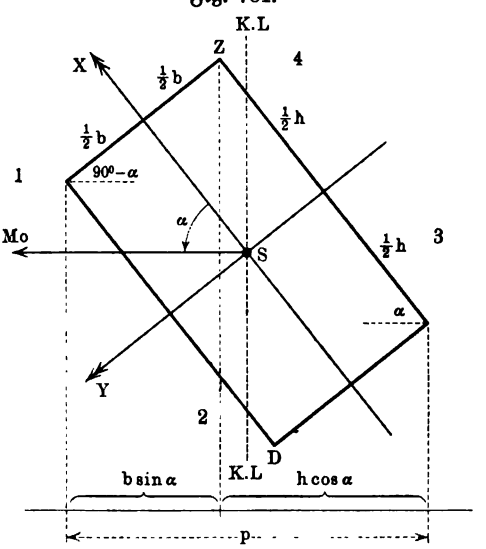
Außerdem tritt das noch ein, falls $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ denselben Wert $\mathfrak{Tr}$ haben; es ist dann $W = \mathfrak{Tr}$ und

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E.\mathfrak{Tr}} \quad \text{und} \quad \sigma_v = v \cdot \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}.$$

Damit stimmt überein, daß in diesem Falle die Centralellipse ein Kreis ist, also alle Achsen durch S die Rolle von Hauptachsen spielen. Dies tritt ein für den Kreis als Querschnitt bezw. auch für beliebige regelmäßige Vielecke als Querschnitte.

Zu bemerken ist noch, daß ein beliebiges System von äußeren Kräften, welche die Achse des Balkens senkrecht schneiden, auch für jeden Querschnitt ein Moment $[Mo]$ und eine $[V]$ entsprechende Kraft liefern, wie im Falle der schiefen Belastung, wobei aber α und damit β nicht für alle Querschnitte denselben Wert behalten; der Ausdruck für σ_v bleibt daher auch in diesem Falle verwendbar.

Fig. 781.



Als Beispiel für eine schiefe Belastung behandeln wir den wagerechten Balken von rechteckigem Querschnitt mit schief gelagerten Hauptachsen bei einer vertikalen Belastungsebene, wie es Fig. 781 andeutet. Wir denken uns den Balken hinter der Ebene der Zeichnung ungestört verlaufend, während der Teil vor der Ebene der Zeichnung durch einen Schnitt beseitigt ist, wofür das Moment $[Mo]$ eintritt.

Hier ist $\mathfrak{Tr}_x = \frac{b^3 h}{12}$ und $\mathfrak{Tr}_y = \frac{b h^3}{12}$ und demnach gemäß Gleichung 401 a)

$$\sigma_v = -12\, Mo \left(-\frac{x \,.\, \sin\alpha}{b h^3} + \frac{y \,.\, \cos\alpha}{b^3 h} \right).$$

Für das zweite Feld ist x negativ und y positiv, so daß in ihm σ_v ein negatives Maximum, Druck entsprechend, hat; für das vierte Feld ist x positiv

und y negativ, so daß in ihm σ_v ein positives Maximum, Zug entsprechend, hat. Da die Werte von x und y bezw. in den Grenzen $0 \cdots \frac{h}{2}$ und $0 \cdots \frac{b}{2}$ liegen und da die Punkte $P = \left(\pm\frac{b}{2}; \pm\frac{h}{2}\right)$ Punkte des Querschnittes sind, so ist

$$\sigma_{max} = \pm 6\,Mo\left(\frac{\sin\alpha}{bh^2} + \frac{\cos\alpha}{b^2h}\right)$$
$$= \pm\frac{6\,Mo}{b^2h^2}(b\sin\alpha + h\cos\alpha).$$

Dasselbe zeigen die Tangenten, parallel zur Biegungsachse.

Da die Horizontalprojektion p des Balkens den Wert $b\sin\alpha + h\cos\alpha$ hat, so ist auch

$$\sigma_{max} = \pm\frac{6\,Mo\,.\,p}{b^2h^2}.$$

Das Maximum des Zuges ist (oben) in der Ecke Z, das Maximum des Druckes ist (unten) in der Ecke D vorhanden.

Fig. 782.

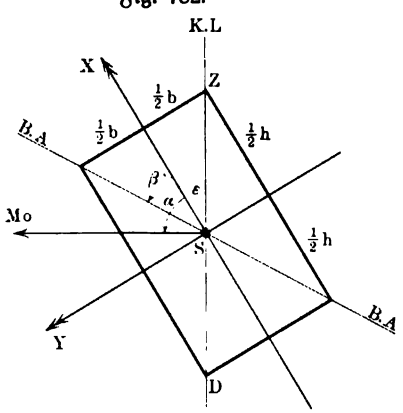
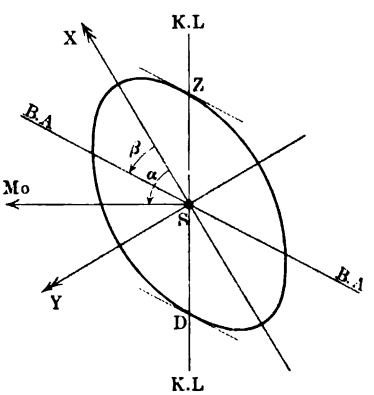


Fig. 783.



Zerlegt man den Fall in zwei Normalfälle, so dreht $[Mo\,.\,\cos\alpha]$ um die X-Achse und liefert $\sigma^{(1)} = \frac{12\,Mo\cos\alpha}{b^3h}\cdot y$, während $[Mo\,.\,\sin\alpha]$ um die Y-Achse dreht und $\sigma^{(2)} = \frac{12\,Mo\sin\alpha}{bh^3}\cdot x$ liefert; der oben bestimmte Wert σ_v ist bestimmt als $-\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$.

Dreht man den Balken um seine Achse bei unveränderter Lage von $[Mo]$, so ist für $\alpha = 0$ die X-Achse horizontal, d. h. es tritt ein Normalfall ein, für den $Mo = \sigma\cdot\frac{b^2h}{6}$ oder $\sigma = \frac{6\,Mo}{b^2h}$ ist; dasselbe folgt aus dem oben bestimmten Werte von σ_{max} für $\alpha = 0$. Entsprechendes gilt für $\alpha = 90°$.

Für die Lage der Biegungsachse gilt

$$tng\,\beta = \frac{\mathfrak{Tr}_x}{\mathfrak{Tr}_y} \cdot tng\,\alpha = \frac{b^2}{h^2} \cdot tng\,\alpha.$$

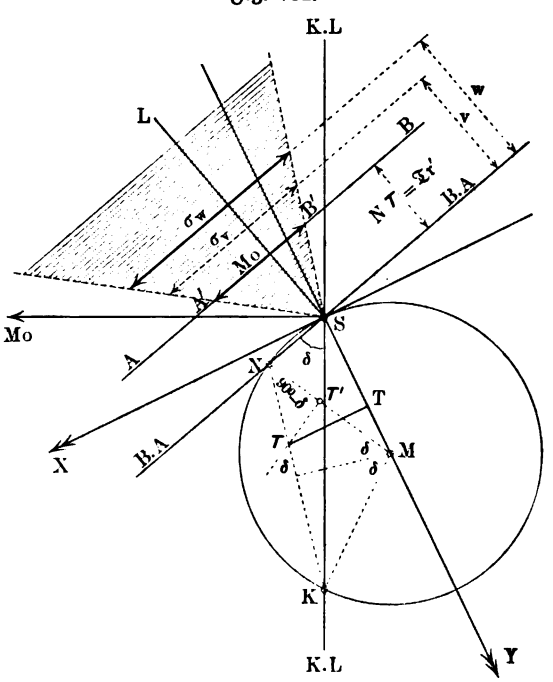
Steht die Diagonale ZD senkrecht, so ist (vergl. Fig. 782) $tng\,\alpha = cot\,\varepsilon = \frac{h}{b}$ und also $tng\,\beta = \frac{b}{h}$, d. h. in diesem Falle ist die andere Diagonale die Biegungsachse des Querschnittes; dies folgt auch aus den Eigenschaften der konjugierten Durchmesser der entsprechenden Centralellipse.

Für die Ellipse der Fig. 783 ergiebt sich ebenso $\mathfrak{Tr}_x = \frac{1}{4} a b^3 \pi$ und $\mathfrak{Tr}_y = \frac{1}{4} a^3 b \pi$ und demnach

$$\sigma_v = -\frac{4\,Mo}{ab\pi}\left(-\frac{x\,sin\,\alpha}{a^2} + \frac{y\,cos\,\alpha}{b^2}\right).$$

Um das Maximum für σ_v zu finden, bedenken wir, daß die Tangenten des Querschnittes, welche der Biegungsachse parallel sind, die entsprechenden Stellen bestimmen. Da die Spur der Belastungsebene und die Biegungsachse einander in der Centralellipse konjugiert sind, und da diese Ellipse der gegebenen Ellipse ähnlich ist, so sind die Schnittpunkte D und Z der gegebenen Ellipse und der Belastungsebene die gesuchten Punkte; Tangenten in ihnen geben zugleich die Richtung der Biegungsachse. Da die Kraftlinie die X-Achse unter dem Winkel $90^0 + \alpha$ schneidet, so ist ihre Gleichung $y = x \,.\, tng\,(90^0 + \alpha) = -x \,.\, cot\,\alpha$, und demnach

Fig. 784.



sind die Koordinaten für D und Z gegeben durch $x = \pm\frac{ab\,sin\,\alpha}{W}$ und $y = \mp\frac{ab\,cos\,\alpha}{W}$ für $W^2 = b^2 sin^2\alpha + a^2 cos^2\alpha$. Man hat also

$$\sigma_{max} = \pm\frac{4\,Mo}{a^2 b^2 \pi}(b^2 sin^2\alpha + a^2 cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Um die Beziehungen zwischen Kraftlinie und Nulllinie graphisch darzustellen, geht man zurück auf Gleichung Nr. 401 b).

Da sich die Größe $\frac{\mathfrak{Tr}_N}{\sin\delta} = \mathfrak{Tr}'_N \,.\, \sin\delta$, welche durch $\mathfrak{Tr}'$ bezeichnet werden mag, leicht mit Hülfe des Landschen Trägheitskreises (vergl. S. 916 f.) darstellen läßt, so ist es zweckmäßig, diesen einzuführen. Ist SK in Fig. 784 (a. v. S.) die Kraftlinie, so liefert KT den Punkt N, welcher die zugehörige Nulllinie SN giebt. Aus Fig. 784 folgt ferner $\mathfrak{Tr}_N = NT' = NT \,.\, \sin\delta$, so daß also $NT = \mathfrak{Tr}'$ ist. Um nun die Gleichung

$$\sigma_v = \frac{Mo \,.\, v}{\mathfrak{Tr}_N} \sin\delta = \frac{Mo \,.\, v}{\mathfrak{Tr}'}$$

zeichnerisch darzustellen, zieht man $AB // SN$ im Abstande $\mathfrak{Tr}' = NT$ und macht ferner auf AB an beliebiger Stelle $A'B' = Mo$; die Parallele zu SN im Abstande v von SN stellt dann innerhalb des Flächenraumes $A'SB'$ die Spannung σ_v dar, da

$$\sigma_v : v = Mo : \mathfrak{Tr}'$$

ist.

Für $w = v_{max}$ findet man das Maximum der Spannung σ_w.

Errichtet man in S zu SN das Lot SL, so kann man sich das Spannungsdiagramm um SL um 90^0 unter oder über die Ebene der Zeichnung gedreht denken, um die wirkliche Lage der Spannungen im Raume zu erhalten, wozu man noch die Spannungen parallel mit sich so zu verschieben hat, daß sie alle von SL ausgehen.

Die Einheit der Spannung folgt aus den Einheiten für v, Mo und $\mathfrak{Tr}'$; bedeutet z. B. 1 cm der Zeichnung für v, Mo und $\mathfrak{Tr}'$ bezw. 1 cm, 50 mkg $= 5000$ cmkg und 100 $\overline{\text{cm}}^4$, so bedeutet 1 cm für σ_v

$$\frac{5000 \,.\, 1}{100} = 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Um den Einfluß einer Drehung der Kraftlinie um S beurteilen zu können, hat Land eine Fläche eingeführt, die er „Polare Widerstandsfläche“ nennt. Da die Größe $W' = \frac{\mathfrak{Tr}'}{w} = \frac{\mathfrak{Tr}_N}{w \sin\delta}$ für den Fall der schiefen Belastung dieselbe Rolle spielt wie die Größe $\frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ für den Fall der geraden Belastung, so kann man W' als die Querschnittszahl (Widerstandsmoment) für die Achse SN bezeichnen; Land nennt sie die „Widerstandsgröße“ für SN als Nulllinie (Biegungsachse). Die polare Widerstandsfläche entsteht nur, indem man auf jeder Kraftlinie durch S die beiden Werte $W'_1 = \frac{\mathfrak{Tr}'}{w_1}$ und $W'_2 = \frac{\mathfrak{Tr}'}{w_2}$ der zugehörigen Nulllinie von S als Pol aus nach beiden Seiten hin abträgt und zwar so, daß W'_1 auf die Seite von w_2 und W'_2 auf die Seite von w_1 kommt; für den Sonderfall $w_1 = w_2$ wird die Widerstandsfläche zentrisch in Bezug auf S, so daß man nur eine, durch irgend einen Strahl SH bestimmte Hälfte davon zu entwerfen braucht. Bestimmt man in dieser Fläche den größten Abstand der Randpunkte vom Pole S, so fällt dieser in die Kraftlinie, für deren Nulllinie das thatsächlich auftretende

Maximum der Spannung $\sigma_w = \frac{Mo}{W'}$ seinen kleinsten Wert hat, d. h. in die günstigste Kraftlinie; ebenso bestimmt der kleinste Abstand die ungünstigste Kraftlinie.

Da die Widerstandsfläche auf jeder Hauptachse (als Kraftlinie) das Widerstandsmoment für die andere Hauptachse (als zugehöriger Nullinie) abschneidet, weil zu einer Hauptachse als Kraftlinie die andere Hauptachse als Nullinie ($\delta = 90^0$) gehört, so kann man durch Auftragen der Widerstandsmomente für die Hauptachsen stets vier Randpunkte der Widerstandsfläche gewinnen, durch welche oft auch ein Teil ihrer Begrenzung gegeben ist.

Auf die zeichnerische Darstellung der Widerstandsfläche, welche mit verhältnismäßig einfachen Mitteln ausgeführt werden kann, kommen wir in § 190 gelegentlich der Bestimmung des Kernes eines Querschnittes zurück.

Ist ein Träger durch seine Befestigung gezwungen, sich nach einer bestimmten Richtung durchzubiegen, so ist damit die Biegungsebene und ebenso auch die Nullinie und damit $\mathfrak{Tr}' = NT$ gegeben, während außerdem Kraftlinie und Nullinie konjugiert sind.

Für rechteckige Querschnitte oder solche, deren Umhüllung ein Rechteck ist, wie z. B. die Profile von der Form I oder [, gilt

$$\sigma_{max} = \frac{Mo_1}{\frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1}} + \frac{Mo_2}{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{w_2}},$$

falls Mo_1 und $\mathfrak{Tr}_1$ und w_1 auf die eine und Mo_2 und $\mathfrak{Tr}_2$ und w_2 auf die andere Hauptachse bezogen sind und falls dabei w_1 und w_2 bezw. die größten Entfernungen von Randpunkten und den Achsen darstellen.

Um nach dieser Formel aus der Tabelle der Normalprofile für $\sigma_{max} = k$ rasch ein zulässiges Profil zu bestimmen, setzt man $\frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1} : \frac{\mathfrak{Tr}_2}{w_2} = u$, so daß sich

$$\frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1} = (Mo_1 + u\, Mo_2) \cdot \frac{1}{k}$$

ergiebt. Man führt nun bei I-Profilen den Mittelwert $u = 9$ und bei [-Profilen den Mittelwert $u = 7$ ein, berechnet damit $\frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1}$ und sucht das entsprechende Normalprofil auf, setzt nun die zu ihm gehörige Größe u in die Formel und berechnet von neuem $\frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1}$ und sucht wiederum das entsprechende Normalprofil auf u. s. f., bis ein solches Profil gefunden ist, welches den Bedingungen genügt.

164. Die Formänderungsarbeit für Biegung und die Biegungsschwingungen. Wird ein Freiträger (vergl. Fig. 11) am Ende durch $[P]$ belastet, so hat die Arbeit der äußeren Kräfte für eine schließliche Durchbiegung λ am freien Ende den Wert $P\lambda$. Von dieser Arbeit wird wieder (vergl. S. 865) bei Gültigkeit des Gesetzes von Hooke die Hälfte auf Formänderung ver-

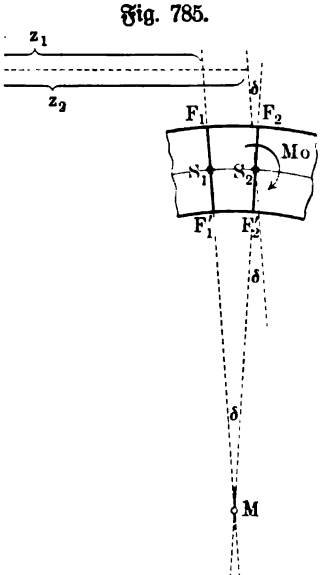
wandt, während die andere Hälfte ursprünglich Schwingungen hervorruft, deren Mittelpunkte auf der schließlichen Biegungsachse des Stabes liegen.

Da für den prismatischen Freiträger bei Endbelastung $\lambda = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$ ist, so ist die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ hier gegeben als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} P\lambda = \tfrac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{E\mathfrak{T}r}.$$

Um die Formänderungsarbeit hier wirklich zu bestimmen, betrachten wir zwei benachbarte Querschnitte 1 und 2, welche vor der Biegung parallel waren, nach dieser gemäß Fig. 785. Die Arbeit des Momentes der äußeren Kräfte $[Mo]$ besteht darin, den einen Querschnitt, relativ zu dem anderen, um δ zu drehen, und beträgt daher $Mo \,.\, arc\,\delta$, oder da $\varrho \,.\, arc\,\delta = S_1 S_2$ und $\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$ ist, auch

Fig. 785.



$$\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}r} \cdot S_1 S_2.$$

Da der Wert des $[Mo]$ entsprechenden Momentes der inneren Kräfte gleichmäßig von 0 bis Mo wächst, so ist die gesuchte Formänderungsarbeit für das Element $S_1 S_2$ gegeben als

$$\tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}r} \cdot S_1 S_2.$$

Um die Formänderungsarbeit für ein endliches Stück der Achse zu berechnen, hat man die Arbeiten für die einzelnen Elemente des betrachteten Stückes zu summieren. Statt dessen kann man auch folgendermaßen verfahren. Da Mo und $\mathfrak{T}r$ für jede Stelle der Achse gegeben sind, d. h. also als Funktionen von z erscheinen, so kann man sich auch die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ für ein endliches Stück der Achse von 0 bis z als $F(z)$ gegeben denken, wobei $\mathfrak{A} = 0$ ist für $z = 0$.

Die Arbeit für ein Element des Balkens, wie es Fig. 785 darstellt, ist dann gegeben als $F(z_2) - F(z_1)$, so daß demnach

$$F(z_2) - F(z_1) = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}r} \cdot S_1 S_2$$

ist. Da innerhalb der gewählten Annäherung $S_1 S_2$ durch seine wagerechte Projektion ersetzt werden darf, so ist $S_1 S_2 \sim z_2 - z_1$, d. h. man hat

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}r},$$

oder, da die linke Seite an der Grenze die Ableitung von $F(z)$ für die betrachtete Stelle darstellt,

$$F'(z) = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \text{ für } \mathfrak{A} = F(z) \ldots\ldots 404)$$

Für den Freiträger der Fig. 673a ist $Mo = Pz$ und also

$$F'(z) = \tfrac{1}{2}\frac{P^2z^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Ist der Träger prismatisch ($\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ ist konstant), so hat man also hier

$$\mathfrak{A} = F(z) = \tfrac{1}{6}\frac{P^2z^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} + C,$$

wobei $C = 0$ ist, da $\mathfrak{A} = 0$ ist für $z = 0$. Für eine Länge l ist demnach

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\frac{P^2l^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}},$$

d. h. man erhält wieder den oben schon erschlossenen Ausdruck, so daß man aus diesem nun die Enddurchbiegung wiedergewinnen kann.

Man kann natürlich auch zu Gleichung Nr. 404) gelangen, wenn man den der Biegung entsprechenden Zug und Druck einführt. Nach S. 867 ist die Formänderungsarbeit für die Einheit des Volumens bei Zug und Druck gegeben durch $\frac{\sigma^2}{2E}$, so daß sie für ein Faserstück von der Länge S_1S_2 und dem Querschnitt φ den Wert $\frac{\sigma^2}{2E} \cdot \varphi \,.\, S_1S_2$ annimmt; da σ für eine Faser, welche den Abstand y von der neutralen Schicht hat, als $\frac{Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot y$ bestimmt ist, so ist die Arbeit für dieses Faserstück $\frac{1}{2E} \cdot \frac{Mo^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}^2} \cdot y^2 \,.\, \varphi \,.\, S_1S_2$. Für alle Fasern, welche einen Querschnitt F_1F_1' durchsetzen, beträgt die entsprechende Arbeit demnach

$$\frac{1}{2E} \cdot \frac{Mo^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}^2} \cdot S_1S_2 \,.\, \Sigma y^2\varphi,$$

oder, da $\Sigma y^2\varphi = \mathfrak{T}\mathfrak{r}$ ist, hat man wie oben,

$$\frac{1}{2E} \cdot \frac{Mo^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot S_1S_2$$

als Ausdruck für die Formänderungsarbeit der Platte zwischen F_1F_1' und F_2F_2'.

Um diese Arbeit wieder zu dem Volumen v des betrachteten Stückes in Beziehung zu setzen, führen wir $v = f \,.\, S_1S_2$ ein, wobei f den Querschnitt F_1F_1' oder F_2F_2' bedeutet. Man hat dann

$$\frac{1}{2E} \cdot \frac{Mo^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot S_1S_2 = \frac{1}{2E} \cdot \frac{Mo^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \frac{v}{f},$$

wofür sich auch, da $Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w}$ ist, ergiebt

$$\frac{\sigma_w^2}{2E} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w^2 \,.\, f} \cdot v = \tfrac{1}{2}\mu\frac{\sigma_w^2}{E} \cdot v \ldots\ldots 405)$$

Während σ_w die Spannung in der äußersten Faser für die betrachtete Stelle bezeichnet, hängt μ nur von den Abmessungen des Querschnittes an der betrachteten Stelle ab.

Für das Rechteck als Querschnitt ist $\mathfrak{T}r = \frac{bh^3}{12}$, $f = bh$ und $w = \frac{1}{2}h$, so daß hier $\mu = \frac{1}{3}$ ist.

Für den Kreis als Querschnitt ist ebenso $\mu = \frac{1}{4}$, für den Kreisring von den Radien r_1 und r_2 ist $\mu = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)$.

Für Formen gleicher Spannung ist $\sigma_w = Mo : \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ eine Konstante, deren Wert bei Ausnutzung des Materiales k beträgt, so daß hier die Formänderungsarbeit für ein Element durch

$$\tfrac{1}{2}\mu \cdot \frac{k^2}{E} \cdot v$$

gegeben ist, wobei μ von Element zu Element veränderlich sein kann.

Da μ für das Rechteck und für den Kreis bezw. die konstanten Werte $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ hat, während μ für den Kreisring von dem Verhältnisse $r_1 : r_2$ abhängig ist, so ist für die geläufigen Formen gleicher Spannung (vergl. § 154) die elementare Formänderungsarbeit dem Volumen proportional; für diese gilt also auch bei einem endlichen Volumen V

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\mu \cdot \frac{k^2}{E} \cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 406)$$

falls Ausnutzung des Materiales ($\sigma_w = k$) vorliegt, d. h. diese Arbeit ist hier für den ganzen Träger unabhängig von der Art der Unterstützung und von der Art der Belastung.

Für prismatische Stäbe ergeben sich bei Belastung durch eine Kraft $[P]$ entsprechende Gleichungen wie für die Formen gleicher Spannung, nur sind diese abhängig von der Art der Unterstützung und von der Art der Belastung. So ist z. B. für den prismatischen Freiträger mit Endbelastung bei Ausnutzung des Materials $Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ und infolgedessen läßt sich die oben gewonnene Gleichung

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{E\,\mathfrak{T}r}$$

auch darstellen als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\mu \cdot \frac{k^2}{E} \cdot V,$$

woraus z. B. für rechteckige Stäbe ($\mu = \frac{1}{3}$) folgt $\mathfrak{A} = \frac{1}{18}\frac{k^2}{E} \cdot V$.

Für einen prismatischen Zweistützenträger, dessen Belastung $[P]$ seine Achse in die Abschnitte l_1 und l_2 teilt, ist ebenso

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\mu \cdot \frac{k^2}{E} \cdot V,$$

weil die beiden Teile dieses Trägers als Freiträger mit derselben größten

Spannung k angesehen werden dürfen. Zu demselben Ergebnisse führt die Annahme, daß $\mathfrak{A}$ die Hälfte der Arbeit ist, welche $[P]$ leistet; da die Durchbiegung unterhalb $[P]$ den Wert $\frac{1}{3}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}\frac{P}{E\mathfrak{T}r}$ hat, so ist hiernach

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}\frac{P^2}{E\mathfrak{T}r},$$

während die Festigkeitsgleichung $\frac{l_1 l_2}{l}P = k\cdot\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ lautet.

Für den entsprechenden beiderseits (wagerecht) eingespannten Träger ergiebt sich ebenso für $l_1 < l_2$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\mu\cdot\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{k^2}{E}\cdot V,$$

da die Durchbiegung unterhalb $[P]$ den Wert $\frac{1}{3}\frac{l_1^3 l_2^3}{l^3}\frac{P}{E\mathfrak{T}r}$ hat, während die Festigkeitsgleichung $D_1 = \frac{l_1 l_2^2}{l^2}P = k\cdot\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ lautet.

Während die eine Hälfte der Arbeit der äußeren Kräfte die Formänderung bewirkt, tritt die andere Hälfte (vergl. S. 869) auch hier in Schwingungen auf.

Bei einem prismatischen Freiträger mit Endbelastung $[P]$ führt eine Betrachtung, welche der auf S. 869 f. genau entspricht, für die Dauer T einer Doppelschwingung des belasteten Endes zu der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^3 P}{3 E\mathfrak{T}r\, g}}.$$

Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes G ist P angenähert durch $P + \frac{3}{8}G$ zu ersetzen, entsprechend der Durchbiegungsformel für $[P]$ und $[G]$.

Für die Schwingungen der Mitte eines prismatischen Zweistützenträgers bei Mittelbelastung $[P]$ gilt ebenso

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^3 P}{48 E\mathfrak{T}r\, g}}.$$

Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes G ist P wieder angenähert durch $P + \frac{5}{8}G$ zu ersetzen.

Vorstehende Betrachtungen lassen sich leicht auf Fälle ausdehnen, in denen neben der Arbeit des biegenden Momentes auch noch die Arbeit des Schubes zu berücksichtigen ist. Man hat dann die Betrachtung des § 162 mit den Ergebnissen des vorstehenden Paragraphen zu verbinden, wobei die Ausdrücke für die Arbeit des biegenden Momentes und für die Arbeit des Schubes einfach zu addieren sind, da einerseits die Schubkräfte bei der Drehung des Querschnittes gemäß Fig. 785 keine Arbeit leisten, während anderseits die Zugkräfte bezw. Druckkräfte bei der relativen Verschiebung der Querschnitte gleichfalls keine Arbeit leisten.

Die so gewonnene Formänderungsarbeit ist wieder die Hälfte der gesamten Arbeit der äußeren Kräfte, während die andere Hälfte in Schwingungen zu Tage tritt.

165. Die Sätze von Castigliano und von Maxwell. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit des biegenden Momentes ist gelegentlich ein wertvolles Hülfsmittel bei der Lösung von Aufgaben über belastete Träger.

Um die entsprechenden Beziehungen abzuleiten, welche man als die Sätze von Castigliano und von Maxwell zu bezeichnen pflegt, schicken wir folgende allgemeine Betrachtung voran.

Wenn ein System von äußeren Kräften $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ einen elastisch-festen Körper angreift, so unterliegt dieser Formänderungen, welche im allgemeinen auch eine Veränderung der Angriffspunkte von $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ nach sich ziehen. Sind die Komponenten dieser Veränderungen in den Richtungen der Kräfte, nachdem der neue Gleichgewichtszustand eingetreten ist, bezw. $u_1, u_2, \ldots u_n$, so ist

$$P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots P_n u_n$$

die Arbeit der äußeren Kräfte, welche dem Übergange von dem unbelasteten Zustande des Körpers in den neuen Gleichgewichtszustand entspricht.

Von dieser Arbeit ist ein bestimmter Teil auf die Formänderung des Körpers verwandt worden, während sich der Rest in den Bewegungen der Körperteilchen zeigte, welche durch Reibung u. s. w. schließlich zum Stillstande kommen.

In den bisher betrachteten Fällen trat dabei eine gleichmäßige Verteilung jener Arbeit ein, so daß die eine Hälfte der Arbeit der äußeren Kräfte der Formänderung entsprach, während deren andere Hälfte in den, der Beobachtung zugänglichen Schwingungen zu Tage trat. Es war dies bedingt durch die Geltung des Hookeschen Gesetzes, wonach bei den inneren Kräften die Normalspannungen den entsprechenden Dehnungen und die Schubspannungen den entsprechenden Schiebungen stets proportional sind, so daß die inneren Kräfte immer gleichmäßig von 0 bis zu gewissen Werten anwachsen, entsprechend einer geradlinigen graphischen Darstellnng (vergl. S. 866).

Ließe man die äußeren Kräfte allmählich von 0 an wachsen, und zwar so, daß sie stets mit den entsprechenden inneren Kräften im Gleichgewichte ständen, so wäre die Arbeit dieser veränderlichen äußeren Kräfte zugleich die Arbeit der Formänderung und es könnten dabei keine Bewegungen wie die beobachteten Schwingungen auftreten.

Wir wollen nun annehmen, daß bei einem elastisch-festen Körper stets ein bestimmter Bruchteil der Arbeit der äußeren Kräfte auf Formänderung verwandt wird, d. h. daß die Arbeit der Formänderung $\mathfrak{A}$ mit der Arbeit der äußeren Kräfte A stets durch eine Gleichung

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\nu} \cdot A$$

verbunden ist, wobei ν für den betrachteten elastisch-festen Körper eine Konstante ist, die in den bisher betrachteten Fällen den Wert 2 hatte.

Ändert sich nun bei dieser Annahme der Wert einer der Kräfte des betrachteten Systems $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$, etwa der Wert der Kraft $[P_1]$, nachdem der neue Gleichgewichtszustand eingetreten ist, stetig von P_1 bis $P_1' = P_1 + \delta_1$, so läßt sich die Änderung $\Delta_1 \mathfrak{A}$ der Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$, welche dieser Änderung von $[P_1]$ entspricht, folgendermaßen darstellen. Gehen die Größen $u_1, u_2, \ldots u_n$ bei der Veränderung von $[P_1]$ über in $u_1', u_2', \ldots u_n'$, so verschieben sich die Angriffspunkte von $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ bezw. um $u_1' - u_1$, $u_2' - u_2$, ... $u_n' - u_n$, wobei die Arbeit

$$B = P_1 (u_1' - u_1) + P_2 (u_2' - u_2) + \cdots P_n (u_n' - u_n)$$

geleistet wird, während außerdem δ_1 eine Arbeit $\frac{1}{\varkappa} \delta_1 (u_1' - u_1)$ leistet, wobei $\varkappa$ irgend einen endlichen Wert bezeichnet.

Man hat also

$$1) \quad \Delta_1 \mathfrak{A} = B + \frac{1}{\varkappa} \delta_1 (u_1' - u_1).$$

Denkt man sich anderseits einmal an dem elastisch-festen Körper das System $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ angebracht und dann wieder fortgenommen und durch das System $[P_1']$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ ersetzt, so ist der Unterschied in den Arbeiten der äußeren Kräfte, welche beiden Systemen entsprechen,

$$(P_1' u_1' + P_2 u_2' + \cdots P_n u_n') - (P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots P_n u_n)$$
$$= P_1 (u_1' - u_1) + P_2 (u_2' - u_2) + \cdots P_n (u_n' - u_n) + \delta_1 u_1' = B + \delta_1 u_1'.$$

Dieser Arbeitsunterschied stellt die ν-fache Änderung der Formänderungsarbeit dar, welche dem Ersatze des Systems $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ durch das System $[P_1']$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ entspricht, es ist also

$$2) \quad \nu \,.\, \Delta_1 \mathfrak{A} = B + \delta_1 u_1'.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt

$$3) \quad (\nu - 1) \,.\, \Delta_1 \mathfrak{A} = \delta_1 \left[u_1' - \frac{1}{\varkappa} u_1' + \frac{1}{\varkappa} u_1 \right]$$

oder

$$4) \quad \frac{\Delta_1 \mathfrak{A}}{\delta_1} = \frac{1}{\varkappa} \left(u_1' \cdot \frac{\varkappa - 1}{\nu - 1} + \frac{1}{\nu - 1} u_1 \right).$$

Für $u_1' = u_1 + d$ geht die rechte Seite der Gleichung 4) über in $\frac{1}{\nu - 1} \cdot u_1 + d \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa (\nu - 1)}$, so daß auch

$$5) \quad \frac{\Delta_1 \mathfrak{A}}{\delta_1} = \frac{1}{\nu - 1} u_1 + d \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa (\nu - 1)}$$

gilt.

Denkt man $d = u_1' - u_1$ veränderlich, so verschwindet d zugleich mit δ. Für $\lim d = 0$ geht die rechte Seite der Gleichung 5), da $\varkappa$ und ν endliche Größen sind, über in $\frac{1}{\nu - 1} u_1$, während die rechte Seite zugleich die Ableitung von $\mathfrak{A}$ darstellt, falls man $\mathfrak{A}$ als Funktion der veränderlichen Größe P_1 auffaßt.

Bezeichnet man diese Ableitung durch $\mathfrak{A}_1'$, so ist schließlich

$$6)\quad \mathfrak{A}_1' = \frac{1}{\nu - 1} \cdot u_1$$

oder, da die für $[P_1]$ durchgeführte Betrachtung für jede der Größen $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_s]$ gilt,

$$7)\quad \mathfrak{A}_p' = \frac{1}{\nu - 1} \cdot u_p.$$

Für den Sonderfall $\nu = 2$, welchen elastisch-feste Körper bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes zeigen, ist

$$\mathfrak{A}_p' = u_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 407)$$

Diese Gleichung stellt den Satz von Castigliano dar.

Wenn eine Größe $\mathfrak{A}$ von n Größen $P_1, P_2, \ldots P_n$ abhängt, so kann man sie der Reihe nach nur als Funktion von P_1 oder nur als Funktion von P_2 u. s. w. betrachten und dementsprechend n Ableitungen bilden, welche als partielle Ableitungen von $\mathfrak{A}$ nach P_1 oder nach P_2 u. s. w. bezeichnet werden. Demnach läßt sich der Satz von Castigliano aussprechen, wie folgt: Wenn ein elastisch-fester Körper, für den $\nu = 2$ ist, von n Kräften $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ angegriffen wird, so erhält man die Verrückungen $u_1, u_1, \ldots u_n$ der Angriffspunkte der Kräfte für den Zustand des schließlichen Gleichgewichtes, wenn man der Reihe nach die partiellen Ableitungen der entsprechenden Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ nach den Größen $P_1, P_2, \ldots P_n$ bildet.

Der Satz gilt für jeden Wert von ν, wenn man u_p mit $\frac{1}{\nu - 1} \cdot u_p$ vertauscht.

Kann man die Werte von $u_1, u_2, \ldots u_n$ auf einem anderen Wege bestimmen, so liefert natürlich umgekehrt das System der n Gleichungen $\mathfrak{A}_1' = u_1$, $\mathfrak{A}_2' = u_2$, ... $\mathfrak{A}_n' = u_n$ ein Mittel, die Werte $P_1, P_2, \ldots P_n$ festzustellen. Letzteres ist nun von besonderer Wichtigkeit, wenn die Gruppe der Kräfte $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ in gegebene äußere Kräfte und in Reaktionen zerfällt, falls sich unter letzteren statisch-unbestimmte Reaktionen mit festen Angriffspunkten befinden.

Sind z. B. die Kräfte $[P_{n-2}]$, $[P_{n-1}]$, $[P_n]$ statisch-unbestimmte Reaktionen mit festen Angriffspunkten, so gilt $u_{n-2} = 0$, $u_{n-1} = 0$, $u_n = 0$ und infolgedessen ist für jeden Wert von ν

$$\mathfrak{A}_{n-2}' = 0, \quad \mathfrak{A}_{n-1}' = 0, \quad \mathfrak{A}_n' = 0,$$

so daß P_{n-2}, P_{n-1}, P_n durch diese drei Gleichungen bestimmt erscheinen.

Man pflegt diese Anwendung des Satzes von Castigliano als den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit zu bezeichnen, weil die Gleichungen $\mathfrak{A}_1' = 0$, $\mathfrak{A}_2' = 0$, ... $\mathfrak{A}_n' = 0$ eine notwendige Bedingung dafür sind, daß $\mathfrak{A}$ als Funktion von $P_1, P_2, \ldots P_n$ ein Maximum oder Minimum zeigt, und weil eine weitere Überlegung lehrt, daß $\mathfrak{A}$ hier thatsächlich seinen kleinsten Wert erhält, wenn man die Größen $P_1, P_2, \ldots P_n$ jenen Gleichungen gemäß bestimmt denkt.

Die ganze Betrachtung bleibt auch noch richtig, wenn man eine oder mehrere Kräfte der Reihe $P_1, P_2, \ldots P_n$ durch Kraftmomente ersetzt, falls

man nur zugleich die entsprechenden Größen aus der Reihe $u_1, u_2, \ldots u_n$ als die Arcus der entsprechenden Drehungen auffaßt.

Bei Anwendungen muß besonders beachtet werden, daß die ganze Betrachtung voraussetzt, daß die Kräfte $[P_1], [P_2], \ldots [P_n]$ voneinander unabhängig sind.

Als Beispiel behandeln wir zunächst den Fall 3 des § 151 für gleichmäßige Belastung. Hier ist gemäß Fig. 684 für $l - z = z'$ gegeben $Mo = -R_1 \cdot z' + \frac{1}{2}\gamma z'^2$ und demnach ist

$$F'(z) = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}x} = \frac{R_1^2 z'^2 - R_1\gamma z'^3 + \frac{1}{4}\gamma^2 z'^4}{2E\mathfrak{T}x}$$

und also

$$\mathfrak{A} = F(z) = \frac{\frac{1}{3}R_1^2 z'^3 - \frac{1}{4}R_1\gamma z'^4 + \frac{1}{20}\gamma^2 z'^5}{2E\mathfrak{T}x} + C,$$

wobei $C = 0$ ist, falls für $z' = 0$ auch $\mathfrak{A} = 0$ sein soll.

Für $z' = l$ erhält man demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{1}{3}R_1^2 l^3 - \frac{1}{4}R_1\gamma l^4 + \frac{1}{20}\gamma^2 l^5}{2E\mathfrak{T}x}$$

als Formänderungsarbeit des ganzen Stabes.

Faßt man nun den Ausdruck von $\mathfrak{A}$ als Funktion von R_1 auf, so ist die Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach R_1 bestimmt als

$$\tfrac{2}{3}R_1 l^3 - \tfrac{1}{4}\gamma l^4,$$

so daß aus deren Annullierung

$$R_1 = \tfrac{3}{8}\gamma l = \tfrac{3}{8}Q$$

folgt, d. h. man erhält wieder den früher abgeleiteten Wert.

Als zweites Beispiel behandeln wir den Fall 4 des § 152 für gleichmäßige Belastung. Hier ist gemäß Fig. 687 gegeben $Mo = +D_1 - R_1 z + \frac{1}{2}\gamma z^2$ und demnach ist

$$F'(z) = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}x} = \frac{D_1^2 + R_1^2 z^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 z^4 - 2D_1 R_1 z - R_1\gamma z^3 + D_1\gamma z^2}{2E\mathfrak{T}x}$$

und also

$$\mathfrak{A} = F(z) = \frac{D_1^2 z + \frac{1}{3}R_1^2 z^3 + \frac{1}{20}\gamma^2 z^5 - D_1 R_1 z^2 - \frac{1}{4}R_1\gamma z^4 + \frac{1}{3}D_1\gamma z^3}{2E\mathfrak{T}x} + C,$$

wobei $C = 0$ ist, falls für $z = 0$ auch $\mathfrak{A} = 0$ sein soll.

Für $z = l$ erhält man demnach wieder die Formänderungsarbeit des ganzen Stabes.

Faßt man diese als Funktion von D_1 auf, so ist die Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach D_1 bestimmt als

$$2D_1 l - R_1 l^2 + \tfrac{1}{3}\gamma l^3,$$

so daß aus deren Annullierung

$$D_1 = \tfrac{1}{2}R_1 l - \tfrac{1}{6}\gamma l^2$$

folgt. Für $Q = l\gamma$ und $R_1 = \frac{1}{2}Q$ folgt daraus $D_1 = \frac{1}{12}Ql$, d. h. man erhält wieder den früher abgeleiteten Wert.

Will man die Beziehung $R_1 = \frac{1}{2} Q$ nicht voraussetzen, so giebt die Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach R_1 die Gleichung

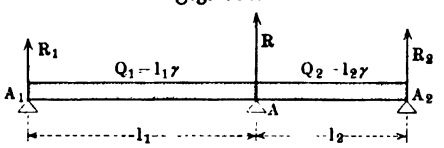
$$\tfrac{2}{3} R_1 l^3 - D_1 l^2 - \tfrac{1}{4} \gamma l^4 = 0,$$

welche im Verein mit der oben abgeleiteten Gleichung

$$2 D_1 l - R_1 l^2 + \tfrac{1}{8} \gamma l^3 = 0$$

ein zweigliedriges Gleichungssystem für die Bestimmung von R_1 und D_1 liefert, aus dem $R_1 = \frac{1}{2} Q$ und $D_1 = \frac{1}{12} Ql$ folgt.

Fig. 786.



Als letztes Beispiel behandeln wir einen Dreistützenträger mit gleichmäßiger Belastung bei ungleichen Feldern (vergl. Fig. 786). Für jedes Feld ist die Arbeit genau ebenso zu berechnen, wie bei unserem ersten Beispiel, so daß also hier gilt

$$2E.\mathfrak{Tr}.\mathfrak{A} = \tfrac{1}{3} R_1^2 l_1^3 - \tfrac{1}{4} R_1 \gamma l_1^4 + \tfrac{1}{20} \gamma^2 l_1^5 + \tfrac{1}{3} R_2^2 l_2^3 - \tfrac{1}{4} R_2 \gamma l_2^4 + \tfrac{1}{20} \gamma^2 l_2^5.$$

R_1 und R_2 sind hier nicht voneinander unabhängig, da z. B. der Momentensatz für A als Drehpunkt

$$R_1 l_1 - \tfrac{1}{2} \gamma l_1^2 - R_2 l_2 + \tfrac{1}{2} \gamma l_2^2 = 0$$

liefert. Man hat also

$$R_2 = \frac{R_1 l_1 - \frac{1}{2} \gamma (l_1^2 - l_2^2)}{l_2}$$

und demnach

$$\begin{aligned} 2E\mathfrak{Tr}.\mathfrak{A} = {} & \tfrac{1}{3} R_1^2 l_1^3 - \tfrac{1}{4} R_1 \gamma l_1^4 + \tfrac{1}{20} \gamma^2 l_1^5 \\ & + \tfrac{1}{3} l_2 [R_1^2 l_1^2 - \gamma R_1 l_1 (l_1^2 - l_2^2) + \tfrac{1}{4} \gamma^2 (l_1^2 - l_2^2)^2] \\ & - \tfrac{1}{4} \gamma l_2^3 [R_1 l_1 - \tfrac{1}{2} \gamma (l_1^2 - l_2^2)] + \tfrac{1}{20} \gamma^2 l_2^5. \end{aligned}$$

Die Annullierung der Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach R_1 giebt nun

$$\tfrac{2}{3} R_1 l_1^3 - \tfrac{1}{4} \gamma l_1^4 + \tfrac{2}{3} l_2 l_1^2 R_1 - \tfrac{1}{3} \gamma l_1 l_2 (l_1^2 - l_2^2) - \tfrac{1}{4} \gamma l_2^3 l_1 = 0,$$

d. h. es ist

$$R_1 = \gamma \cdot \frac{3 l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2}{8 l_1}$$

und demnach

$$R_2 = \gamma \cdot \frac{3 l_2^2 + l_1 l_2 - l_1^2}{8 l_2}.$$

Da $R = l_1 \gamma + l_2 \gamma - R_1 - R_2$ ist, so folgt noch

$$R = \gamma \cdot \frac{l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 + 4 l_1 l_2^2 + l_2^3}{8 l_1 l_2}.$$

Für $l_1 = l_2 = l$ erhält man wieder die Ergebnisse des § 157, nämlich $R_1 = R_2 = \frac{3}{8} l\gamma$ und $R = \frac{10}{8} l\gamma = \frac{5}{4} l\gamma$.

Die Rechnung ist ebenso leicht durchzuführen, wenn die Belastung für die laufenden Meter bei beiden Feldern (γ_1 und γ_2) verschieden ist.

Aus dem Satze von Castigliano kann man noch einen anderen fruchtbaren Satz herleiten, welcher zuerst von Maxwell gefunden worden ist [1]).

Die Durchbiegung, welche ein Träger durch die Last $[P]$ erfährt, hat für jede Stelle (z) des Trägers die Gestalt $\mu \frac{Ps^3}{E\mathfrak{T}r}$, wobei μ einen Zahlenkoeffizienten und s eine Strecke bezeichnet, welche durch die Art der Auflagerung und die Art der Belastung von Fall zu Fall bestimmt sind; es ist dies eine unmittelbare Folge des Ansatzes $f''(z) = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$, weil Mo stets zu P proportional ist. Mit Rücksicht auf das Princip der Übereinanderlagerung (vergl. S. 836) ist infolgedessen die Durchbiegung y eines Trägers, welcher die Lasten $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ trägt, stets eine ganze lineare Funktion von P_1, P_2, ... P_n und läßt sich also, falls man $\frac{\mu s^3}{E\mathfrak{T}r}$ durch a bezeichnet, für jede Stelle (z) des Trägers darstellen als

$$y = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots a_n P_n,$$

wobei a_1, a_2, ... a_n im allgemeinen von Stelle zu Stelle veränderlich sind, also als Funktionen von z erscheinen.

Da für $P_1 = 1$ und $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, ... $P_n = 0$ die Durchbiegung y den Wert a_1 hat, so nennt man a_1 die Einflußzahl der Last $[P_1]$ für die Stelle z, an welcher y die Durchbiegung darstellt (vergl. § 159), und demgemäß hat man also überhaupt a_1, a_2, ... a_n als die entsprechenden Einflußzahlen der Lasten $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ anzusehen.

Ist im besondern die Stelle z, für welche y die Durchbiegung darstellt, der Angriffspunkt einer der Lasten $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$, etwa von $[P_1]$, so ist $y \,.\, P_1$ die Arbeit der äußeren Kraft P_1 bezw. auch die ν-fache entsprechende Formänderungsarbeit.

Nehmen wir allgemein an, daß die Größen u_1, u_2, ... u_n, auf welche sich der Satz von Castigliano bezieht, ganze lineare Funktionen der Größen P_1, P_2, ... P_n sind, so wie es der oben aufgestellte Ausdruck für y zeigt, so führt der Satz von Castigliano fast unmittelbar zu dem Satze von Maxwell.

Bezeichnet man die Werte von a_1, a_2, ... a_n für den Aufbau von u_p durch $\overset{(p)}{a_1}$, $\overset{(p)}{a_2}$, ... $\overset{(p)}{a_n}$, so ist die gesamte Arbeit von $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$, welche zugleich die ν-fache entsprechende Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ darstellt,

$$\begin{aligned} 1)\quad \nu \,.\, \mathfrak{A} = P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots P_n u_n &= P_1\left(\overset{(1)}{a_1} P_1 + \overset{(1)}{a_2} P_2 + \cdots \overset{(1)}{a_n} P_n\right) \\ &\quad + P_2\left(\overset{(2)}{a_1} P_1 + \overset{(2)}{a_2} P_2 + \cdots \overset{(2)}{a_n} P_n\right) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + P_n\left(\overset{(n)}{a_1} P_1 + \overset{(n)}{a_2} P_2 + \cdots \overset{(n)}{a_n} P_n\right). \\ = \overset{(1)}{a_1} P_1^2 + \left(\overset{(1)}{a_2} + \overset{(2)}{a_1}\right) P_1 P_2 + \cdots \left(\overset{(1)}{a_n} + \overset{(n)}{a_1}\right) P_1 P_n + \cdots & \end{aligned}$$

[1]) Vergl. hierzu Föppls Mechanik, Bd. III, S. 196.

Da die partielle Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach P_p den Wert $\frac{1}{\nu-1}\cdot u_p$ liefert, so ist z. B. für $p=1$

$$2)\quad \frac{1}{\nu-1}\cdot u_1 = \frac{1}{\nu-1}\left(\overset{(1)}{a}_1 P_1 + \overset{(1)}{a}_2 P_2 + \cdots \overset{(1)}{a}_n P_n\right)$$
$$= \frac{1}{\nu}\left[2\overset{(1)}{a}_1 P_1 + \left(\overset{(1)}{a}_2 + \overset{(2)}{a}_1\right) P_2 + \cdots \left(\overset{(1)}{a}_n + \overset{(n)}{a}_1\right) P_n\right].$$

Haben alle Kräfte $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ bis auf $[P_1]$ den Wert Null, so liefert Gleichung Nr. 2) die Beziehung

$$\frac{1}{\nu-1} = \frac{2}{\nu} \quad \text{oder} \quad \nu = 2,$$

d. h. die Darstellung der Größen $u_1, u_2, \ldots u_n$ als linearer ganzer Funktionen von $P_1, P_2, \ldots P_n$ ist nur für den Fall erlaubt, daß $\nu=2$ ist, d. h. für den Fall, daß die Hälfte der gesamten Arbeit auf Formänderung verwandt wird. Unter dieser Voraussetzung ($\nu=2$) nimmt Gleichung Nr. 2) die Gestalt an

$$3)\quad \overset{(1)}{a}_1 P_1 + \overset{(1)}{a}_2 P_2 + \cdots \overset{(1)}{a}_n P_n = \overset{(1)}{a}_1 P_1 + \tfrac{1}{2}\left(\overset{(1)}{a}_2 + \overset{(2)}{a}_1\right) P_2 + \cdots \tfrac{1}{2}\left(\overset{(1)}{a}_n + \overset{(n)}{a}_1\right) P_n.$$

Haben alle Kräfte $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ bis auf P_2 den Wert Null, so liefert Gleichung Nr. 3) die Beziehung

$$\overset{(1)}{a}_2 = \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{a}_2 + \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{a}_1 \quad \text{oder} \quad \overset{(1)}{a}_2 = \overset{(2)}{a}_1.$$

Entsprechende Schlüsse gelten für $P_3, P_4, \ldots P_n$ in Gleichung Nr. 3), d. h. man hat

$$4)\quad \overset{(1)}{a}_1 = \overset{(1)}{a}_1,\quad \overset{(1)}{a}_2 = \overset{(2)}{a}_1,\quad \overset{(1)}{a}_3 = \overset{(3)}{a}_1,\quad \ldots\quad \overset{(1)}{a}_n = \overset{(n)}{a}_1.$$

Hätte man $\mathfrak{A}$ nicht nach P_1 abgeleitet, sondern nach einer anderen Kraft des Systems $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$, so hätte man entsprechende Gleichungen erhalten, deren allgemeiner Charakter demnach

$$5)\quad \overset{(q)}{a}_p = \overset{(p)}{a}_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 408)$$

ist. Diese Gleichung Nr. 408) ist der Inhalt des Maxwellschen Satzes, welcher also besagt, daß unter der gemachten Annahme die Einflußzahl der Kraft $[P_p]$ für die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft $[P_q]$ mit der Einflußzahl der Kraft $[P_q]$ für die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft $[P_p]$ übereinstimmt.

Dieser Satz gestattet nun besonders die Stützreaktionen durchgehender Träger auch für den Fall beweglicher Belastungen verhältnismäßig leicht zu bestimmen.

Für den Dreistützenträger (vergl. Fig. 787) verfährt man folgendermaßen. Nach Entfernung der Mittelstütze bei A denkt man sich bei A eine Last $[R]=1$ angebracht und bestimmt die Biegungslinie (vergl. Fig. 787 b) für diese Belastung des sonst unbelasteten Zweistützenträgers, was gemäß § 150 oder gemäß § 155 geschehen kann. Die Ordinaten dieser Biegungslinie geben für die verschiedenen Stellen des Trägers die Einflußzahlen der

Belastung $[R] = 1$ in A an, so daß z. B. die Strecke b diese Einflußzahl für B darstellt und demnach durch eine beliebige Belastung $[R]$ in A die Durchbiegung $R \cdot b$ in B bewirkt wird. Bringt man auf dem sonst unbelasteten Zweistützenträger in B eine Belastung $P = 1$ an, so würde diese in A nach dem Satze von Maxwell dieselbe Durchbiegung b hervorrufen, welche bei der Belastung $R = 1$ in A für B erhalten wurde, und demnach würde eine beliebige Belastung $[P]$ in B die Durchbiegung $P \cdot b$ in A bewirken.

Fig. 787 a.

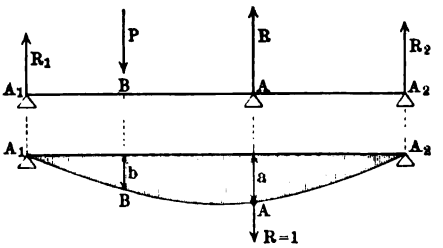


Fig. 787 b.

Ist der Zweistützenträger mit n Lasten $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ besetzt, so bewirken diese in A die Durchbiegung

$$P_1 \overset{(1)}{b} + P_2 \overset{(2)}{b} + \cdots P_n \overset{(n)}{b},$$

wenn in Fig. 787 b zu ihren Belastungspunkten B_1, B_2, ... B_n bezw. die Ordinaten $\overset{(1)}{b}, \overset{(2)}{b}, \ldots \overset{(n)}{b}$ gehören.

Soll nun eine Stützenreaktion $[R]$ in A diese Durchbiegung in A aufheben, so muß

$$R \cdot a = P_1 \overset{(1)}{b} + P_2 \overset{(2)}{b} + \cdots P_n \overset{(n)}{b}$$

sein, d. h. für den Dreistützenträger gilt

$$R = \frac{P_1 \overset{(1)}{b} + P_2 \overset{(2)}{b} + \cdots P_n \overset{(n)}{b}}{a}.$$

Da die eine Biegungslinie der Fig. 787 b genügt, um für jede Stellung von $[P_1]$, $[P_2]$, ... $[P_n]$ den Wert von R zu bestimmen, so nennt man diese Linie die Einflußlinie (vergl. S. 1033) für die Durchbiegungen in Bezug auf die Reaktion $[R]$ in A.

Bei einer Senkung der Stütze in A um u gilt ebenso

$$P_1 \overset{(1)}{b} + P_2 \overset{(2)}{b} + \cdots P_n \overset{(n)}{b} - u = R \cdot a.$$

Hat der Träger eine gleichmäßige Belastung, so muß man diese in Einzellasten für die einzelnen Elemente (n) des Trägers auflösen und die oben gewonnene Gleichung für $lim \cdot n = \infty$ verwenden.

Um das entsprechende Verfahren zu zeigen, behandeln wir wieder den Dreistützenträger der Fig. 787. Nach Beseitigung der Mittelstütze ist die Biegungslinie für den Balken, der nur in A die Last $[R] = 1$ trägt, gemäß § 150 gegeben und zwar für $A_1 A = l_1$ durch

$$\frac{1}{E\mathfrak{T}}\left(-\tfrac{1}{6}\frac{Pl_2}{l} z^3 + C_1 z\right) \text{ für } A_1 A \text{ als } Z\text{-Achse}$$

und für $A_2 A = l_2$ durch

$$\frac{1}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{6}\frac{Pl_1}{l}z^3 + C_2 z\right) \text{ für } A_2A \text{ als } Z\text{-Achſe},$$

falls $l_1 + l_2 = l$ und $P = 1$ iſt.

Bezeichnen wir ein Element von l_1 durch $\zeta = \frac{1}{n}l_1$ für $lim\,.\,n = \infty$, ſo trägt dieſes bei gleichmäßiger Belaſtung (γ) von l_1 die Laſt $\zeta\,.\,\gamma$, während die Durchbiegung für die Stelle $z = p\cdot\frac{l_1}{n}$, an welcher das Element liegt, bei der Belaſtung des Balkens durch die Kraft 1 in A, durch die oben gegebene Gleichung des § 150 beſtimmt iſt. Nach dem Satze von Maxwell liefert die Belaſtung 1 an der betrachteten Stelle für A dieſelbe Durchbiegung, ſo daß die Belaſtung $\zeta\,.\,\gamma$ alſo für A die Durchbiegung

$$\frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{6}\frac{l_2}{l}z^3 + C_1 z\right)\cdot\zeta$$

liefert. Die geſamte Durchbiegung von A folgt aus dieſem Ausdruck durch Summation für die einzelnen Elemente $\zeta = \frac{l_1}{n}$, falls man $z = p\cdot\frac{l_1}{n}$ ſetzt bei $p = 1, 2, \ldots n$ für $lim\,n = \infty$; ſie ergiebt ſofort

$$\frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{24}\frac{l_2 l_1^4}{l} + \tfrac{1}{2}C_1 l_1^2\right).$$

Ebenſo liefert die Belaſtung von l_2 für A die Durchbiegung

$$\frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{24}\frac{l_1 l_2^4}{l} + \tfrac{1}{2}C_2 l_2^2\right).$$

Man bemerkt leicht, daß beide Durchbiegungen zuſammen durch die in Fig. 787 b ſchraffierte Fläche dargeſtellt werden.

Eine Laſt $[R]$ in A liefert gemäß § 150 in A die Durchbiegung

$$\tfrac{1}{3}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}\cdot\frac{R}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Soll alſo Punkt A keine Durchbiegung zeigen, ſo muß in ihm eine Reaktion R vorhanden ſein, für welche

$$\frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{24}\frac{l_2 l_1^4}{l} + \tfrac{1}{2}C_1 l_1^2\right) + \frac{\gamma}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\left(-\tfrac{1}{24}\frac{l_1 l_2^4}{l} + \tfrac{1}{2}C_2 l_2^2\right) = \tfrac{1}{3}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}\frac{R}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

iſt.

Da $C_1 = \frac{1}{6}\frac{l_1 l_2}{l}(2l_2 + l_1)P$ und $C_2 = \frac{1}{6}\frac{l_1 l_2}{l}(2l_1 + l_2)P$ iſt gemäß § 150, ſo folgt für $P = 1$

$$R = \gamma\cdot\frac{l_1^3 + 4l_1^2 l_2 + 4l_1 l_2^2 + l_2^3}{8 l_1 l_2},$$

d. h. man kommt zurück zu dem Werte auf S. 1080.

Ist die Mittelstütze um u gesenkt, so ergiebt sich ebenso

$$R = \frac{\gamma(l_1^3 + 4l_1^2 l_2 + 4l_1 l_2^2 + l_2^3) - \frac{24u \cdot l}{l_1 l_2} \cdot E\mathfrak{T}r}{8 l_1 l_2},$$

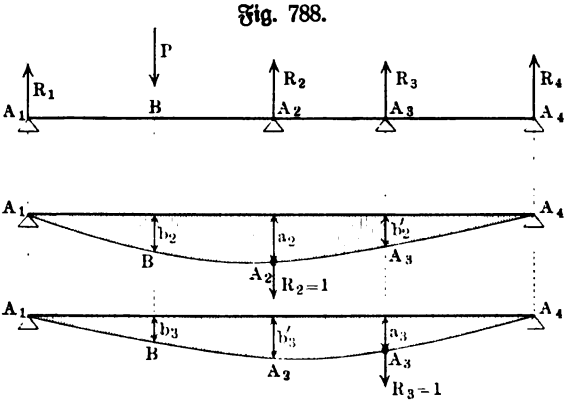
was für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l = \bar{l}$ wieder, wie in § 157, zu

$$R = \frac{5\gamma\bar{l}^4 - 24u \cdot E\mathfrak{T}r}{4\bar{l}^3}$$

führt, falls man l in § 157 durch $\bar{l}$ ersetzt.

Handelt es sich darum, gemäß dem Satze von Maxwell einen Balken auf beliebig-vielen (n) Stützen zu behandeln, so denkt man sich zunächst wieder durch Entfernung der inneren $(n-2)$ Stützen einen Zweistützenträger hergestellt und bestimmt für diesen der Reihe nach die $(n-2)$ Biegungslinien, welche der Belastung je eines Stützpunktes durch die Kraft $R=1$ entsprechen. Diese $(n-2)$ Biegungslinien reichen aus, um als Einflußlinien für die Durchbiegungen die Werte der (n) Reaktionen der Stützpunkte zu bestimmen.

Fig. 788.



Wir erläutern das Verfahren demgemäß noch für einen Balken auf vier Stützen. Vergl. Fig. 788.

Denkt man sich die Stützen bei A_2 und A_3 beseitigt, so führt die Belastung des Zweistützenträgers $A_1 A_4$ durch $R_2 = 1$ in A_2 zu der Biegungslinie der Fig. 788 b, während die Belastung des Zweistützenträgers $A_1 A_4$ durch $R_3 = 1$ in A_3 zu der Biegungslinie der Fig. 788 c führt, beides gemäß § 150 bezw. § 155.

Eine Last $[P] = 1$ in B bewirkt an der Stelle A_2 nach dem Satze von Maxwell gemäß Fig. 788 b die Durchbiegung $[b_2]$, so daß die Durchbiegung in A_2 für eine beliebige Last $[P]$ in B den Wert Pb_2 hat; ebenso bewirkt eine Last $[R_3]$ in A_3 an der Stelle A_2 eine Durchbiegung vom Werte $R_3 b'_2$.

Eine Last $[P] = 1$ in B bewirkt an der Stelle A_3 nach dem Satze von Maxwell gemäß Fig. 788 c die Durchbiegung $[b_3]$, so daß die Durchbiegung in A_3 für eine beliebige Last $[P]$ in B den Wert Pb_3 hat; ebenso bewirkt eine Last $[R_2]$ in A_2 an der Stelle A_3 eine Durchbiegung vom Werte $R_2 b'_3$.

Da eine Last $[R_2]$ an der Stelle A_2 eine Durchbiegung vom Werte $R_2 a_2$ und da eine Last $[R_3]$ an der Stelle A_3 eine Durchbiegung vom Werte $R_3 a_3$ bewirkt, so tritt für die Stellen A_2 und A_3 keine Durchbiegung ein, wenn sich dort die betrachteten Durchbiegungen aufheben. Mit Rücksicht auf die Richtungen von $[P]$, $[R_1]$ und $[R_2]$ gilt also für A_2

$$P b_2 = R_2 a_2 + R_3 b_2'$$

und für A_3

$$P b_3 = R_2 b_3' + R_3 a_3,$$

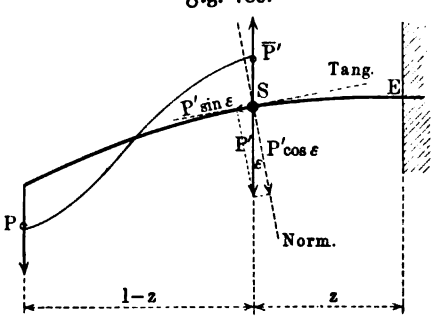
wodurch R_2 und R_3 unmittelbar gegeben sind.

Nachdem $[R_2]$ und $[R_3]$ bestimmt sind, führt der Momentensatz für A_1 zu $[R_1]$ und für A_1 zu $[R_4]$.

Für beliebig viele Lasten ist in den aufgestellten Gleichungen $P b_2$ durch $P_1 \overset{(1)}{b_2} + P_2 \overset{(2)}{b_2} + \cdots P_n \overset{(n)}{b_2}$ und $P b_3$ durch $P_1 \overset{(1)}{b_3} + P_2 \overset{(2)}{b_3} + \cdots P_n \overset{(n)}{b_3}$ zu ersetzen, wobei $\overset{(1)}{b_2}, \overset{(2)}{b_2}, \ldots \overset{(n)}{b_2}$ die Ordinaten der Fig. 788 b sind, welche zu den einzelnen Belastungspunkten $B_1, B_2, \ldots B_n$ von $[P_1], [P_2], \ldots [P_n]$ gehören, während $\overset{(1)}{b_3}, \overset{(2)}{b_3}, \ldots \overset{(n)}{b_3}$ die Ordinaten der Fig. 788 c sind, welche zu den einzelnen Belastungspunkten $B_1, B_2, \ldots B_n$ von $[P_1], [P_2], \ldots [P_n]$ gehören.

166. Die Einflüsse der Ungenauigkeiten der Theorie des gebogenen Balkens. Der Umstand, daß bei der Behandlung der Träger Stücke der gebogenen Mittellinie stets durch ihre Projektion auf die ursprüngliche Mittellinie (Achse) ersetzt werden, hat bei der geringen Durchbiegung, welche in der Praxis zulässig ist, mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der verwendeten Konstanten keinen Einfluß auf die abgeleiteten Ergebnisse. Ebenso wenig hat dies die Vernachlässigung der Änderung, welche die Voraussetzungen des Normalfalles bezw. des Falles der schiefen Belastung durch die Biegung selbst erfahren (vergl. S. 892).

Fig. 789.



Gemäß Fig. 789 tritt dabei zwar statt der Schubkraft $[P']$ die Schubkraft $[P' \cos \varepsilon]$ auf und außerdem noch die Zugkraft $[P' \sin \varepsilon]$, so daß der Fall der Biegung, welcher ja stets als Verbindung von Biegung und Schub behandelt werden muß, eigentlich aus drei einfachen Fällen zusammengesetzt ist, entsprechend dem Biegungsmoment, der verbesserten Schubkraft und der außerdem auftretenden Zug- oder Druckkraft. Der Einfluß dieser Verbesserung ist aber doch so gering, daß man von ihr absehen kann, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Die Kraft $[P' \sin \varepsilon]$ liefert bei gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt f eine Zugspannung σ' vom Werte $\frac{P \sin \varepsilon}{f}$, welche auf der Zugseite

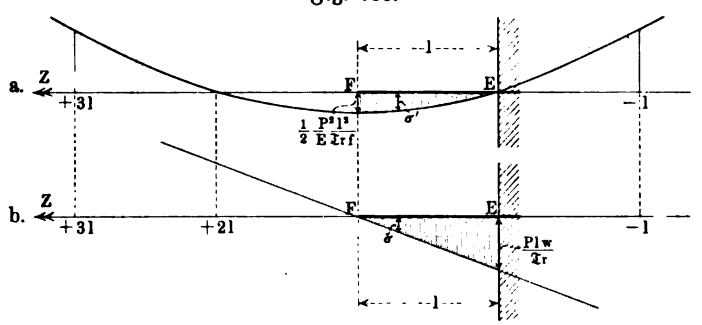
die Biegungsspannung $\sigma = Mo : \frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{P(l-z)w}{\mathfrak{T}r}$ vermehrt, sie aber auf der Druckseite vermindert.

Da ε die Winkelabweichung für die betrachtete Stelle S ist, so ist $tng\,\varepsilon = \frac{P}{E\mathfrak{T}r}(lz - \frac{1}{2}z^2)$, d. h. man hat für $sin\,\varepsilon \sim tng\,\varepsilon$

$$\sigma' = \frac{P^2}{E\mathfrak{T}rf}(lz - \tfrac{1}{2}z^2).$$

Die graphische Darstellung von σ' führt zu der Parabel der Fig. 790 a, von welcher nur der schraffierte Teil in Frage kommt, während die graphische Darstellung von σ die Gerade der Fig. 790 b giebt, für welche gleichfalls der l entsprechende Teil schraffiert ist.

Fig. 790.



Für die Zugseite des Trägers beträgt die Spannung $\sigma + \sigma'$, während sie für die Druckseite $\sigma - \sigma'$ ist.

Man sieht, daß die Maxima für $\sigma + \sigma'$ und $\sigma - \sigma'$ bei gegebenem $\frac{Plw}{\mathfrak{T}r}$ in Fig. 790 b von der Pfeilhöhe $\frac{1}{2}\frac{P^2l^2}{E\mathfrak{T}rf}$ der Parabel in Fig. 790 a abhängen.

Bei einer relativ kleinen Pfeilhöhe liegen diese Maxima nach wie vor bei E, wobei aber zu bemerken ist, daß $\sigma - \sigma'$ in E eine Druckspannung und in F eine Zugspannung ist, deren Übergang bei $\sigma - \sigma' = 0$, d. h. gemäß der Gleichung $w \,.\, E \,.\, f(l - z) = P(lz - \frac{1}{2}z^2)$ auftritt.

Um den Einfluß von σ' beurteilen zu können, bildet man am besten für die Pfeilhöhe der Parabel das Verhältnis $\mu = \frac{Plw}{\mathfrak{T}r} : \frac{1}{2}\frac{P^2l^2}{E\mathfrak{T}rf}$ oder $2Efw : Pl$. Für einen Freiträger aus Schmiedeeisen von 2 m Länge ist z. B. bei einer Endbelastung von 1000 kg nach der Biegungstheorie in I-Eisen das Normalprofil Nr. 22 erforderlich, für welches $f \sim 40$ qcm und $w = 11$ cm ist; man hat also hier bei $E = 2\,000\,000$ für obiges Verhältnis $\mu = 8800 : 1$, d. h. die Pfeilhöhe der Parabel in Fig. 790 a beträgt nur $\frac{1}{8800}$ von dem größten Werte bei E in Fig. 790 b.

Bestimmt man die Stelle des theoretischen Maximums für $[\sigma + \sigma']$, dessen graphische Darstellung wieder zu einer Parabel führt, so findet man

leicht $z = l - \frac{wEf}{P} = l\left(1 - \frac{wEf}{Pl}\right) = l(1 - \frac{1}{2}\mu)$. Für unser Beispiel giebt dies $l(1 - 4400) = -4399\,l$, d. h. das theoretische Maximum liegt um 4399 Trägerlängen rechts von E, während bei E ein relatives Maximum bestehen bleibt. Entsprechendes gilt auch in anderen Fällen.

Trotzdem ist der Einfluß von $[P \sin \varepsilon]$ auf die Lage der neutralen Schicht nicht unbedeutend, wie aus dem Übergange von $[\sigma - \sigma']$ aus dem Druckgebiete in das Zuggebiet für $z = 0 \ldots l$ hervorgeht.

Fig. 791.

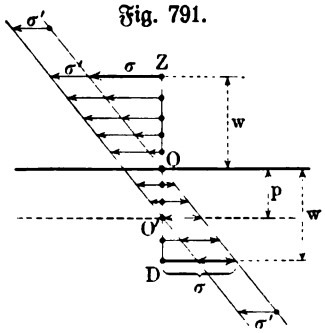
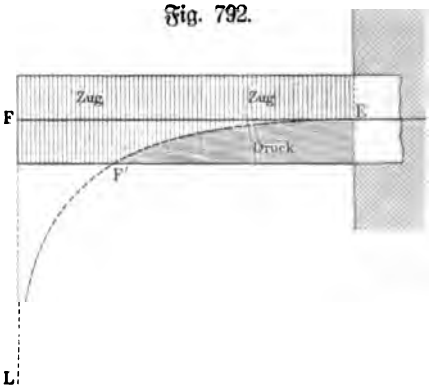


Fig. 792.



Trägt man die Zugspannung $[\sigma']$ in das früher (vergl. S. 896) für die Biegung bestimmte Spannungsbild ein, wie es Fig. 791 zeigt, so bemerkt man, daß für die alte Neutrale (O) die Spannung $[\sigma']$ bestehen bleibt, während sich jetzt in der Entfernung p von dieser bei O' Zug und Druck aufheben, so daß bei O' eine neue Neutrale entsteht. Die Verschiebung der Neutralen um p ist leicht zu bestimmen, da

$$\frac{p}{w} = \frac{\sigma'}{\sigma},$$

so daß

$$p = \frac{P}{fE} \frac{lz - \frac{1}{2}z^2}{l - z}$$

ist.

Für Punkt E, wo $z = 0$ ist, ist $p = 0$, während für F, wo $z = l$ ist, $p = \infty$ wird. Für $p = w$ ergiebt sich wieder

$$wfE(l - z) = P(lz - \tfrac{1}{2}z^2)$$

als Gleichung für die Stelle z, an welcher $[\sigma - \sigma']$ von Zugwerten zu Druckwerten stetig übergeht und wo also zugleich die neutrale Schicht die untere Fläche des Balkens schneidet. Diese Stelle ist in Fig. 792 durch F' bezeichnet; die Spur der neutralen Schicht EF' nähert sich asymptotisch dem Lote FL. Man findet

$$z = l[1 + \tfrac{1}{2}\mu \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\mu^2}],$$

wobei nur das Vorzeichen — Bedeutung hat, oder bei Entwickelung der Wurzel

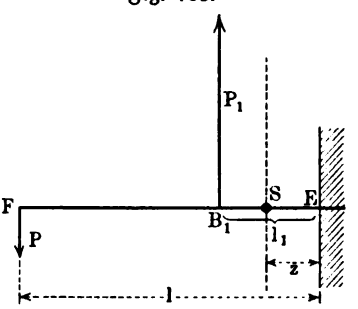
$$\bar{\varepsilon} \sim l\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

Für unser Beispiel ist dann $\bar{\varepsilon} \sim l(1 - \frac{1}{8800})$, d. h. F' liegt zwar im Balken, aber äußerst nahe an der Geraden FL.

Wird der Freiträger durch mehrere Kräfte angegriffen, so entspricht jeder dieser Kräfte im allgemeinen eine Stetigkeitsunterbrechung der neutralen Schicht.

In Fig. 793 gilt für $P_1 l_1 > Pl$, wozu S. 947 zu vergleichen ist, folgendes: zwischen E und B_1 verläßt die neutrale Schicht den Balken an einer bestimmten Stelle auf der oberen Seite und kehrt in diesen an einer bestimmten Stelle auf der unteren Seite zurück, um dann bis B_1 stetig in ihm zu verlaufen; bei B_1 springt sie innerhalb des Balkens nach oben, um dann in ihm gemäß Fig. 792 weiter zu verlaufen.

Fig. 793.



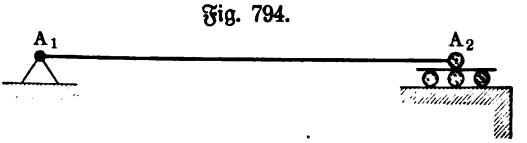
Aus alledem geht hervor, daß die Spur der neutralen Schicht stets erheblich anders verläuft als die Biegungslinie.

Der Einfluß der Änderung des Schubes von P in $P\cos\varepsilon$ ist stets unerheblich, da die Bestimmung der Schubkonstanten infolge des stets zugleich auftretenden biegenden Momentes (vergl. S. 880) unter allen Umständen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist.

Für die Beurteilung der Genauigkeit der Theorie ist auch zu bemerken, daß die theoretische Voraussetzung der Auflagerung und der Einspannung bei praktischen Ausführungen selbstverständlich nur in einer gewissen Annäherung zu erreichen ist.

Bei einem beiderseits eingemauerten Balken, der als Zweistützenträger betrachtet wird, ist durchaus nicht von vornherein klar, welche Punkte der Auflagerfläche als Auflagerpunkte im Sinne der Theorie zu gelten haben (vergl. S. 478), während die Unsicherheit bei der in Fig. 794 dargestellten Auflagerung,

Fig. 794.



bei welcher A_1 durch ein Gelenk und A_2 durch ein Rollenlager befestigt ist, weit geringer ist. Außerdem ist noch zu berücksichtigen, daß die Punkte des Balkens, welche vor der Belastung als Auflagerpunkte gelten durften, nach der Biegung durch andere Punkte ersetzt erscheinen. Bei einem Zweistützenträger mit Mittelbelastung rücken die Endpunkte der Mittellinie bei der Biegung beide nach innen, während die Auflagerflächen oder Auflagerpunkte wegen der Drehung der entsprechenden Querschnitte beide nach außen rücken, so daß für diese eine nach innen gerichtete Reibung auftritt. Dieser Reibung, welche bei Rollenauflagerung gering, bei Auflagerung auf Schneiden aber

erheblich ist, entspricht für die Schwerpunkte der Schnitte des Stabes ein Moment, welches dem Moment der Auflagerreaktion entgegenwirkt, d. h. durch diese Reibung wird die Durchbiegung verringert. Da dieses Moment bei gegebener Belastung von der Balkenhöhe ($2w$) und vom Reibungskoeffizienten abhängt, so kann es unter Umständen die Durchbiegung ganz erheblich beeinflussen, etwa bis zu 20 Proz.

Was nun die Einspannung anlangt, so ist bereits auf S. 900 darauf hingewiesen, daß ihr Ersatz durch Stützen A_1 und A_2, gemäß Fig. 795 a, nicht zulässig ist. Bildet man die Stützen A_1 und A_2 durch Auflagerplatten aus, gemäß Fig. 795 b, so gelangt man zu einer angenähert richtigen Ausführung der theoretischen Grundlagen der Einspannung.

Fig. 795.

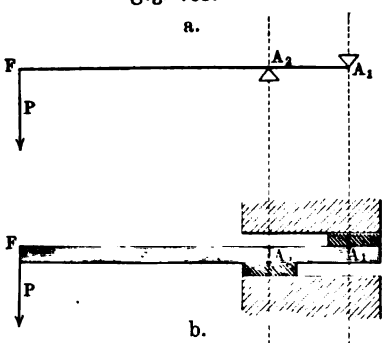
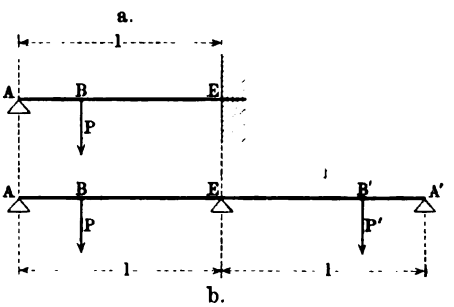


Fig. 796.



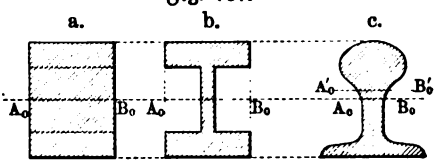
Letzteres ist ziemlich genau der Fall für die Mitte symmetrisch belasteter Dreistützenträger u. s. w. Will man z. B. den theoretischen Zustand des Balkens der Fig. 796 a, welcher Fall 3 entspricht, wirklich herstellen, so kann dies gemäß der Anordnung der Fig. 796 b geschehen, bei welcher ein Balken von doppelter Länge ($2l$) als symmetrisch belasteter Dreistützenträger konstruiert ist; hier entsteht bei E eine wagerechte Tangente, so daß dabei die Einklemmung E der Fig. 796 a ziemlich genau dargestellt wird.

Während die bisher betrachteten Ungenauigkeiten der Theorie für die Praxis im allgemeinen, d. h. abgesehen von besonders ungünstigen Fällen, keiner Verbesserung bedürfen, steht eine bisher noch nicht besprochene Voraussetzung der Theorie mit den Thatsachen in einem gewissen Widerspruche.

Wir betrachteten den Stab als ein Bündel gezogener und gedrückter Fasern, die unabhängig voneinander gewissen Formänderungen unterliegen. Dies wäre thatsächlich richtig, wenn die im Materiale des Stabes willkürlich abgegrenzten Fasern keine Querdehnung zeigten. Auf der Zugseite suchen sich thatsächlich die Faserquerschnitte, dem Wachsen von [σ] entsprechend, mehr und mehr zu vermindern von der Mitte bis zur äußersten Schicht, auf der Druckseite herrscht ein entsprechendes Bestreben nach Vergrößerung der Faserquerschnitte vor. Infolgedessen werden bei dem thatsächlichen Zusammenhange des Materials einerseits Spannungen übertragen, welche senkrecht zu den Fasern stehen, so daß die Längsspannung einer Faser ihrer Dehnung nicht mehr in aller Strenge proportional bleibt,

während anderseits die beabsichtigte Verkleinerung oder Vergrößerung der Faserquerschnitte nur unvollkommen eintreten kann. Versuche mit Stäben, deren Querschnittsänderung verhindert wird, zeigen, daß die thatsächlich auftretende Anstrengung des Materials in der Achsenrichtung hier kleiner ist, als in dem Falle ungehinderter Querschnittsänderung, d. h. die zulässige Anstrengung des Materials erhöht sich bei gehinderter Querschnittsänderung gegenüber ungehinderter Querschnittsänderung. Infolgedessen wirkt der Zusammenhang der Fasern für den gebogenen Stab günstig, d. h. die Rechnung mit k_1 und k_2 gemäß den Versuchen mit gezogenen und gedrückten Stäben führt in der Biegungstheorie zu Ergebnissen, welche eine größere Sicherheit verbürgen, als thatsächlich nötig ist.

Fig. 797.



Der dargestellte Einfluß muß in hohem Maße von der Form des Querschnittes abhängen. Vergleicht man die Querschnitte a, b, c der Fig. 797, so zeigt sich der gegenseitige Einfluß der Fasern bei b geringer als bei a, d. h. Querschnitt b entspricht der Theorie genauer als Querschnitt a; bei Querschnitt c ist der Einfluß für den oberen Teil größer als für den unteren, so daß die Entwickelung von Zug oder Druck im unteren Teile der Theorie mehr entspricht als im oberen und sich infolgedessen die Neutrale von $A_0 B_0$ nach $A_0' B_0'$ verschoben zeigt.

Mit Rücksicht auf alle diese Beziehungen pflegt man die Werte k_1 und k_2, welche aus Versuchen mit gezogenen und gedrückten Stäben hergeleitet sind, in der Biegungstheorie nicht zu verwerten, sondern statt ihrer durch besondere Versuche an gebogenen Stäben die zulässige Anstrengung für Biegung k_b von Fall zu Fall abzuleiten.

167. Materialkonstanten. Die Bruchspannungen für Biegung (Biegungsfestigkeit) werden meist als Bruchteile der entsprechenden Festigkeit für Zug oder Druck angegeben. Für Schmiedeeisen ist die Spannung der Quetschgrenze (2200 Atm. bis 3000 Atm.) maßgebend. Für Magnesium ist $K_1 = 2320$ Atm., $K_2 = 2720$ Atm., $K_b = 1600$ Atm., für Steine ist $K_b \sim \frac{1}{6} K_2$.

Bei Schmiedeeisen (Fluß- und Schweißeisen) sind die Konstruktionsspannungen (zulässige Spannungen), der Tragfestigkeit entsprechend, für Biegung bestimmt durch

$$k_b = 900 \text{ Atm. bis } 1200 \text{ Atm.}$$

Der Ursprungsfestigkeit entsprechen hier als Konstruktionsspannungen

$$k_b = 600 \text{ Atm. bis } 800 \text{ Atm.}$$

Der Schwingungsfestigkeit entsprechen hier als Konstruktionsspannungen

$$k_b = 300 \text{ Atm. bis } 400 \text{ Atm.}$$

Hier gelten also für Biegung dieselben Zahlen wie für Zug und für Druck.

Vierte Abteilung.

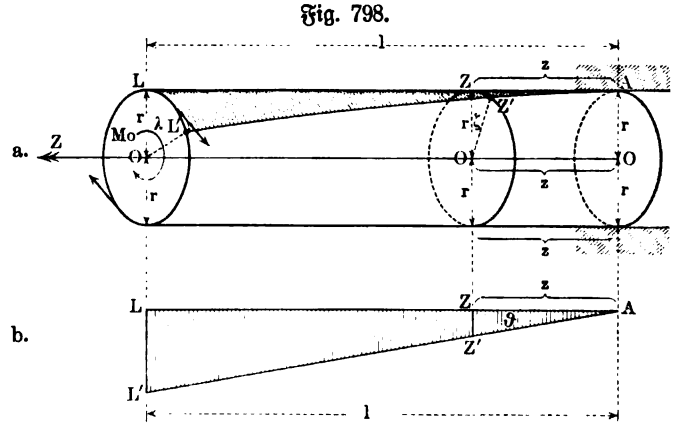
Die Verdrehung des geraden Stabes.

168. Beanspruchung auf Verdrehung (Torsion). Da das Eigengewicht eines Stabes stets als senkrecht nach unten gerichtete Kraft auftritt, so ist bei dessen Berücksichtigung ein Stab, welcher auf Verdrehung beansprucht wird, bei wagerechter Achsenstellung zugleich auf Biegung und bei senkrechter Achsenstellung zugleich auf Druck zu berechnen, während bei schiefer Achsenstellung beides zu berücksichtigen ist.

Wir werden im folgenden stets eine wagerechte Achsenlage voraussetzen, und demnach eine senkrechte Stellung der Querschnitte, da sich dabei die Beschreibung der Anordnung wesentlich vereinfacht.

169. Verdrehung eines geraden Cylinders, dessen Querschnitt ein Kreis ist. Wir denken uns einen gewöhnlichen Cylinder, wie es Fig. 798a andeutet, am Ende A eingeklemmt und am Ende L durch ein Kräftepaar gefaßt.

Fig. 798.



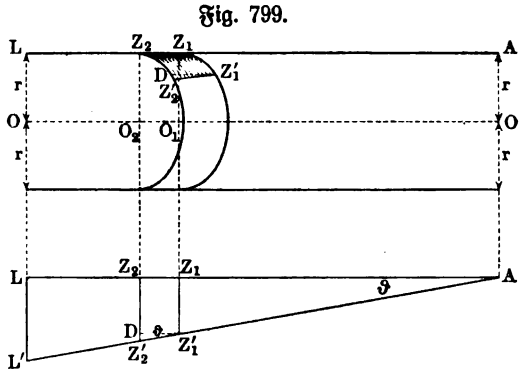
Die Erfahrung lehrt, daß die einzelnen Querschnitte bei der Verdrehung, welche der Cylinder hierdurch erleidet, eben bleiben und sich nur als Ganzes in sich drehen. Es dreht sich z. B. der Querschnitt von L in Fig. 798a um den Mittelpunkt O, so daß L in seiner ursprünglichen Vertikalebene nach L' gelangt, wobei die Verdrehung durch $\measuredangle\, LOL' = \lambda$ gemessen wird; für einen

Querſchnitt bei Z im Abſtande z von A wird die Verdrehung ebenſo durch die Bewegung von Z nach Z' bezw. durch den $\sphericalangle ZOZ' = \zeta$ gemeſſen. Dabei geht eine Faſer, welche urſprünglich Seite des Cylinders war, in eine krumme Linie über, wie es z. B. für die Faſer AZL durch $AZ'L'$ dargeſtellt wird, und Entſprechendes gilt für alle Faſern, die der Stabachſe parallel ſind. Die Erfahrung lehrt nun weiter, daß dieſe Faſern nach der Verdrehung gewöhnliche Schraubenlinien bilden, die bei einer Abwickelung des Cylindermantels, wie ſie Fig. 798 b andeutet, zu Geraden werden.

Da $LL' = r \,.\, arc\,\lambda$ und $ZZ' = r \,.\, arc\,\zeta$ iſt, ſo folgt aus Fig. 798 b mit Rückſicht auf $LL' : ZZ' = l : z$ die Beziehung $arc\,\lambda : arc\,\zeta = l : z$, d. h. die Verdrehungswinkel der einzelnen Querſchnitte ſind deren Abſtänden vom feſten Ende proportional.

Betrachtet man zwei Querſchnitte bei Z_1 und Z_2, wie es Fig. 799 andeutet, ſo beſtimmt eine Parallele zur Stabachſe durch Z_1' auf $Z_2 Z_2'$ einen Punkt D, ſo daß $\lambda_2 = \lambda_1 + \sphericalangle DO_2 Z_2'$ iſt. Je näher die beiden Querſchnitte aneinander liegen, um ſo mehr verſchwindet der Unterſchied zwiſchen dem Bogen DZ_2' und deſſen Sehne, ſo daß $\frac{DZ_2'}{DZ_1'}$ an der Grenze die Schiebung irgend eines Punktes (D) des erſten Querſchnittes in Bezug auf den entſprechenden Punkt (Z_1') des zweiten Querſchnittes darſtellt. Aus Fig. 799 b folgt $\frac{DZ_2'}{DZ_1'} = tng\,\vartheta$, entſprechend Fig. 798 b, ſo daß auch, falls $tng\,\vartheta$ mit $arc\,\vartheta$ vertauſcht werden darf, $\frac{DZ_2'}{DZ_1'} = \vartheta$ gilt.

Fig. 799.



Gemäß Fig. 798 b iſt auch $\frac{L'L}{LA} = \frac{Z'Z}{ZA} = tng\,\vartheta$, ſo daß auch in gewiſſem Sinne für den ganzen Stab von einer, durch die Verdrehung hervorgerufenen Schiebung ϑ geſprochen werden darf.

Die hiermit beſtimmte Schiebung gilt für den Mantel des Cylinders und kann daher genauer als ϑ_r bezeichnet werden.

Um die Schiebung für das Innere des Stabes zu beſtimmen, denken wir uns im Abſtande ϱ von deſſen Achſe einen Cylinder von gleicher Achſe. Für deſſen Mantel gelten die bisher betrachteten Figg. 798 und 799, falls man AL unverändert läßt und LL' im Verhältnis $\varrho : r$ verkürzt. Demgemäß gilt

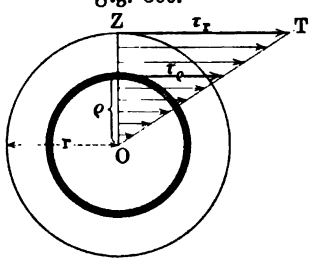
$$\vartheta_\varrho : \vartheta_r = \varrho : r.$$

Unter Vorausſetzung der Gültigkeit des Geſetzes von Hooke $\tau = G \,.\, \vartheta$

verhalten sich ferner die Schubspannungen τ_ϱ und τ_r im Querschnitt, welche ϑ_ϱ und ϑ_r entsprechen, wie $\varrho : r$.

Die Schubspannungen im Querschnitte nehmen also, wie es Fig. 800 zeigt, vom Mittelpunkte des Querschnittes an zu und zwar proportional zu ϱ von O bis τ_r, so daß OT geradlinig ist.

Fig. 800.



Das Moment der inneren Kräfte, welche diesen Schubspannungen entsprechen, hält dem Momente $[Mo]$ des von außen wirkenden Kräftepaares das Gleichgewicht. Bezeichnet φ ein Flächenelement im Abstande ϱ von O, auf welchem die Spannung $\tau_\varrho = \frac{\varrho}{r} \cdot \tau_r$ herrscht, so ist $\varphi \,.\, \tau_\varrho = \varphi \frac{\varrho}{r} \cdot \tau_r$ die entsprechende Kraft. Für O als Drehpunkt hat das Moment dieser Kraft den Wert $\varphi \,.\, \tau_\varrho \,.\, \varrho = \varphi \frac{\varrho^2}{r} \cdot \tau_r$, so daß also für alle Elemente

$$Mo = \frac{\tau_r}{r} \cdot \Sigma \varphi \varrho^2$$

gilt. Hier bezeichnet $\Sigma \varphi \varrho^2$ das polare Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r_0$ des Querschnittes für O als Pol (vergl. S. 649), d. h. man hat

$$Mo = \frac{\tau_r}{r} \cdot \mathfrak{T}r_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 409)$$

Diese Gleichung, welche genau der Festigkeitsgleichung der Biegung entspricht, wird auch hier Festigkeitsgleichung genannt. Aus ihr folgt

$$\tau_r = \frac{r \,.\, Mo}{\mathfrak{T}r_0} \text{ für } \tau_r \leqq t \quad \ldots \ldots \ldots \quad 410)$$

falls t die zulässige Schubspannung ist [1]).

Die entsprechende Formänderungsgleichung erhält man durch Bestimmung von $arc\,\zeta$. Man hat nach dem Gesetze von Hooke $\tau_r = G \,.\, \vartheta_r$, während $\vartheta_r = \frac{ZZ'}{ZA}$ und $ZZ' = r \,.\, arc\,\zeta$ ist, so daß $\tau_r = \frac{G \,.\, r \,.\, arc\,\zeta}{z}$ ist. Daraus folgt

$$\frac{arc\,\zeta}{z} = \frac{\tau_r}{G \,.\, r}$$

oder gemäß Gleichung Nr. 409)

$$\frac{arc\,\zeta}{z} = \frac{Mo}{G \,.\, \mathfrak{T}r_0}.$$

Bezeichnet man $\frac{arc\,\zeta}{z}$ durch $arc\,\varepsilon$, so bedeutet $arc\,\varepsilon$ den Arcus des Verdrehungswinkels für den Abstand $z = 1$ vom festen Ende und es gilt dann

$$arc\,\varepsilon = \frac{Mo}{G\,\mathfrak{T}r_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 411)$$

[1]) Vergl. dazu § 175.

Diese Gleichung entspricht genau der Formänderungsgleichung für Biegung, falls man in dieser die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ entwickelt, d. h. sie als

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$$

schreibt, man bezeichnet sie auch hier als Formänderungsgleichung.

Für das Ende L ist $\varphi = \lambda$ und $z = l$, so daß sich hier

$$arc\,\lambda = \frac{Mo}{G\mathfrak{T}r_0} \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad 412)$$

ergiebt.

Wir haben bisher gemäß Fig. 798 die Vorstellung festgehalten, daß der cylindrische Stab am Ende A festgeklemmt ist; die Betrachtung gilt aber auch für eine, sich frei in Lagern drehende Welle, falls A einen beliebigen Querschnitt bezeichnet, gegen den die Verdrehung eines beliebigen anderen Querschnittes Z bestimmt wird; dabei bedeutet $arc\,\varepsilon$ die Verdrehung für die Bogeneinheit und $arc\,\lambda$ die Verdrehung für eine beliebige Strecke l.

Für Anwendungen hat man $\mathfrak{T}r_0 = \frac{1}{2}\pi r^4$ und $\frac{\mathfrak{T}r_0}{r} = \frac{1}{2}\pi r^3 = \frac{1}{16}\pi d^3$ für $d = 2r$.

Bei Ausnutzung des Materiales lautet also die Festigkeitsgleichung

$$Mo = \tfrac{1}{16}\pi d^3 t,$$

woraus

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,Mo}{\pi t}} \sim \sqrt[3]{\frac{5\,Mo}{t}} \quad \ldots\ldots \quad 413)$$

folgt, falls man die Abmessungen aus der Festigkeitsgleichung bestimmen will.

Hat man diese gemäß der Formänderungsgleichung (vergl. § 153) zu bestimmen, so liefert

$$arc\,\varepsilon = \frac{Mo}{G \,.\, \frac{1}{32}\pi d^4}$$

die Beziehung

$$d = \sqrt[4]{\frac{32\,Mo}{\pi G \,.\, arc\,\varepsilon}} \sim \sqrt[4]{\frac{10\,Mo}{G \,.\, arc\,\varepsilon}} \quad \ldots\ldots \quad 414)$$

wobei $arc\,\varepsilon = \frac{arc\,\lambda}{l}$ als gegeben zu betrachten ist.

Natürlich ist die Bestimmung nach Gleichung Nr. 410) von der Bestimmung nach Gleichung Nr. 411) durchaus verschieden; im ersten Falle wird eine bestimmte Spannung (t) und im zweiten Falle eine bestimmte Verdrehung ($arc\,\varepsilon$) als erfahrungsmäßig gerade noch zulässig bezeichnet.

Die Betrachtung läßt sich unmittelbar auf den Kreisring übertragen. Sind dessen Radien r_1 und r_2, so lautet die Festigkeitsgleichung hier bei Ausnutzung des Materials

$$Mo = \frac{\pi}{2}\frac{(r_1^4 - r_2^4)}{r_1} \cdot t = \frac{\pi}{16}\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} \cdot t$$

für $d_1 = 2r_1$ und $d_2 = 2r_2$.

In der Praxis pflegt man $\frac{d_1 + d_2}{2} = d$ und $\frac{d_1 - d_2}{2} = s$ einzuführen, wodurch die Festigkeitsgleichung die Gestalt

$$Mo \sim 1{,}6\, d^2 s \,.\, t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 415)$$

annimmt. Es ist nämlich zunächst

$$Mo = \frac{\pi}{16} \frac{(d_1^2 + d_2^2)(d_1^2 - d_2^2)}{d_1} \cdot t,$$

wobei $\frac{d_1^2 - d_2^2}{4} = ds$ und $d_1 = d + s$ und $d_2 = d - s$ zu setzen ist, so daß

$$Mo = \frac{\pi}{2} ds \cdot \frac{d^2 + s^2}{d + s} \cdot t$$

wird; da s gegen d klein ist, so ist $(d^2 + s^2) : (d + s) \sim d$.

Die Formänderungsgleichung für den Kreisring ist ebenso

$$arc\, \varepsilon = \frac{Mo}{G \cdot \frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4)}.$$

Aus der Verbindung der Festigkeitsgleichung und der Formänderungsgleichung folgt noch (durch Multiplikation) bei Ausnutzung des Materials für den Kreis

$$arc\, \varepsilon = t \cdot \frac{1}{r \,.\, G}$$

und für den Kreisring

$$arc\, \varepsilon = t \cdot \frac{1}{r_1 \,.\, G}.$$

Neben den betrachteten Schubspannungen treten gemäß dem allgemeinen Satze (vergl. S. 820) über das Auftreten der Schubspannungen noch andere solche Spannungen auf, wie es Fig. 801 für einen keilförmigen Ausschnitt des Cylinders zeigt. Auf diese sind die Längsrisse zurückzuführen, welche z. B. beim Verdrehen von Eisendrähten häufig auftreten.

Fig. 801.

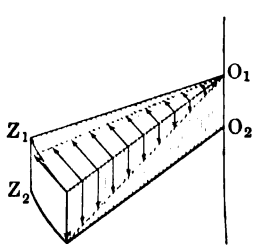
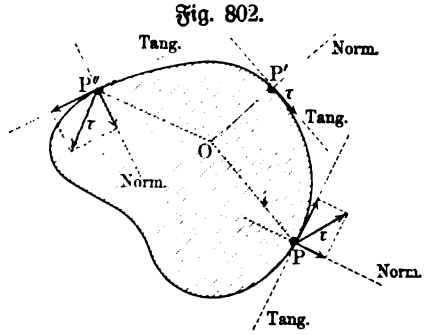


Fig. 802.



Teilt man den (abgewickelt gedachten) Mantel eines Cylinders (z. B. aus Hartblei) vor der Verdrehung in Quadrate ein, deren Seiten zur Achsenrichtung parallel und senkrecht sind, so gehen diese bei der Verdrehung in

Rhomben über, welche deutlich das paarweise Auftreten der Schubspannungen zeigen.

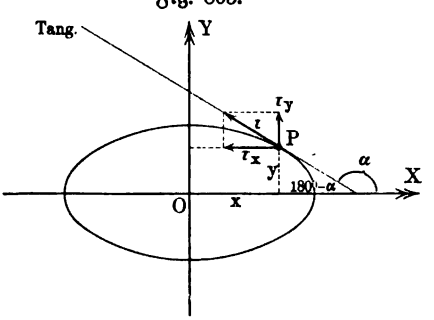
Man pflegte früher die hier entwickelte Theorie, welche für den Kreis und den Kreisring gilt, auch auf alle anderen Querschnitte zu übertragen, indem man die entwickelten Formeln Nr. 410) und Nr. 411) weiter benutzte und dabei r in Formel Nr. 410) durch den weitesten Abstand der Punkte des Querschnittes von der Drehungsachse ersetzte, entsprechend der Größe w in der entsprechenden Biegungsformel.

Die Betrachtung in § 137 lehrt, daß eine solche Übertragung durchaus unzulässig ist, weil die Oberfläche des Körpers frei von Schubspannungen ist, abgesehen etwa von solchen Teilen, in welchen diese durch äußere Kräfte hervorgerufen werden. Nach der entwickelten Theorie tritt das Maximum der Schubspannungen im Querschnitte für einen Punkt P des Umfanges auf und zwar senkrecht zu dem entsprechenden Radius OP, was bei jedem anderen Querschnitte als beim Kreise (und Kreisringe), wie Fig. 802 erläutert, zu radialen Komponenten und demgemäß nach § 137 zu Schubspannungen in der freien Mantelfläche des Körpers führen würde.

Man ist also gezwungen, die Theorie der Verdrehung für alle anderen Querschnitte von neuem aufzubauen.

170. Verdrehung eines geraden Cylinders, dessen Querschnitt eine Ellipse ist. Die Erfahrung lehrt, daß sich die ursprünglich ebenen Querschnitte bei der Verdrehung krümmen, doch so, daß das Kreuz der Hauptachsen jedes Querschnittes in seiner ursprünglichen Ebene bleibt und seinen Schnittwinkel (90°) beibehält. Die Erfahrung lehrt ferner, daß sich diese unveränderlichen Hauptkreuze der einzelnen Querschnitte hier verhalten wie die Querschnitte des vorigen Falles, d. h. daß sich die Kreuze je zweier Querschnitte von gleichem, noch so kleinem Abstande um denselben Winkel gegeneinander verdrehen. Außerdem zeigt sich, daß die Formänderungen (Verzerrung der ursprünglichen Quadrate zu Rhomben) auf dem Mantel längs der beiden Linien, welche ursprünglich durch die Endpunkte der großen Achsen der Querschnitte gingen, ein Minimum sind, für die entsprechenden Linien der kleinen Achse aber die größten Werte zeigen.

Fig. 803.



Für die Umgrenzung des Querschnittes, den Fig. 803 darstellt, gilt die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Zerlegt man die tangential gerichtete Schubspannung $[\tau]$ in einem Punkte P des Umfanges in die Komponenten $[\tau_x]$ und $[\tau_y]$ nach den Achsen, so gilt für die Werte τ_x und τ_y

$$\frac{\tau_y}{\tau_x} = tng\,(180 - \alpha) = -tng\,\alpha,$$

während aus der Gleichung der Ellipse für $tng\,\alpha$ der Wert $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ folgt. Demnach ist

$$\frac{\tau_y}{\tau_x}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Die einfachste Annahme, welche dieser Gleichung entspricht, ist die Proportionalität von τ_y und b^2x und von τ_x und a^2y.

Macht man diese Annahme und zwar nicht bloß für Punkte des Umfanges der Ellipse, sondern auch für Punkte in deren Innerem, so gelangt man zu Ergebnissen, welche mit der Erfahrung in Übereinstimmung sind.

Bezeichnet man den Faktor der Proportionalität durch p, so ist also

$$\tau_y=b^2x\,.\,p \quad \text{und} \quad \tau_x=a^2y\,.\,p.$$

Nennt man nun φ das Flächenelement bei P, für welches die Schubspannung τ gilt, so entsprechen τ_y und τ_x bezw. die Kräfte $\varphi\,.\,b^2x\,.\,p$ und $\varphi\,.\,a^2y\,.\,p$, deren Momente für O vom gleichen Sinne sind und bezw. die Werte $x\tau_y=pb^2\,.\,\varphi x^2$ und $y\tau_x=pa^2\,.\,\varphi y^2$ haben.

Bildet man diese Momente für alle Punkte des Querschnittes, so muß ihre Summe gleich dem Momente der äußeren Kräfte sein, d. h. es ist

$$Mo=pb^2\Sigma\varphi x^2+pa^2\Sigma\varphi y^2.$$

Da die Summen bezw. $\mathfrak{Tr}_y$ und $\mathfrak{Tr}_x$ sind, so gilt demnach

$$Mo=p\,(b^2\,.\,\mathfrak{Tr}_y+a^2\,.\,\mathfrak{Tr}_x),$$

d. h. es ist

$$p=\frac{Mo}{b^2\mathfrak{Tr}_y+a^2\mathfrak{Tr}_x}$$

und

$$\tau_y=b^2x\cdot\frac{Mo}{b^2\mathfrak{Tr}_y+a^2\mathfrak{Tr}_x} \quad \text{und} \quad \tau_x=a^2y\cdot\frac{Mo}{b^2\mathfrak{Tr}_y+a^2\mathfrak{Tr}_x} \qquad 416)$$

Man hat demnach für $\tau^2=\tau_x^2+\tau_y^2$ die Gleichung

$$\tau=\frac{Mo}{b^2\mathfrak{Tr}_y+a^2\mathfrak{Tr}_x}\cdot\sqrt{b^4x^2+a^4y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 417)$$

Da sich der Wert von τ mit wachsendem x und y vergrößert, so liegt das Maximum von τ in irgend einem Punkte des Umfanges. Da für Punkte des Umfanges $x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$ gilt, so ist hier $a^2y^2=a^2b^2-x^2b^2$ und demnach hat der Ausdruck unter der Wurzel von Gleichung Nr. 417) den Wert

$$b^2[a^4-x^2(a^2-b^2)].$$

Für $a>b$ ist die Klammer bei x^2 positiv und der Ausdruck hat daher sein Maximum für $x=0$, sein Minimum für $x=a$.

Demnach erhält die Schubspannung für die Endpunkte der kleinen Achse ihre größten Werte und für die Endpunkte der großen Achse ihre kleinsten Werte, wie es auch die Versuche zeigen.

Es folgt nun für $x=0$ und $y=b$ aus Nr. 417)

$$\tau_{max}=\frac{ab\,.\,Mo}{b^2\mathfrak{Tr}_y+a^2\mathfrak{Tr}_x}\cdot a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 418a)$$

und für $x = a$ und $y = 0$

$$\tau_{min} = \frac{ab \,.\, Mo}{b^2 \mathfrak{T}r_y + a^2 \mathfrak{T}r_x} \cdot b \quad \ldots \ldots \quad 418\,b)$$

Führt man noch $\mathfrak{T}r_x = \frac{1}{4}\pi a b^3$ und $\mathfrak{T}r_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ ein, so ergiebt sich

$$\tau_{max} = \frac{2\,Mo}{ab^2\pi} = \frac{a}{b} \cdot \tau_{min} \quad \text{und} \quad \tau_{min} = \frac{2\,Mo}{a^2 b\pi} = \frac{b}{a} \cdot \tau_{max} \qquad 419)$$

Bezeichnet man die zulässige Schubspannung bei Beanspruchung auf Verdrehung durch t, so gilt also bei Ausnutzung des Materials

$$Mo = \frac{ab^2\pi}{2} \cdot t \quad \ldots \ldots \quad 420)$$

Da die Verdrehung für die Achsenkreuze der Querschnitte dieselben Beziehungen zeigt, wie für die Querschnitte des Kreiscylinders, so kann man den elliptischen Cylinder für die Bestimmung von $arc\,\varepsilon$ ersetzt denken durch einen Cylinder vom Radius a, für dessen Mantel die Schiebung $\vartheta_a = a \,.\, arc\,\varepsilon$ ist, oder durch einen Cylinder vom Radius b, für dessen Mantel die Schiebung $\vartheta_b = b \,.\, arc\,\varepsilon$ ist. Nach der Gleichung $\tau = \vartheta \,.\, G$ entspricht ϑ_a eine ideale Spannung τ_a und ϑ_b eine ideale Spannung τ_b, so daß

$$\vartheta_a = a \,.\, arc\,\varepsilon = \frac{\tau_a}{G} \quad \text{und} \quad \vartheta_b = b \,.\, arc\,\varepsilon = \frac{\tau_b}{G}$$

ist und $arc\,\varepsilon$ durch

$$\frac{1}{G} \cdot \frac{\tau_a}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{G} \cdot \frac{\tau_b}{b}$$

dargestellt wird, wobei sich $\frac{\tau_a}{a} = \frac{\tau_b}{b}$ ergiebt.

Die idealen Spannungen τ_a und τ_b stimmen nicht überein mit den thatsächlich vorhandenen Spannungen τ_{min} und τ_{max}, da dann der kleineren Spannung die größere Schiebung und der größeren Spannung die kleinere Schiebung entsprechen müßte.

Man bleibt mit der Erfahrung in Übereinstimmung, wenn man annimmt, daß die gleichen Größen $\frac{\tau_a}{a}$ und $\frac{\tau_b}{b}$ gleich dem arithmetischen Mittel aus $\frac{\tau_{min}}{a}$ und $\frac{\tau_{max}}{b}$ sind [1]).

Man hat dann

$$G \,.\, arc\,\varepsilon = \frac{\tau_a}{a} = \frac{\tau_b}{b} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\,Mo}{ab\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 \pi} \cdot Mo$$

und

$$arc\,\varepsilon = \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 \pi} \cdot \frac{Mo}{G} \quad \ldots \ldots \quad 421)$$

Aus Gleichung Nr. 418) und Nr. 421) folgt noch

$$arc\,\varepsilon = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b} \cdot \frac{\tau_{max}}{2\,G} = \frac{a^2 + b^2}{ab^2} \cdot \frac{\tau_{min}}{2\,G} \quad \ldots \ldots \quad 422)$$

[1]) Vergl. dazu auch § 173.

Was die Verteilung der Spannungen im Querschnitte anlangt, so folgt für die Strecke OP in Fig. 804, wo $P = (\xi; \eta)$ ist, zunächst gemäß Nr. 417) für P

$$\tau = \frac{2\,Mo}{\pi a^3 b^3}\sqrt{b^4\xi^2 + a^4\eta^2},$$

so daß $[\tau]$ in der Tangente von P als PT aufgetragen werden kann. Da $y : x = tng\,\varepsilon$ für alle Punkte von OP gilt, so ist auch $\tau_x : \tau_y = \frac{a^2}{b^2} \cdot tng\,\varepsilon$ für alle Punkte von OP, d. h. die Spannungen $[\tau]$ sind für alle Punkte von OP parallel und werden durch die Strecke OT abgegrenzt.

Die Betrachtung läßt sich unmittelbar übertragen auf einen ringförmigen Querschnitt, der von zwei konzentrischen ähnlichen Ellipsen in ähnlicher Lage gebildet wird. Es gelten hier entsprechende Betrachtungen wie für den Kreisring.

In Bezug auf die Schubspannungen für Schnitte durch die Achse gilt Entsprechendes wie auf S. 1096.

Fig. 804.

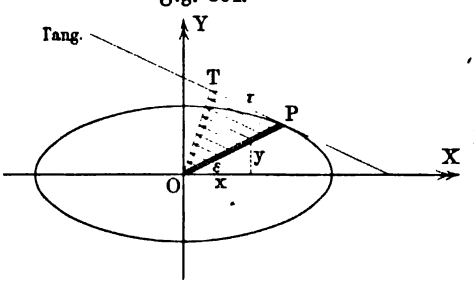
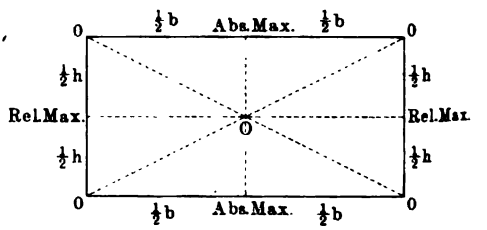
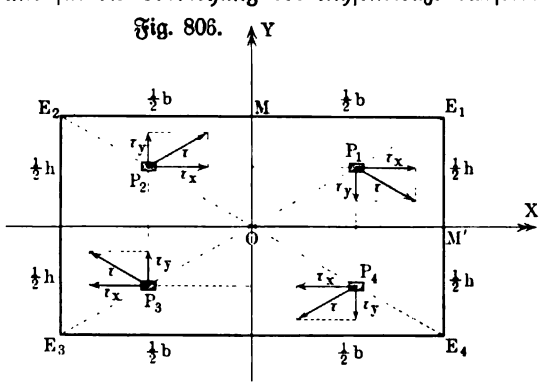


Fig. 805.



171. Verdrehung eines geraden Stabes, dessen Querschnitt ein Rechteck ist. Die Erfahrung lehrt, daß für die Krümmung der Querschnitte und für die Verdrehung der Achsenkreuze dasselbe gilt, wie für den elliptischen Cylinder. Außerdem zeigt sich, daß auf dem Mantel längs der Kanten des Stabes überhaupt keine Formänderungen (Verzerrung der ursprünglichen Quadrate zu Rhomben) auftreten, daß hingegen Maxima der Formänderungen in den Mittellinien zwischen je zwei Kanten vorhanden sind und daß die absoluten Maxima für die Mitten der größeren Rechteckseiten auftreten, also der Achse am nächsten liegen.

Fig. 806.



Durch Fig. 805 wird diese Thatsache für einen beliebigen Querschnitt veranschaulicht.

Um eine mit der Erfahrung übereinstimmende Verteilung der Spannungen zu erhalten, betrachten wir den Querschnitt in Fig. 806, in welchem für P_1 willkürlich die Spannung $[\tau]$ eingezeichnet ist. Die Punkte P_2, P_3, P_4, welche im Querschnitte dieselbe relative Lage haben, wie P_1, müssen dann die eingezeichneten Größen $[\tau]$ zeigen, weil die Verdrehung durch das von außen wirkende Kräftepaar innere Momente von gleichem Sinne hervorruft. Zunächst ist die Einzeichnung für P_3 durch P_1 bestimmt, damit aber auch, mit Rücksicht auf den einheitlichen Sinn der Drehung, für P_2 und P_4. Zerlegt man diese vier Spannungen τ in ihre Komponenten nach den Achsen, so ergiebt sich in Bezug auf die Koordinaten von P_1, P_2, P_3, P_4 Folgendes:

1) τ_x ist positiv für y_1 und y_2, welche beide positiv sind,
2) τ_x ist negativ für y_3 und y_4, welche beide negativ sind,
3) τ_x ist positiv für x_1, welches positiv, und positiv für x_2, welches negativ ist,
4) τ_x ist negativ für x_3, welches negativ, und negativ für x_4, welches positiv ist.

Demnach ist τ_x eine gerade Funktion von x und eine ungerade Funktion von y. Ebenso ist τ_y eine gerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von x.

Man hat also für τ_x und τ_y möglichst einfache Funktionen von x und y zu bilden, welche allen aufgestellten Bedingungen genügen, auch der Bedingung, daß die Schubspannungen in den Grenzen des Querschnittes tangential verlaufen und also in E_1, E_2, E_3, E_4 den Wert Null haben.

Man sieht sofort, daß eine Funktion ersten Grades von x und y diese Bedingungen nicht erfüllt.

Eine Funktion zweiten Grades hat Glieder mit x^2, xy, y^2, x, y und ein Absolutglied. Versuchen wir τ_x durch eine solche darzustellen, so erhält τ_x die Gestalt

$$\tau_x = m_1 x^2 + m_2 y + m_3.$$

Da $\tau_x = 0$ ist für die Mitte $O = (0; 0)$, so ist $m_3 = 0$.

Da $\tau_x = 0$ ist für $E_1 E_4$ und für $E_2 E_3$ wegen der tangentialen Bedingung, so ist $\tau_x = 0$ für $x = \pm \frac{b}{2}$ bei beliebigem Werte von y in den Grenzen $-\frac{h}{2} \cdots 0 \cdots +\frac{h}{2}$, d. h. es ist

$$m_1 \frac{b^2}{4} + m_2 y = 0$$

für jedes y in diesen Grenzen, d. h. es ist $m_2 = 0$ und also auch $m_1 = 0$.

Man sieht, daß auch eine Funktion zweiten Grades für die Darstellung von τ_x nicht genügt.

Eine Funktion dritten Grades hat außer den Gliedern der Funktion zweiten Grades noch Glieder mit x^3, $x^2 y$, xy^2, y^3. Für die Darstellung von τ_x kommen die Glieder mit $x^2 y$ und y^3 in Frage, so daß τ_x jetzt die Gestalt

$$\tau_x = m_1 x^2 y + m_2 y^3 + m_3 x^2 + m_4 y + m_5$$

erhält.

Da $\tau_x = 0$ ist für die Mitte $O = (0; 0)$, so ist $m_5 = 0$.

Da $\tau_x = 0$ ist für E_1E_4 und für E_2E_3, so gilt

$$m_1 \frac{b^2}{4} y + m_2 y^3 + m_3 \frac{b^2}{4} + m_4 y = 0$$

für jeden Wert von y in den Grenzen $-\frac{h}{2} \cdots 0 \cdots +\frac{h}{2}$, d. h. man hat

$$m_2 = 0 \quad \text{und} \quad m_1 \frac{b^2}{4} + m_4 = 0 \quad \text{und} \quad m_3 = 0.$$

Demnach erhält τ_x die Gestalt

$$\tau_x = m_1 x^2 y - m_1 \frac{b^2}{4} y$$

oder, wenn wir m für m_1 schreiben,

$$\tau_x = m\left(x^2 y - \frac{b^2}{4} y\right).$$

Ebenso ergiebt sich

$$\tau_y = n\left(x y^2 - \frac{h^2}{4} x\right).$$

Da für einen quadratischen Querschnitt $[\tau_x]$ in M und $[\tau_y]$ in M' denselben Wert erhält, so muß der Wert von $[\tau_x]$ für $x = 0$ und $y = \frac{h}{2}$ mit dem Werte von $[\tau_y]$ für $x = \frac{b}{2}$ und $y = 0$ übereinstimmen, falls $b = h$ ist.

Da $[\tau_y]$ in P_1 und in M' die Richtung der negativen Y-Achse hat, falls $[\tau_x]$ in P_1 und in M die Richtung der positiven X-Achse hat, so ist demnach

$$\pm m\left(-\frac{b^2}{4} \cdot \frac{h}{2}\right) = \mp n\left(-\frac{h^2}{4} \cdot \frac{b}{2}\right) \text{ für } b = h,$$

d. h. es ist $m = -n$.

Demnach gilt

$$\tau_x = m\left(x^2 y - \frac{b^2}{4} y\right) \quad \text{und} \quad \tau_y = -m\left(y^2 x - \frac{h^2}{4} x\right).$$

Bilden wir nun das Moment der inneren Kräfte, das dem Momente Mo der äußeren Kräfte das Gleichgewicht hält, so entspricht $[\tau_x]$ in P_1 für ein Flächenelement φ die Kraft $\varphi\tau_x$ und für O als Drehpunkt das Moment $+(\varphi\tau_x) \cdot y$, während die entsprechende Größe für $[\tau_y]$ in P_1 als $-(\varphi\tau_y) \cdot x$ anzusetzen ist, weil $[\tau_y]$ selbst in P_1 negativ ist.

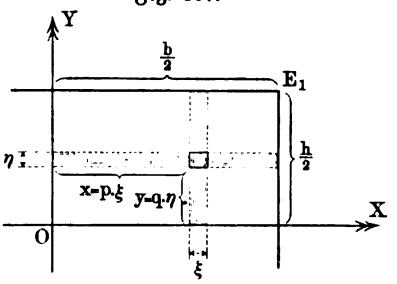
Man hat also für den ganzen Querschnitt

$$\begin{aligned} Mo &= \Sigma[(\varphi\tau_x) \cdot y - (\varphi\tau_y) \cdot x] \\ &= m\Sigma\left[\varphi x^2 y^2 - \varphi\frac{b^2}{4} y^2 + \varphi y^2 x^2 - \varphi\frac{h^2}{4} x^2\right] \\ &= m\left[2\Sigma\varphi x^2 y^2 - \frac{b^2}{4}\Sigma\varphi y^2 - \frac{h^2}{4}\Sigma\varphi x^2\right]. \end{aligned}$$

Die erste Summe muß besonders berechnet werden, während die anderen beiden Summen bezw. $\mathfrak{T}r_x$ und $\mathfrak{T}r_y$ sind.

Um die erste Summe darzustellen, teilen wir den ersten Quadranten des Rechtecks in unter sich kongruente Rechtecke von der Breite ξ und der Höhe η, so daß $\frac{b}{2} = n \,.\, \xi$ und $\frac{h}{2} = n \,.\, \eta$ ist. Für ein Rechteck von der Fläche $\xi\eta$, wie es Fig. 807 darstellt, ist dann $x = p\xi$ und $y = q\eta$ zu setzen, so daß $\varphi x^2 y^2 = p^2 q^2 \xi^3 \eta^3$ ist. Für einen Streifen, parallel zur X-Achse, ist q konstant, während $p = 0, 1, \ldots n$ zu setzen ist, so daß man für diesen Streifen

Fig. 807.



$$\Sigma \varphi x^2 y^2 = q^2 \xi^3 \eta^3 \Sigma p^2$$

erhält, was für $lim\, n = \infty$ zu

$$\tfrac{1}{3} q^2 \eta^3 \left(\frac{b}{2}\right)^3$$

führt.

Summiert man die Streifen für $q = 0, 1, \ldots n$, so erhält man für den Quadranten ebenso

$$\Sigma \varphi x^2 y^2 = \tfrac{1}{9} \left(\frac{b}{2}\right)^3 \left(\frac{h}{2}\right)^3.$$

Für die ganze Fläche ist also

$$\Sigma \varphi x^2 y^2 = \tfrac{4}{9} \left(\frac{b}{2}\right)^3 \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b^3 h^3}{16 \,.\, 9}.$$

Man hat also

$$Mo = m\left[2\,\frac{b^3 h^3}{16 \,.\, 9} - \frac{b^2}{4}\mathfrak{Tr}_x - \frac{h^2}{4}\mathfrak{Tr}_y\right]$$

oder, da $\mathfrak{Tr}_x = \frac{b h^3}{12}$ und $\mathfrak{Tr}_y = \frac{b^3 h}{12}$ ist,

$$Mo = -m \cdot \frac{b^3 h^3}{36} \quad \text{und} \quad m = -\frac{36\, Mo}{b^3 h^3}.$$

Demnach ist

$$\tau_x = \frac{9\, Mo}{b h^3} \cdot y\left[1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad \tau_y = -\frac{9\, Mo}{b^3 h} \cdot x\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right].$$

Für die Umgrenzung des Querschnittes gilt Folgendes:

Für $x = \pm\frac{b}{2}$ ist $\tau_x = 0$, während τ_x für $y = \pm\frac{h}{2}$ den Wert $\pm\frac{9\, Mo}{2 b h^2}\left[1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]$ annimmt, der für $x = 0$ sein Maximum $\pm\frac{9\, Mo}{2 b h^2}$ erreicht, so daß dieses in der Mitte von $E_1 E_2$ und $E_3 E_4$ liegt.

Für $y = \pm\frac{h}{2}$ ist $\tau_y = 0$, während τ_y für $x = \pm\frac{b}{2}$ den Wert $\mp\frac{9\, Mo}{2 b^2 h}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$ annimmt, der für $y = 0$ sein Maximum $\mp\frac{9\, Mo}{2 b^2 h}$ erreicht, so daß dieses in der Mitte von $E_2 E_3$ und $E_4 E_1$ liegt.

Für $b > h$ überwiegt das Maximum von τ_x, für $h > b$ überwiegt das Maximum von τ_y, d. h. für die Umgrenzung des Querschnittes liegt das absolute Maximum innerhalb der längeren Seite (in der Mitte), also der Achse am nächsten.

Um etwaige Maxima im Inneren des Querschnittes zu bestimmen, bilden wir die Gesamtspannung

$$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$$
$$= \left(\frac{9\,Mo}{bh^3}\right)^2 \cdot y^2\left[1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{9\,Mo}{b^3h}\right)^2 \cdot x^2\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]^2,$$

für welche $-\frac{b}{2} < x < +\frac{b}{2}$ und $-\frac{h}{2} < y < +\frac{h}{2}$ anzusetzen ist.

Für $b > h$ ist es zweckmäßig, dem Ausdrucke für τ^2 die Form zu geben

$$\left(\frac{9\,Mo}{2\,bh^2}\right)^2\left[\frac{4y^2}{h^2}\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2 + \frac{4x^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{b^2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2\right].$$

Da $4x^2 < b^2$ und $4y^2 < h^2$ und $h^2 < b^2$ ist, so sind alle fünf Größen in der Klammer positive echte Brüche, d. h. der Wert der Klammer ist < 2.

Man kann nun leicht zeigen, daß der Wert der Klammer sogar < 1 ist.

Setzt man $\frac{4x^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{b^2} = \varepsilon$ und $\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2 = \varepsilon'$, so hat die Klammer den Wert

$$\frac{4y^2}{h^2} \cdot \varepsilon' + \varepsilon\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2,$$

welcher kleiner ist als

$$\frac{4y^2}{h^2} + \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 = 1 - \frac{4y^2}{h^2} + \frac{16y^4}{h^4} = 1 - \frac{4y^2}{h^2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Da $1 - \frac{4y^2}{h^2}$ ein echter Bruch ist, so ist

$$1 - \frac{4y^2}{h^2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) < 1 - \frac{4y^2}{h^2} < 1.$$

Demnach bleiben die Werte von τ^2 innerhalb des Querschnittes für $b > h$ stets unterhalb der Grenze

$$\left(\frac{9\,Mo}{2\,bh^2}\right)^2.$$

Da aber $\tau_x = \pm\frac{9\,Mo}{2\,bh^2}$ für $b > h$ das Maximum von τ für die Umgrenzung des Querschnittes war, so ist dieser Wert überhaupt das Maximum von τ.

Für $b > h$ gilt demnach bei Ausnutzung des Materials

$$\tau_{max} = (\tau_x)_{max} = \frac{9\,Mo}{2\,bh^2} = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 423)$$

Um den Verdrehungswinkel zu bestimmen, setzen wir wieder, ähnlich wie beim elliptischen Querschnitt,

$$arc\,\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(\tau_y)_{max}}{\frac{1}{2}b} + \frac{(\tau_x)_{max}}{\frac{1}{2}h}\right)\cdot\frac{1}{G}$$

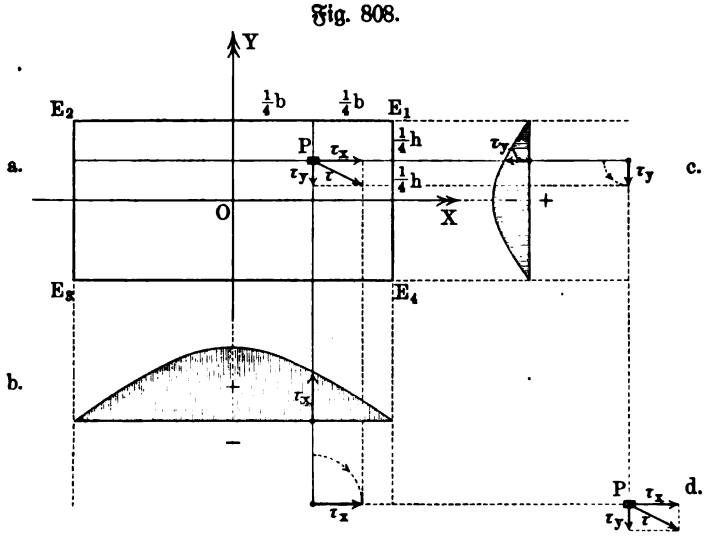
und erhalten so

$$arc\,\varepsilon = \tfrac{9}{2}\cdot\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\cdot\frac{Mo}{G}.$$

Diese Formel ist mit der Erfahrung nicht in Übereinstimmung, aber die thatsächlich auftretenden Werte von $arc\,\varepsilon$ betragen in großer Annäherung vier Fünftel der Werte, welche jene Formel giebt. Man erhält also mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Versuche [1]) hier

$$arc\,\varepsilon = 3{,}6\,\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\cdot\frac{Mo}{G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 424)$$

Fig. 808.



Bestimmt man noch aus Gleichung Nr. 423) und Nr. 424) $arc\,\varepsilon$ in Beziehung zu $(\tau_x)_{max}$ oder $(\tau_y)_{max}$, so ist

$$arc\,\varepsilon = 0{,}8\,\frac{(\tau_x)_{max}}{G}\,\frac{b^2+h^2}{b^2h} \quad \text{oder} \quad 0{,}8\,\frac{(\tau_y)_{max}}{G}\,\frac{b^2+h^2}{bh^2} \quad \ldots \quad 425)$$

Was die Verteilung der Spannungen im Querschnitte anlangt, so ist τ_x für ein konstantes y, d. h. also für eine Faser, parallel zu OX, nach einer Parabel veränderlich, ebenso τ_y für ein konstantes x, d. h. also für eine Faser, parallel zu OY.

Für $y = +\frac{1}{4}h$ ist z. B. $\tau_x = +\frac{9\,Mo}{bh}\cdot\frac{\frac{1}{4}h}{h^2}\left[1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]$ und für $x = +\frac{1}{4}b$ ist z. B. $\tau_y = -\frac{9\,Mo}{bh}\cdot\frac{\frac{1}{4}b}{b^2}\left[1-\left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$, so daß für $b = 2h$

[1]) Vergl. auch § 173.

die Fasern in Fig. 808 a (a. v. S.), welche sich in P durchkreuzen, die Spannungen der Fig. 808 b und c zeigen, woraus für P die Spannung $[\tau]$ folgt.

Für $y = 0$, d. h. für die Achse OX ist $\tau_x = 0$, für $x = 0$, d. h. für die Achse OY ist $\tau_y = 0$.

Für $y = \pm\frac{h}{2}$, d. h. für E_1E_2 oder E_3E_4 zeigt die entsprechende Parabel für τ_x ihre größte Pfeilhöhe, während $\tau_y = 0$ ist, für $x = \pm\frac{b}{2}$, d. h. für E_2E_3 und E_1E_4 zeigt die entsprechende Parabel für τ_y ihre größte Pfeilhöhe, während $\tau_x = 0$ ist.

Die Betrachtung läßt sich unmittelbar übertragen auf einen Querschnitt, der aus zwei konzentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Rechtecken gebildet wird; es gelten hier entsprechende Betrachtungen wie für den Kreisring.

Fig. 809.

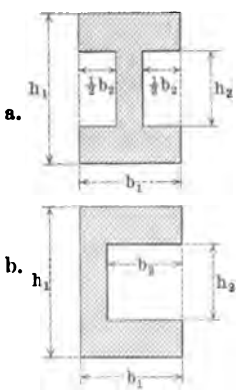
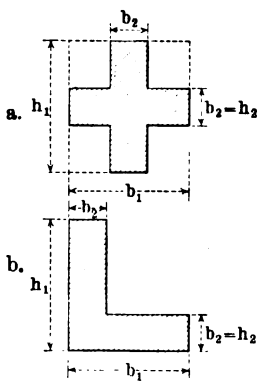


Fig. 810.



In Bezug auf die Schubspannungen für Schnitte durch die Achse gilt Entsprechendes wie auf S. 1096.

172. Vergleichung der Ergebnisse der §§ 169 bis 171. Will man die Festigkeitsgleichung in diesem ganzen Gebiete festhalten, so darf man **nicht**, wie es wohl früher geschah, das polare Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r_0$ (vergl. S. 1094) einführen, sondern das kleinere der beiden achsialen Trägheitsmomente $\mathfrak{T}r$. Es ist dann

$$Mo \leqq \nu \,.\, t \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w},$$

wobei

$\nu = 2$ für den Kreis und Kreisring, die Ellipse und den Ellipsenring,
$\nu = \frac{4}{3}$ für das Rechteck ist

und wobei

w den kleineren unter den Abständen der äußersten Fasern von den Achsen OX und OY bezeichnet, falls diese Abstände verschieden sind.

Dieser Formel folgen auch gerade Stäbe, deren Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck oder ein gleichseitiges Sechseck ist.

Für den Querschnitt der Fig. 809 a gilt für $h_1 - h_2 \sim 2(b_1 - h_2)$

$$Mo \leqq \tfrac{1}{18}(h_1 + 2b_2)(h_1 - h_2)^2 \,.\, t.$$

Dieselbe Formel gilt auch angenähert für den Querschnitt der Fig. 809 b, falls $\frac{3}{5}h_1 \geqq h_2$ und $2b_2 \sim h_1 - h_2$ ist.

Für den Querschnitt der Fig. 810 a gilt

$$Mo \leqq \tfrac{2}{9} b_2^2 (h_1 + b_1 - b_2) t.$$

Dieselbe Formel gilt auch angenähert für den Querschnitt der Fig. 810 b, falls $b_2 \geqq \frac{1}{5} h_1$ ist.

Die Formeln für $arc\,\varepsilon$ kann man bei den betrachteten Querschnitten zusammenfassen durch die Gleichung

$$arc\,\varepsilon = \frac{\nu}{4} \left(\frac{1}{\mathfrak{Tr}_x} + \frac{1}{\mathfrak{Tr}_y} \right) \cdot \frac{Mo}{G}$$

und zwar ist stets $\nu = 1$, abgesehen vom rechtwinkligen Querschnitt, bei welchem mit Rücksicht auf die angegebene Verbesserung $\nu = 1{,}2$ zu setzen ist.

173. Die Arbeit der Formänderung bei Verdrehungen und die Bestimmung von $arc\,\varepsilon$. Die abgeleiteten Formeln für $arc\,\varepsilon$ lassen auch in theoretischer Hinsicht eine Rechtfertigung zu, wenn man die **Formänderungsarbeit** für Verdrehungen einführt.

Da die Arbeit hier von den Schubspannungen abhängt, so gilt für die Volumeinheit (vergl. S. 883) der Ansatz $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$.

Betrachtet man eine Faser von der Länge l, welche ursprünglich der Stabachse parallel war, so ist deren Volumen bei einem Querschnitte φ gegeben als $\varphi \,.\, l$, und demnach ist die Arbeit für den ganzen Stab darstellbar als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{l}{G} \cdot \Sigma \varphi \tau^2.$$

Für den Kreisquerschnitt (vergl. S. 1094) ist $\tau_\varrho = \frac{\varrho}{r} \cdot \tau_r$, so daß man hier erhält

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{l}{G} \cdot \frac{\tau_r^2}{r^2} \Sigma \varphi \varrho^2 = \tfrac{1}{2} \frac{l}{G} \cdot \frac{\tau_r^2}{r^2} \cdot \mathfrak{Tr}_0 \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 426)$$

Da $\mathfrak{Tr}_0 = \frac{1}{2} \pi r^4$ ist, so ist bei Ausnutzung des Materials ($\tau_r = t$)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4} \frac{t^2}{G} (l \pi r^2) = \tfrac{1}{4} \frac{t^2}{G} \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 427)$$

falls man das Volumen V des Stabes als $V = l \pi r^2$ einführt.

Ist Mo das Moment der äußeren Kräfte, welche auf Verdrehung wirken, so ist deren Arbeit, entsprechend einer Verdrehung von $0 \ldots \lambda$ gegeben als $Mo \,.\, arc\,\lambda$. Die Hälfte dieser Arbeit (vergl. S. 865) wird wieder auf Formänderung verwandt, die andere Hälfte auf Drehungsschwingungen.

Mit Rücksicht auf Gleichung Nr. 426) hat man also, da $arc\,\lambda = l \,.\, arc\,\varepsilon$ ist,

$$\tfrac{1}{2} Mo \,.\, l \,.\, arc\,\varepsilon = \tfrac{1}{2} \frac{l}{G} \cdot \frac{\tau_r^2}{r^2} \cdot \mathfrak{Tr}_0.$$

Daraus folgt

$$arc\,\varepsilon = \frac{\tau_r^2}{r^2} \cdot \frac{\mathfrak{Tr}_0}{Mo} \cdot \frac{1}{G},$$

und mit Rücksicht auf Gleichung Nr. 410)

$$arc\,\varepsilon = \frac{1}{\mathfrak{Tr}_0} \cdot \frac{Mo}{G} = \frac{2}{\pi r^4} \cdot \frac{Mo}{G},$$

wie schon auf S. 1094 angegeben wurde.

Für den elliptischen Querschnitt ist (vergl. S. 1098)

$$\tau^2 = \frac{Mo^2}{(b^2\mathfrak{Tr}_y + a^2\mathfrak{Tr}_x)^2}\,(b^4x^2 + a^4y^2).$$

Demnach ist

$$\Sigma\tau^2\varphi = \frac{Mo^2}{(b^2\mathfrak{Tr}_y + a^2\mathfrak{Tr}_x)^2} \cdot (b^4\mathfrak{Tr}_y + a^4\mathfrak{Tr}_x)$$

oder, da $\mathfrak{Tr}_y = \frac{\pi}{4}a^3b$ und $\mathfrak{Tr}_x = \frac{\pi}{4}ab^3$ ist,

$$\Sigma\tau^2\varphi = \frac{Mo^2}{\pi} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3b^3},$$

und man hat demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3b^3} \cdot \frac{l}{G} \cdot Mo^2 \quad \ldots\ldots 428)$$

Führt man (vergl. S. 1099) ein $Mo = \frac{ab^2\pi}{2} \cdot t$, so ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{t^2}{G} \cdot (ab\pi l)$$

$$= \tfrac{1}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{t^2}{G} \cdot V,$$

falls man $ab\pi \,.\, l = V$ setzt.

Aus $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}Mo \,.\, arc\,\lambda = \frac{1}{2}Mo \,.\, l \,.\, arc\,\varepsilon$ folgt in Verbindung mit Gleichung Nr. 428)

$$arc\,\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3b^3} \cdot \frac{Mo}{G},$$

wie auf S. 1099 angegeben wurde.

Für das Rechteck als Querschnitt hat man

$$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 = m^2\left[\left(x^2y - \frac{b^2}{4}y\right)^2 + \left(y^2x - \frac{h^2}{4}x\right)^2\right]$$

$$= m^2\left[x^4y^2 + y^4x^2 - \tfrac{1}{2}x^2y^2(b^2 + h^2) + \frac{b^4}{16}y^2 + \frac{h^4}{16}x^2\right].$$

Man hat also zunächst noch $\Sigma x^4y^2\varphi$ und $\Sigma x^2y^4\varphi$ zu berechnen. Das Verfahren, welches für die Auswertung von $\Sigma x^2y^2\varphi$ angewendet wurde, giebt hier ohne weiteres

$$\Sigma x^4y^2 = \frac{b^5h^3}{960} \quad \text{und} \quad \Sigma x^2y^4 = \frac{b^3h^5}{960}.$$

Demnach ist

$$\Sigma\tau^2\varphi = m^2\left[\frac{b^5h^3}{960} + \frac{b^3h^5}{960} - \tfrac{1}{2}(b^2 + h^2) \cdot \frac{b^3h^3}{144} + \frac{b^4}{16} \cdot \frac{bh^3}{12} + \frac{h^4}{16} \cdot \frac{b^3h}{12}\right]$$

$$= m^2\,\frac{b^3h^3}{360}(b^2 + h^2) = \frac{36^2 \,.\, Mo^2}{(b^3h^3)^2} \cdot \frac{b^3h^3}{360}(b^2 + h^2) = \tfrac{18}{5} \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3h^3} \cdot Mo^2.$$

Demnach gilt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{l}{G}\Sigma\tau^2\varphi = \tfrac{2}{5}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\cdot\frac{l}{G}\cdot Mo^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 429)$$

Aus Gleichung Nr. 423) folgt $Mo = \frac{2}{3}bh^2 \,.\, t$, so daß auch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{5}\cdot\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\cdot\frac{l}{G}\cdot\tfrac{4}{81}t^2\,.\,b^2h^4$$

$$= \tfrac{4}{45}\cdot\frac{b^2+h^2}{b^2}\cdot(bhl)\cdot\frac{t^2}{G}$$

$$= \tfrac{4}{45}\cdot\frac{b^2+h^2}{b^2}\cdot\frac{t^2}{G}\cdot V$$

für $V = bhl$.

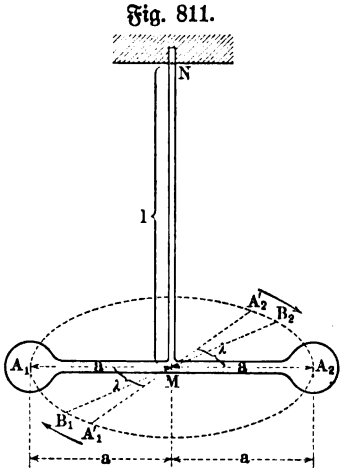
Aus $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}Mo \,.\, arc\,\lambda = \frac{1}{2}Mo \,.\, l \,.\, arc\,\varepsilon$ folgt in Verbindung mit Gleichung Nr. 429)

$$arc\,\varepsilon = 3{,}6\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\cdot\frac{Mo}{G},$$

wie es auf S. 1105 angegeben wurde.

174. Drehungsschwingungen. Ein dünner Stab oder Draht NM trägt, wie Fig. 811 zeigt, an seinem unteren Ende einen mit Endkugeln belasteten Querstab A_1A_2. Wird dieser durch äußere Kräfte in die Lage $A_1'A_2'$ gebracht und dann sich selbst überlassen, so kehrt er vermöge der Verdrehung von NM in seine Ruhelage zurück, bewegt sich über diese hinaus, kehrt um u. s. w.

Fig. 811.



Das Moment Mo der inneren Kräfte des tordierten Stabes NM, welches die Bewegung des Querstabes aus der Lage $A_1'A_2'$ einleitet, ist gemäß S. 1095 für $\sphericalangle A_2'MA_2 = \lambda$

$$Mo = \frac{G \,.\, \mathfrak{T}r_0 \,.\, arc\,\lambda}{l},$$

falls MN ein Kreiscylinder ist.

Bezeichnet Tr das Trägheitsmoment der bewegten Masse, so gilt für die Winkelbeschleunigung ι der beginnenden Bewegung gemäß der Gleichung $\iota = \frac{Mo}{Tr}$ hier

$$\iota = -\frac{G \,.\, \mathfrak{T}r_0 \,.\, arc\,\lambda}{l \,.\, Tr},$$

so daß die Tangentialbeschleunigung der beginnenden Bewegung auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{A_1'A_1}$ oder $\overset{\frown}{A_2'A_2} = s$

$$j_T = \iota a = -\frac{G \,.\, \mathfrak{T}r_0 \,.\, (a \,.\, arc\,\lambda)}{l \,.\, Tr} = -\frac{G \,.\, \mathfrak{T}r_0}{l \,.\, Tr}\cdot s$$

ist.

Während der Bewegung ändert sich Mo proportional mit dem Arcus des Drehungswinkels und infolgedessen auch ι, so daß j_T nicht bloß für die Anfangslage $A_1' A_2'$, sondern auch für jede andere Lage $B_1 B_2$ durch die aufgestellte Formel bestimmt ist, falls s den veränderlichen Bogen $\overset{\frown}{B_1 A_1} = \overset{\frown}{B_2 A_2}$ bezeichnet.

Demnach ist die betrachtete Schwingung harmonisch (vergl. S. 172) mit $k = \frac{G \,.\, \mathfrak{T}r_0}{l \,.\, Tr}$ und infolgedessen gilt für die Dauer einer Doppelschwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \,.\, Tr}{G \,.\, \mathfrak{T}r_0}}.$$

Man hat also zur Bestimmung des Elasticitätsmoduls G die Gleichung

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{l \,.\, Tr}{\mathfrak{T}r_0},$$

in welcher $\mathfrak{T}r_0$ das polare Trägheitsmoment für den Querschnitt des kreisförmigen (r) Stabes MN ist, also $\frac{1}{2}\pi r^4$ beträgt, während Tr das Trägheitsmoment der sich bewegenden Masse bezeichnet.

175. Materialkonstanten. Aus entsprechenden Gründen wie bei der Biegung pflegt man durch Versuche besondere Werte für die Spannungen bei Verdrehungen festzustellen. Man bezeichnet die Bruchspannung für Verdrehung durch K_d, die Konstruktionsspannung (zulässige Spannung) durch k_d.

Es ist dann für Schmiedeeisen (Fluß- und Schweißeisen) die der Tragfestigkeit entsprechende Konstruktionsspannung

$$k_d = 360 \text{ Atm. bis } 840 \text{ Atm.}$$

Der Ursprungsfestigkeit entsprechen hier als Konstruktionsspannungen

$$k_d = 240 \text{ Atm. bis } 560 \text{ Atm.}$$

Der Schwingungsfestigkeit entsprechen hier als Konstruktionsspannungen

$$k_d = 120 \text{ Atm. bis } 280 \text{ Atm.}$$

Diese Werte sind also erheblich kleiner als die entsprechenden Werte von t, welche für den einfachen Schub maßgebend sind.

Fünfte Abteilung.

Knickung gerader Stäbe und Biegung bei excentrischer Belastung, sowie Biegung gespannter Balken.

176. **Die Knickung.** In den einleitenden Bemerkungen über Zug und Druck wurde schon darauf hingewiesen, daß bei einem, auf Druck beanspruchten Stabe von einer gewissen Länge ab die Gefahr der Knickung zu berücksichtigen ist. Da das verwandte Material nie vollkommen homogen ist, weder das Material, von dem der Druck ausgeht, noch das Material des gedrückten Stabes, so ist auch, ganz abgesehen von anderen geringen Ungenauigkeiten der Ausführung, niemals darauf zu rechnen, daß die Gerade, in welcher sich die Kraft verdichtet, mit der geometrisch bestimmten Stabachse genau zusammenfällt, zumal ja auch der Druck sofort Formänderungen hervorruft, welche auch den theoretischen Ansätzen nur angenähert entsprechen. Infolgedessen hat man stets vorauszusetzen, daß statt des theoretischen Bildes der Fig. 812 a für die Praxis die Darstellung der Fig. 812 b eintritt, bei welcher die Druckkraft P um eine geringe Strecke a gegen die Achse verschoben ist. Gegenüber der centrischen Belastung der Fig. 812 a hat man also die excentrische Belastung der Fig. 812 b zu behandeln, welcher eine Biegung der Achse, wie sie Fig. 813 darstellt, entspricht.

Fig. 812.

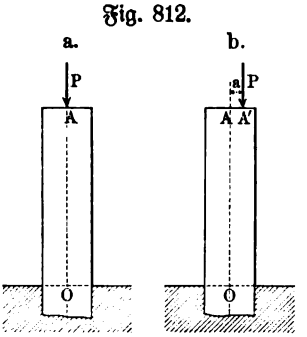
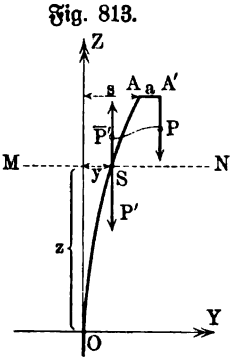


Fig. 813.



Neben dem Drucke P' ist für den Schnitt MN das biegende Kräftepaar $P(a + s - y)$ in Ansatz zu bringen, so daß die Knickung als Verbindung von Druck und Biegung erscheint. Dabei ist vorausgesetzt, daß es sich bei der Biegung um eine gerade Belastung handelt, d. h. daß entweder alle Achsen eines Querschnittes als Hauptachsen angesehen werden dürfen (die centrale Trägheitsellipse ist ein Kreis), oder daß [a] in die Richtung einer Hauptachse fällt. Bei der Biegung gilt dann, gemäß der Glei-

chung $f''(z) = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$, hier für die Bestimmung der Biegungslinie $y = f(z)$ der Ansatz

$$f''(z) = \frac{P(a + s - y)}{E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Setzt man $a + s - y = u$, so ist $u = -f(z) + (a + s)$ eine Funktion von z, welche $\varphi(z)$ heißen mag. Man findet nun für

$$u = \varphi(z) = -f(z) + (a + s)$$

durch Ableitung $\varphi'(z) = -f'(z)$ und dann durch eine weitere Ableitung $\varphi''(z) = -f''(z)$. Demnach geht die Gleichung für $f''(z)$ über in

$$-\varphi''(z) = \frac{P \,.\, \varphi(z)}{E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

d. h. in

$$\varphi''(z) = -m^2 \,.\, \varphi(z) \quad \text{für} \quad \frac{P}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = m^2.$$

Faßt man $u = \varphi(z)$ als Stellungsgleichung einer geradlinigen Bewegung auf, so daß u die Stellung (Weg) und z die Zeit bezeichnet, so stellt $\varphi''(z)$ die zugehörige Beschleunigung dar. Da diese Beschleunigung zu $-\varphi(z)$ proportional ist, so ist die Bewegung eine harmonische Schwingung (vergl. S. 172 und 714) von der Gestalt $u = C_1 \cos(mz)$ oder $u = C_2 \sin(mz)$ oder auch von der Gestalt

$$u = C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz).$$

Demnach hat man hier

$$C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz) = -f(z) + (a + s)$$

oder

$$y = f(z) = (a + s) - C_1 \cos(mz) - C_2 \sin(mz),$$

woraus noch folgt

$$f'(z) = m C_1 \sin(mz) - m C_2 \cos(mz).$$

Im Punkte O ist $z = 0$, $y = 0$, $f'(z) = 0$, d. h. für diese Punkte gilt

$$0 = (a + s) - C_1 \quad \text{und} \quad 0 = -m C_2$$

d. h. es ist $C_1 = a + s$ und $C_2 = 0$.

Demnach hat die Biegungslinie hier die Gleichung

$$y = (a + s) - (a + s)\cos(mz) = (a + s)[1 - \cos(mz)].$$

Um s zu bestimmen, beachten wir, daß $y = s$ ist für $z = l$, d. h. man hat

$$s = (a + s)[1 - \cos(ml)]$$

und

$$s = a \cdot \frac{1 - \cos(ml)}{\cos(ml)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 430)$$

Daraus folgt endlich für die Biegungslinie

$$y = a \cdot \frac{1 - \cos(mz)}{\cos(ml)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 431)$$

Denken wir uns nun einen Stab, dessen Länge l von 0 an wächst, so nimmt im Nenner von y die Größe $\cos(ml)$ ab von 1 an; für $\cos(ml) = 0$, d. h. für $ml = \frac{\pi}{2}$ wird $y = \infty$, falls a eine noch so kleine endliche Größe ist.

Erreicht also ein Stab die Länge $l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E\mathfrak{T}r}{P}}$, so wird seine Durchbiegung schon an der Stelle O unendlich groß, falls eine noch so kleine Verschiebung (a) der Belastung gegen die Stabachse vorliegt, d. h. der Stab knickt dann bei der Länge $l = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E\mathfrak{T}r}{P}}$.

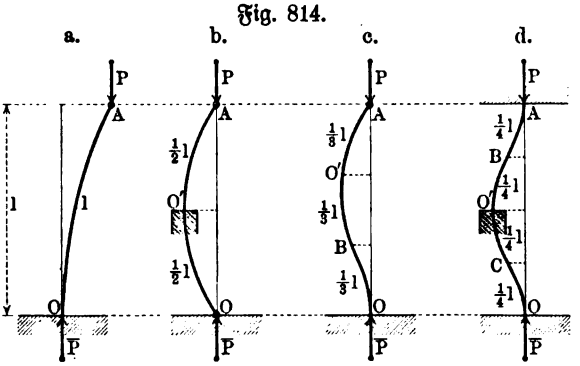
Umgekehrt giebt es für jede Länge l eine Belastung $\overline{P}$, bei welcher eine Knickung des Stabes erfolgt, sie ergiebt sich aus der Gleichung für l als

$$\overline{P} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\mathfrak{T}r}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 432)$$

Man nennt Gleichung Nr. 432) die Eulersche Formel der Knickbelastung.

Die zulässige Belastung beträgt natürlich nur einen Bruchteil von $\overline{P}$, so daß sie von Fall zu Fall als $\frac{1}{n}\overline{P}$ dargestellt werden kann.

Fig. 814.



Die Formel Nr. 432) gilt für den Stab der Fig. 813, welcher an dem einen Ende eingespannt und an dem anderen Ende frei ist, also einem Freiträger entspricht. Außerdem kommen hier auch die anderen drei, bei der Biegung behandelten Arten der Befestigung in entsprechender Ausführung vor. In Fig. 814 sind alle vier Fälle zusammengestellt; in Fig. 814 b sind beide Enden O und A des Stabes geführt, wie es z. B. bei eingelenkten Stangen der Fall ist, in Fig. 814 c ist O eingespannt und A geführt, in Fig. 814 d sind beide Enden eingespannt.

Denkt man sich in Fig. 814 b den Stab nach der Biegung an der Stelle der größten Durchbiegung bei O' eingemauert, so bemerkt man, daß sich die Stücke $O'A$ und $O'O$ in demselben Zustande befinden, wie OA in Fig. 814 a, so daß Gleichung Nr. 432) auch hier gilt, falls man in ihr l durch $\frac{1}{2}l$ ersetzt. Ebenso gilt für Fig. 814 d bei Einmauerung in O', daß sich die Stücke OC, CO', $O'B$ und BA in demselben Zustande befinden, wie OA in Fig. 814 a, so daß Gleichung Nr. 432) auch hier gilt, falls man in ihr l durch $\frac{1}{4}l$ ersetzt.

Für Fig. 814 c ist eine ähnliche Betrachtung nur als rohe Annäherung zulässig, weil durch die Führung bei A und durch die Einspannung bei O für die Stabenden ungleiche Beziehungen geschaffen werden, so daß auch die Stelle der größten Durchbiegung O' und die Stelle des Krümmungswechsels B nicht eine gleichmäßige Einteilung ($\frac{1}{3}\,l$) des Stabes geben. Ersetzt man l in Formel 432) durch $\frac{1}{3}\,l$, so erhält man $\overline{P} = \frac{9}{4}\,\pi^2\,\frac{E\mathfrak{T}r}{l^2} = 2{,}25\,\pi^2\,\frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}$, während eine genaue Behandlung des Falles der Fig. 814 c, entsprechend der für Fig. 814 a durchgeführten Entwickelung, zu $2{,}064\,\pi^2\,\frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}$ führt, wofür man in der Praxis natürlich $2\,\pi^2\,\frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}$ setzen darf.

Giebt man der Eulerschen Formel die Gestalt

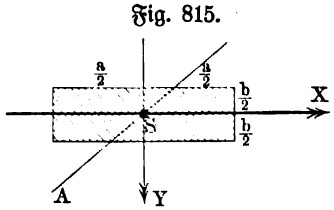
$$\overline{P} = \alpha\,.\,\pi^2\,.\,\frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}\,. \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 433)$$

so ergeben sich für den Befestigungskoeffizienten α, entsprechend den vier in Fig. 814 dargestellten Arten der Befestigung, demnach die Werte der folgenden Tabelle:

Befestigungsart	α
Fall 1	$\frac{1}{4}$
Fall 2	1
Fall 3	2
Fall 4	4

Dabei ist zu bemerken, daß sich ein Stab erfahrungsmäßig (vergl. die Biegung einer Reißschiene) bei Knickung im allgemeinen so biegt, daß von den Trägheitsmomenten des Querschnittes das kleinste für die Biegung in Frage kommt. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck von den Seiten a und b und ist dabei $a > b$, so sind die Hauptträgheitsmomente $\frac{a^3 b}{12}$ und $\frac{a b^3}{12}$ und demnach gilt für jedes $\mathfrak{T}r$ der Ansatz $\frac{a^3 b}{12} > \mathfrak{T}r > \frac{a b^3}{12}$; demnach geht die Biegung für Fig. 815 so vor sich, daß die X-Achse als Achse des Querschnittes für die Biegung anzusehen ist, und nicht die Y-Achse oder irgend eine dazwischen gelegene Achse A. Man hat demgemäß das Minimum von $\mathfrak{T}r$, welches als $\mathfrak{T}r_{min}$ bezeichnet werden mag, in die Eulersche Formel einzuführen.

Fig. 815.



Die zulässige Belastung ergiebt sich dann als ein erfahrungsmäßig festzustellender Bruchteil der Knickbelastung durch die Formel

$$P = \frac{1}{n}\,\cdot\,\alpha\,.\,\pi^2\,\cdot\,\frac{E\mathfrak{T}r_{min}}{l^2} \qquad \ldots\ldots \qquad 434)$$

Man setzt dabei

$n = 5$ bis 6 für Schmiedeeisen,
$n = 8$ für Gußeisen,
$n = 10$ für Holz

und sagt, daß man z. B. für Holz mit zehnfacher Sicherheit rechnet.

Was den Druck anlangt, so gilt natürlich für einen Querschnitt f, daß bei Ausnutzung des Materiales $\frac{P}{f} = k_2$ bezw. $P = fk_2$ gesetzt werden muß.

Für jeden Stab, welcher durch Druck beansprucht wird, müssen natürlich sowohl die Druckspannungen, welche auftreten, als auch die der Biegung entsprechenden Spannungen auf ihre Zulässigkeit hin geprüft werden. Erfahrungsmäßig ist der Druck für relativ kurze Stäbe gefährlicher, die Biegung für relativ lange Stäbe. Um zahlenmäßig festzustellen, welche Stablänge als relativ kurz bezw. als relativ lang zu gelten hat, berechnet man für Stäbe, welche sich nur durch ihre Länge unterscheiden, die zulässige Druckbelastung und die zulässige Knickbelastung, welche als P_1 und P_2 bezeichnet werden mögen. Man hat dann

$$P_1 = fk_2 \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \mathfrak{T} r_{min}}{l^2} \quad \ldots \quad 435)$$

Für $P_1 = P_2 = P$ ergiebt sich eine bestimmte Länge l_0, für welche gilt

$$l_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot \frac{E \mathfrak{T} r_{min}}{fk_2}} \quad \ldots \quad 436)$$

d. h. für einen Stab von der Länge l_0 giebt die Untersuchung auf Druck dieselbe zulässige Belastung wie die Untersuchung auf Knickung.

Für $l < l_0$ nimmt P_2 zu, d. h. die dem Drucke entsprechende Belastung P_1 giebt zugleich Sicherheit gegen Knickung.

Für $l > l_0$ nimmt P_2 ab, d. h. die der Knickung entsprechende Belastung P_2 giebt zugleich Sicherheit gegen Druck.

Statt mit der Eulerschen Formel zu arbeiten und außerdem den Stab auf Druck zu untersuchen, kann man also auch die Grenzlänge l_0 bestimmen, und dann entweder auf Druck oder auf Knickung (nach Eulers Formel) rechnen.

Grashoff hat versucht, durch eine empirische Formel, d. h. durch eine Formel, für welche die Rechtfertigung in der Übereinstimmung mit der Erfahrung liegt, die Berechnung auf Druck und auf Knickung zusammenzufassen; nach ihm ist die zulässige Belastung darstellbar als

$$P = \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad 437)$$

Schreibt man diese Grashoffsche Formel

$$P = \frac{P_1}{1 + \frac{P_1}{P_2}},$$

so ist $\frac{P_1}{P_2}$ proportional zu l^2, so daß bei sehr kleinem Werte von l der Nenner angenähert 1 ist und also gilt $P \sim P_1$. Schreibt man die Formel

$$P = \frac{P_2}{1 + \frac{P_2}{P_1}},$$

so ist $\frac{P_2}{P_1}$ proportional zu $\frac{1}{l^2}$, so daß bei sehr großen Werten von l der Nenner angenähert 1 ist und also gilt $P \sim P_2$.

Demgemäß giebt die Formel von Grashoff für P Werte, welche bei kleinem Werte von l mit der Druckberechnung (P_1) und bei großem Werte von l mit der Berechnung auf Knickung (P_2) übereinstimmen. Setzt man in der ersten Umformung von Gleichung Nr. 437) die Werte von P_1 und P_2 ein, so ergiebt sich

$$P = \frac{f k_2}{1 + \mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{f l^2}{\mathfrak{T}r_{min}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 438)$$

falls man $\frac{n k_2}{\pi^2 E} = \mu$ setzt.

Diese Formel, welche von Schäffer[1]) selbständig empfohlen worden ist, stimmt überein mit der viel verwendeten Formel von Navier, Rankine und Schwarz, abgesehen davon, daß für μ von verschiedenen Seiten verschiedene Zahlenwerte vorgeschlagen worden sind.

Nach der hier gegebenen Entwickelung hat man z. B. für Gußeisen

$$\mu = \frac{8 \,.\, 500}{\pi^2 \,.\, 1\,000\,000} \sim 0{,}0004,$$

für Schmiedeeisen

$$\mu = \frac{5 \,.\, 800}{\pi^2 \,.\, 2\,000\,000} \sim 0{,}0002,$$

für Holz

$$\mu = \frac{10 \,.\, 60}{\pi^2 \,.\, 120\,000} \sim 0{,}0005.$$

Ritter empfiehlt für Gußeisen $\mu = \frac{1}{5333}$, für Schmiedeeisen $\mu = \frac{1}{10666}$, für Holz $\mu = \frac{1}{4444}$, während die in der Formel Nr. 438) meist gebrauchten Werte für Gußeisen $\mu = 0{,}000\,16$, für Schmiedeeisen $\mu = 0{,}000\,08$, für Holz $\mu = 0{,}000\,15$ sind.

Von anderer Seite ist auch darauf hingewiesen worden, daß μ von den Dimensionen des Stabes abhängt u. s. w.

Diese Unsicherheit wird erklärlich, wenn man die, hier aus Grashoffs empirischer Formel abgeleitete Formel von Navier, Rankine und Schwarz wirklich zu begründen sucht. Wählen wir dazu den zweiten Fall der Befestigung, so ist für Fig. 816 das Maximum des Momentes der äußeren

[1]) Vergl. Deutsche Bauzeitung 1877, S. 499.

Kräfte $P \cdot s$, so daß die Festigkeitsgleichung $Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für $Mo = Ps$ die Maximalspannung $\frac{Psw}{\mathfrak{T}r}$ liefert, welche auf der Zugseite der Druckspannung $\frac{P}{f}$ entgegengesetzt ist, während sie diese auf der Druckseite verstärkt.

Für die Zugseite gilt also

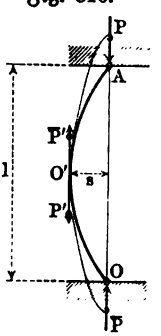
$$\pm\left(\frac{P}{f} - \frac{Psw}{\mathfrak{T}r}\right) \leqq k_1 \text{ oder } k_2$$

und für die Druckseite

$$\frac{P}{f} + \frac{Psw}{\mathfrak{T}r} \leqq k_2.$$

Ist die Druckspannung größer als die Zugspannung der Biegung, so ist für die Zugseite das Zeichen + zu wählen und die Größe k_2, sonst das Zeichen — und die Größe k_1; ist $k_1 = k_2$, so ist für beide Annahmen die Gleichung für die Zugseite durch die Gleichung für die Druckseite miterfüllt, sonst nur für die erste Annahme.

Fig. 816.



Da also meist die zweite Gleichung genügt, um die zulässige Spannung zu beurteilen, so genügt es auch meist, allein aus ihr die zulässige Belastung zu bestimmen. Sie giebt bei Ausnutzung des Materials

$$P = \frac{fk_2}{1 + \frac{swf}{\mathfrak{T}r}}.$$

Bezeichnet man den Krümmungsradius für die Stelle der größten Durchbiegung O' mit R, so ist nach der Formänderungsgleichung $w = \frac{\sigma_w \varrho}{E}$, d. h. man hat für O' auch

$$P = \frac{fk_2}{1 + \frac{sf\sigma_w\varrho}{E\mathfrak{T}r}} = \frac{fk_2}{1 + \frac{sfR\sigma_w}{E\mathfrak{T}r}}.$$

Hätte ϱ für alle Stellen den Wert R, so würde die Durchbiegung s' in der Mitte größer als die thatsächlich vorhandene Durchbiegung s, da die thatsächlich vorhandene Krümmung von der Mitte nach den Enden zu abnimmt. Rechnet man mit s', welches einer Krümmung nach dem Kreisbogen entspricht, statt mit s, so vermindert sich der Wert von P, d. h. die Formel für P wird sicherer. Da für einen Kreisbogen vom Radius R und der Länge l die Durchbiegung (vergl. S. 945) gegeben ist[1]) als $s' = \frac{1}{8}\frac{l^2}{R}$, so bleibt die Formel für P brauchbar, wenn man in ihr $s'R = \frac{1}{8}l^2$ statt sR einführt. Sie lautet dann wieder wie Nr. 438), falls man $\mu = \frac{1}{8}\frac{\sigma_w}{E}$ einführt und

[1]) Vergl. auch die Entwicklung in der Anwendung „Gerade Biegungsfedern".

außerdem, der ausgewählten Art der Befestigung entsprechend, $\alpha = 1$ setzt [1]). Setzt man für Gußeisen $\sigma_w = 1500$, für Schmiedeeisen $\sigma_w = 1500$, für Holz $\sigma_w = 180$, so erhält man die oben angeführten Ritterschen Zahlen.

Dieselbe Unsicherheit, welche hier bei der Bestimmung von μ vorhanden ist, liegt auch in der Abschätzung von n für die Verwendung der Eulerschen Formel.

Giebt man der Formel von Rankine und Schwarz die Gestalt

$$\frac{P}{f} = \frac{k_2}{1 + \mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{f l^2}{\mathfrak{T}r_{min}}} = k_2' \quad \ldots\ldots \quad 439)$$

so bezeichnet k_2' die zulässige Knickspannung, mit welcher, wenn sie erst einmal für einen Fall bestimmt ist, ebenso gerechnet werden kann, wie mit der zulässigen Druckspannung k_2.

Man kann dann die Formel für die einzelnen Querschnitte ein für allemal ausführen. So ist z. B. für das Rechteck $\mathfrak{T}r_{min} = \frac{b h^3}{12}$ für $b > h$ und $f = bh$, d. h. man hat hier als Nenner von k_2'

$$1 + 12\mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Ferner ist für den Kreis $\mathfrak{T}r_{min} = \frac{1}{4} r^4 \pi$ und $f = r^2 \pi$, d. h. man hat hier als Nenner von k_2'

$$1 + 4\mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

oder auch für $r = \frac{1}{2} d$

$$1 + 16\mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^2.$$

Für die gangbaren Verhältnisse $l : h$ und $l : d$ lassen sich dann ferner für jede Befestigungsart (α) Tabellen herstellen, aus denen k_2' oder der Nenner von k_2' unmittelbar für bestimmte Materialien entnommen werden kann.

Die Bestimmung der Querschnitte für gedrückte Stäbe, welche der Gefahr der Knickung ausgesetzt sind, ist ziemlich umständlich.

Während für gezogene Stäbe bei einer Zugkraft P bei Ausnutzung des Materials die Formel $\frac{P}{f} = k_1$ ohne weiteres $f = \frac{P}{k_1}$ liefert, hat man bei gedrückten Stäben mit Rücksicht auf die Gefahr der Knickung nach Naviers Formel den Ansatz

$$\frac{P}{f} = k_2' = \frac{k_2}{1 + \mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{f l^2}{\mathfrak{T}r_{min}}},$$

wobei zu beachten ist, daß f auch im Nenner der rechten Seite vorkommt.

Für Querschnitte, deren Abmessungen nur von einer Größe ab-

[1]) Eine eigenartige Ableitung findet sich bei Krohn, Centralblatt der Bauverwaltung 1885, S. 400 f.

hängen, wie es beim Kreise oder Quadrate der Fall ist, führt die aufgestellte Formel ohne weiteres zur Bestimmung dieser Größe.

So ist für den Kreis vom Durchmesser d z. B. $\mathfrak{Tr}_{min} = \mathfrak{Tr} = \frac{\pi}{64} d^4$ und $f = \frac{\pi}{4} d^2$ und demnach $\frac{f}{\mathfrak{Tr}_{min}} = \frac{16}{d^2}$, so daß hier obige Gleichung

$$\frac{4P}{\pi d^2} = \frac{k_2}{1 + \mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{16 l^2}{d^2}} = \frac{k_2 d^2}{d^2 + \frac{\mu}{\alpha} \cdot 16 l^2}$$

wird, woraus

$$d^2 = \frac{2P}{k_2 \pi} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{2P}{k_2 \pi}\right)^2 + \frac{64 \mu P l^2}{\alpha k_2 \pi}}$$

folgt; dabei ist nur das Zeichen + brauchbar, weil der Wert der Quadratwurzel größer ist als das erste Glied der rechten Seite. Ebenso gilt bei einem quadratischen Querschnitte für die Seite a die Gleichung

$$a^2 = \frac{P}{2 k_2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{P}{2 k_2}\right)^2 + \frac{12 \mu l^2 P}{\alpha k_2}}.$$

Hängen die Abmessungen des Querschnittes von zwei Größen ab, wie es bei Rechtecken, beim Kreisringe und beim Hohlquadrate der Fall ist, so stellt man entweder eine Abmessung durch Abschätzung auf Grund der Erfahrung fest (z. B. $l : h$ beim Rechtecke oder $d_1 : d_2$ beim Kreisringe u. s. w.), oder man verfährt folgendermaßen.

Bezeichnet man den Nenner von k_2' durch n, so kann man n innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich wählen, z. B. $n = 1{,}5$, so daß man einerseits

$$1 + \mu \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot f \frac{l^2}{\mathfrak{Tr}_{min}} = n$$

und anderseits

$$\frac{P}{f} = \frac{k_2}{n}$$

zur Bestimmung der Abmessungen des Querschnittes hat.

Für das Hohlquadrat von den Seiten a_1 und a_2 stellt sich dann z. B. die Rechnung so. Man hat $f = a_1^2 - a_2^2$ und $\mathfrak{Tr}_{min} = \mathfrak{Tr} = \frac{a_1^4 - a_2^4}{12}$ gegeben, also $\frac{f}{\mathfrak{Tr}_{min}} = \frac{12}{a_1^2 + a_2^2}$ und es ist demnach

$$n = 1 + \frac{\mu}{\alpha} \cdot \frac{12 l^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{P}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{k_2}{n}$$

oder

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{\mu \cdot 12 l^2}{\alpha (n - 1)} \quad \text{und} \quad a_1^2 - a_2^2 = \frac{nP}{k_2},$$

woraus a_1^2 und a_2^2 unmittelbar folgt.

Bei dem hohlen Rechtecke, dessen innere und äußere Begrenzung wieder

ähnlich und zu einander ähnlich gelegen sind, sind die Abmessungen ebenso zu bestimmen, nachdem man z. B. zunächst $b_1 : h_1 = b_2 : h_2$ angenommen hat.

Um die Querschnitte auf Grund der Eulerschen Formel zu bestimmen, hat man davon auszugehen, daß durch diese Formel nur das Trägheitsmoment des Querschnittes bestimmt erscheint, was für den Kreis (r) und das Quadrat (a) als Querschnitt zur Bestimmung der Abmessungen genügt.

Für die anderen, oben betrachteten Querschnitte muß wieder eine entsprechende Abschätzung hinzutreten.

Für gedrückte Stäbe, die der Knickgefahr ausgesetzt sind, lassen sich auch Formen gleicher Spannung bestimmen, indem man zunächst die Verjüngung, welche [*Mo*] entspricht, entwickelt, und dann noch die Einwirkung der Druckkraft P berücksichtigt. Das hat z. B. für den Fall 2 mit Rücksicht auf die Gestaltung der Kurbelstangen einen gewissen Wert.

Führt man die Rechnung für den Fall 2 bei kreisförmigem Querschnitt in Bezug auf [*Mo*] durch, so findet man für die entsprechende Form gleicher Spannung als Knickbelastung

$$\overline{P} = \tfrac{3}{4}\pi^2 \cdot \frac{E\mathfrak{T}r_0}{l^2},$$

wobei $\mathfrak{T}r_0 = \frac{\pi}{4} \cdot r_0^4$ das Trägheitsmoment für den Querschnitt in der Mitte (r_0) bezeichnet; von dem mittleren Querschnitt (r_0) nimmt hier die Fläche der Querschnitte nach einem ziemlich verwickelten Gesetze nach beiden Seiten zu ab, um an den Enden den Wert Null zu erhalten.

Da an den Enden die Abmessungen meist schon aus konstruktiven Rücksichten bestimmt sind bezw. der Gleichung $\frac{P}{k_2} \leqq f$ genügen müssen, so läßt man die Stangen am besten von den Enden an nach einer einfachen Kurve bis zur Mittelfläche (r_0) anschwellen, wobei r_0 durch die Gleichung

$$P = \frac{1}{n}\overline{P} = \frac{1}{n} \cdot \tfrac{3}{4}\pi^2 \cdot \frac{E\mathfrak{T}r_0}{l^2} \quad \text{für} \quad \mathfrak{T}r_0 = \frac{\pi}{4} r_0^4$$

bestimmt ist.

Die Unsicherheit, welche die Koeffizienten n für die Eulersche und μ für die Naviersche Formel zeigen, lassen sich nur durch Versuche von Fall zu Fall beseitigen, wobei auch noch andere Umstände (Reibung der Enden, Form des Querschnittes u. s. w.) berücksichtigt werden können und müssen. Im allgemeinen scheint nach den Versuchen von Bauschinger und Tetmajer die Eulersche Formel für Stäbe mit drehbaren Enden besser zu sein, während die Naviersche Formel für Stäbe mit ebenen festen Stirnflächen, welche an feste Druckplatten gelegt sind, zu genaueren Ergebnissen zu führen scheint.

177. Excentrischer Druck. Die Betrachtungen, welche bei der Knickung durchgeführt wurden, gelten auch für den Fall, daß die Kraft [P] absichtlich gegen die Achse des Stabes um eine Strecke a verschoben ist, nur mit dem Unterschiede, daß dann der excentrische Arm a nicht eine der Abschätzung sich entziehende, sondern eine von vornherein bestimmte Größe ist.

Man hat also auch hier unter Voraussetzung gerader Belastung beim Fall 1 der Befestigung für die Gleichung der Biegungslinie

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot \dfrac{1 - \cos(mz)}{\cos(ml)} \quad \text{und} \quad s = a \cdot \dfrac{1 - \cos(ml)}{\cos(ml)} \\ \text{für} \qquad m = \sqrt{\dfrac{P}{E\mathfrak{T}\mathrm{r}}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 440)$$

Das Moment $Mo = P(a + s - y)$ nimmt hier den Wert an

$$Mo = P \cdot a \cdot \frac{\cos(mz)}{\cos(ml)},$$

so daß für $z = 0$ ist

$$Mo_{max} = \frac{Pa}{\cos(ml)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 441)$$

Diese Werte für Mo gelten auch bei der Knickung, sind aber dort nicht verwendbar, weil a dort nicht bekannt ist.

Neben der Druckspannung $\sigma_1 = \dfrac{P}{f}$ ist also hier die Biegungsspannung $\sigma_2 = \dfrac{Paw}{\mathfrak{T}\mathrm{r} \cdot \cos(ml)}$ einzuführen, so daß sich ergiebt für die Zugseite

$$\pm\left(\frac{P}{f} - \frac{Paw}{\mathfrak{T}\mathrm{r}\cos(ml)}\right) \leqq k_1 \text{ oder } k_2$$

und für die Druckseite

$$\frac{P}{f} + \frac{Paw}{\mathfrak{T}\mathrm{r}\cos(ml)} \leqq k_2.$$

Für $k_1 = k_2$ ist die zweite Gleichung allein maßgebend, ebenso falls auf der Zugseite eine Druckspannung ($\sigma_1 > \sigma_2$) übrig bleibt. Über die Verschiebung der Neutralen gilt dasselbe wie S. 1088.

Für andere Arten der Befestigung, als sie Fall 1 zeigt, gilt Entsprechendes wie bei der Knickung.

Ersetzt man $\cos(ml)$ durch $1 - \dfrac{m^2l^2}{2}$, so geht die Gleichung für k_2 bei Ausnutzung des Materiales über in

$$\frac{P}{f} + \frac{Paw}{\mathfrak{T}\mathrm{r} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}\mathrm{r}\,m^2l^2} = k_2$$

oder, da $m^2 = \dfrac{P}{E\mathfrak{T}\mathrm{r}}$ ist, in

$$\frac{P}{f} + \frac{Paw}{\mathfrak{T}\mathrm{r} - \frac{1}{2}\frac{P}{E} \cdot l^2} = k_2.$$

Damit ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung für P gegeben. Bestimmt man aus dieser Gleichung die zulässige Spannung, so ist hier

$$\frac{P}{f} = \frac{k_2}{1 + \dfrac{faw}{\mathfrak{T}\mathrm{r} - \frac{1}{2}\frac{P}{E} \cdot l^2}} = k_2' \quad \ldots \ldots \quad 442)$$

Für die Praxis pflegt man, den vier Fällen der Knickung (α) entsprechend, diese Gleichung zu schreiben als

$$\frac{P}{f} = \frac{k_2}{1 + \dfrac{faw}{\mathfrak{T}r - \dfrac{1}{8\alpha} \cdot \dfrac{P}{E} \cdot l^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 443)$$

Im ersten Falle, d. h. für $\alpha = \frac{1}{4}$, erhält man aus Nr. 443) wieder Nr. 442), im zweiten Falle ist in Nr. 442) l zu ersetzen durch $\frac{l}{2}$, was dem Werte $\alpha = 1$ der Nr. 443) entspricht u. s. f.

Die Annäherung, welche in dem Ersatze von $\cos(ml)$ durch $1 - \frac{m^2 l^2}{2}$ vorliegt, läßt noch eine anschauliche Deutung zu.

Da hier, was bei der Knickung nicht der Fall ist, der Unterschied von y auf der Strecke $0 \ldots l$ gegen a verschwindet, so kann man angenähert mit einem konstanten Momente $P(a + s)$ für $0 \ldots l$ rechnen, wobei sich der Stab nach einem Kreisbogen durchbiegen würde. Es wäre dann im Falle 1 wie auf S. 1117 zu setzen $s = \frac{l^2}{2R}$ oder $R = \frac{l^2}{2s}$.

Da stets $\varrho = \frac{E.\mathfrak{T}r}{M}$ ist, so gilt hier $R = \frac{E.\mathfrak{T}r}{P(a+s)} = \frac{l^2}{2s}$, woraus folgt

$$s = a\frac{l^2 P}{2E\mathfrak{T}r - l^2 P} \quad \text{und} \quad a + s = a\frac{2E\mathfrak{T}r}{2E\mathfrak{T}r - l^2 P}.$$

Man hat also

$$P(a + s) = Pa \cdot \frac{2E\mathfrak{T}r}{2E\mathfrak{T}r - l^2 P}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{P(a+s)w}{\mathfrak{T}r} = P \cdot \frac{aw}{\mathfrak{T}r - \frac{1}{2}\frac{P}{E}l^2},$$

d. h. man kommt zurück zu Gleichung Nr. 442).

178. Excentrischer Zug. Die Wirkung einer Zugkraft, welche gegen die Stabachse um eine Strecke a verschoben ist, wie es Fig. 817 andeutet, ist wesentlich anders zu beurteilen, als der excentrische Druck, weil hier die eintretende Biegung den Arm für das Kraftmoment verkleinert, so daß $P \,.\, a$ der größte Wert von Mo ist.

Fig. 817 a.

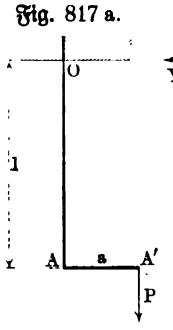
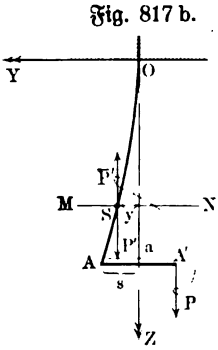


Fig. 817 b.



Neben der Zugspannung $\sigma_1 = \frac{P}{f}$ ist also hier bei Voraussetzung gerader Belastung die Biegungsspannung

$$\sigma_2 = \frac{P \,.\, a \,.\, w}{\mathfrak{T}r}$$

zu berücksichtigen, und man hat für die Druckseite

$$\pm\left(\frac{P}{f} - \frac{P \,.\, a \,.\, w}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\right) \leqq k_1 \text{ oder } k_2$$

und für die Zugseite

$$\frac{P}{f} + \frac{P \,.\, a \,.\, w}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \leqq k_1$$

anzusetzen.

Für $k_1 = k_2$ ist wieder die zweite Gleichung allein maßgebend, ebenso falls auf der Zugseite eine Zugspannung ($\sigma_1 > \sigma_2$) übrig bleibt.

Über die Verschiebung der Neutralen gilt Entsprechendes wie S. 1088.

Will man die Biegungslinie bestimmen, so hat man für $y = f(z)$ anzusetzen

$$f''(z) = \frac{P(a - s + y)}{E \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}},$$

da hier $Mo = P(a - s + y)$ ist.

Für $a - s + y = u = \varphi(z)$ ergiebt sich hier $\varphi(z) = f(z) + (a - s)$ und also

$$\varphi''(z) = + m^2 \,.\, \varphi(z)$$

für $\dfrac{P}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = m^2$.

Setzt man $m = im'$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet, so hat man auch hier, wie bei der Knickung,

$$\varphi''(z) = -(m')^2 \,.\, \varphi(z),$$

d. h. also

$$\varphi(z) = C_1 \cos(m'z) + C_2 \sin(m'z)$$

und demnach

$$f(z) = C_1 \cos(m'z) + C_2 \sin(m'z) - (a - s).$$

Nach den bekannten Formeln

$$\cos x = \frac{e^{+xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{+xi} - e^{-xi}}{2i}$$

ist für $x = m'z = \dfrac{m}{i} \cdot z$

$$\cos(m'z) = \frac{e^{+mz} + e^{-mz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(m'z) = \frac{e^{+mz} - e^{-mz}}{2i},$$

d. h. man hat hier

$$f(z) = \tfrac{1}{2} C_1 (e^{+mz} + e^{-mz}) + \frac{1}{2i} C_2 (e^{+mz} - e^{-mz}) - (a - s).$$

Für O ist $z = 0$ und $y = 0$, d. h. man hat

$$0 = C_1 - (a - s) \quad \text{oder} \quad C_1 = a - s.$$

Für O ist auch $f'(z) = 0$. Man hat zunächst

$$f'(z) = \frac{m}{2} C_1 (e^{+mz} - e^{-mz}) + \frac{m}{2i} C_2 (e^{+mz} + e^{-mz})$$

und es ist also

$$0 = \frac{m}{i} C_2 \quad \text{oder} \quad C_2 = 0.$$

Demnach gilt hier

$$y = \frac{a - s}{2}(e^{+mz} + e^{-mz} - 2).$$

Für A ist $z = l$ und $y = s$, d. h. man hat

$$s = \frac{a - s}{2}(e^{+ml} + e^{-ml} - 2)$$

oder

$$s = a\,\frac{e^{+ml} + e^{-ml} - 2}{e^{+ml} + e^{-ml}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 444)$$

Man hat demnach schließlich für die Biegungslinie

$$y = f(z) = a \cdot \frac{e^{+mz} + e^{-mz} - 2}{e^{+ml} + e^{-ml}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 445)$$

Für die Größe $\frac{e^{+mz} + e^{-mz}}{2}$, welche als hyperbolischer Cosinus von z oder kurz als $\mathfrak{Cos}\,z$ bezeichnet wird, sind besondere Tafeln vorhanden, ebenso für die Größe $\frac{e^{+mz} + e^{-mz}}{2}$, welche als hyperbolischer Sinus von z oder kurz als $\mathfrak{Sin}\,z$ bezeichnet wird.

Benutzt man diese Funktionen, so ist hier

$$y = a \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,(mz) - 1}{\mathfrak{Cos}\,(ml)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 446)$$

für $m^2 = \frac{P}{E\mathfrak{J}}$, und damit tritt die Formel für excentrischen Zug in enge Beziehung zur Formel für excentrischen Druck. Man hat dann auch

$$s = a \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,(ml) - 1}{\mathfrak{Cos}\,(ml)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 447)$$

Für $Mo = P(a - s + y)$ ergiebt sich hier

$$Mo = P \,.\, a \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\,(mz)}{\mathfrak{Cos}\,(ml)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 448)$$

und man hat für $z = l$, wie oben,

$$Mo_{max} = P \,.\, a.$$

Da

$$\mathfrak{Cos}\,z = \frac{e^{+z} + e^{-z}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) + \tfrac{1}{2}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

ist, so gilt

$$\mathfrak{Cos}\,z \sim 1 + \tfrac{1}{2}z^2$$

für kleine Werte von z. In dieser Annäherung ist

$$\mathfrak{Cos}\,(mz) \sim 1 + \tfrac{1}{2}m^2z^2 = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{P}{E\mathfrak{J}}z^2.$$

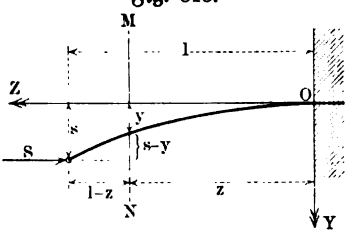
179. Gespannte Balken. Ähnliche Beziehungen wie die in § 177 und § 178 untersuchten treten stets ein, wenn sich ein biegendes Moment [Mo] mit einer Achsialkraft zur Beanspruchung eines geraden Stabes verbindet. Das ist z. B. auch der Fall, wenn ein Balken durch beliebige Lasten auf Biegung beansprucht und außerdem in seiner Achse durch eine Druckkraft oder durch eine Zugkraft angegriffen wird; man nennt den Balken dann einen „gespannten Balken".

Um für einen solchen die Biegungslinie unter Voraussetzung gerader Belastung zunächst für den Fall einer Druckkraft abzuleiten, bilden wir das Moment gemäß Fig. 818,

$$Mo = S(s - y) + \overline{Mo},$$

wobei S die, hier als Druck wirkende Spannkraft des Balkens ist, während $\overline{Mo}$ das biegende Moment der Belastung für die Schnittstelle MN bezeichnet. Man hat dann für die Biegungslinie den Ansatz

Fig. 818.



$$S(s - y) + \overline{Mo} = E\mathfrak{T}r \cdot f''(z).$$

Wäre $\overline{Mo} = 0$, so würde gemäß der vorigen Betrachtung

$$s - y = C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz)$$

sein für $m^2 = \dfrac{S}{E\mathfrak{T}r}$.

Um den Einfluß von $\overline{Mo}$ zu bestimmen, setzen wir

$$s - y = C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz) + \varphi(z),$$

woraus sich durch zweimalige Ableitung ergiebt

$$\begin{aligned} -f''(z) &= -m^2[C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz)] + \varphi''(z) \\ &= -m^2[s - y - \varphi(z)] + \varphi''(z). \end{aligned}$$

Führt man den Wert von $f''(z)$ oben ein, so erhält man zur Bestimmung von $\varphi(z)$ die Gleichung

$$-m^2\left[\varphi(z) + \frac{\overline{Mo}}{S}\right] = \varphi''(z).$$

Für $\psi(z) = \varphi(z) + \dfrac{\overline{Mo}}{S}$ folgt durch zweimalige Ableitung

$\psi''(z) = \varphi''(z) + \dfrac{\overline{Mo}''}{S}$, d. h. man hat

$$-m^2 \cdot \psi(z) = \psi''(z) - \frac{\overline{Mo}''}{S}.$$

Sind nur Einzellasten vorhanden, so hat die zweite Ableitung $\overline{Mo}''$ von $\overline{Mo}$ den Wert Null, bei gleichmäßiger Belastung ist sie eine Konstante.

Solange nur Einzellasten und gleichmäßige Belastung in Frage kommen, hat also jedenfalls die dritte Ableitung von $\overline{Mo}$ den Wert Null. Man hat also für diese Fälle

$$-m^2\psi'(z) = \psi'''(z)$$

und es ist also, da $\psi'''(z)$ die zweite Ableitung von $\psi'(z)$ ist, wieder

$$\psi'(z) = \overline{C}_1 \cos(mz) + \overline{C}_2 \sin(mz)$$

und demnach

$$\psi(z) = \frac{\overline{C}_1}{m} \sin(mz) - \frac{\overline{C}_2}{m} \cos(mz) + \overline{C}_3.$$

Führt man diesen Wert von $\psi(z)$ ein in die Gleichung

$$-m^2 \cdot \psi(z) = \psi''(z) - \frac{\overline{Mo''}}{S},$$

so erhält man

$$\overline{C}_3 = \frac{\overline{Mo''}}{S} \cdot \frac{1}{m^2},$$

d. h. es ist

$$\psi(z) = \frac{\overline{C}_1}{m} \sin(mz) - \frac{\overline{C}_2}{m} \cos(mz) + \frac{\overline{Mo''}}{S} \cdot \frac{1}{m^2}$$

und demnach

$$s - y = \left(C_1 - \frac{\overline{C}_2}{m}\right) \cos(mz) + \left(C_2 + \frac{\overline{C}_1}{m}\right) \sin(mz) + \frac{\overline{Mo''}}{S} \cdot \frac{1}{m^2} - \frac{\overline{Mo}}{S}.$$

Bezeichnet man $C_1 - \frac{\overline{C}_2}{m}$ durch K_1 und $C_2 + \frac{\overline{C}_1}{m}$ durch K_2, so hat also die Biegungslinie die Gleichung

$$y = s - K_1 \cos(mz) - K_2 \sin(mz) - \frac{\overline{Mo''}}{S} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{\overline{Mo}}{S} \quad \ldots \quad 449)$$

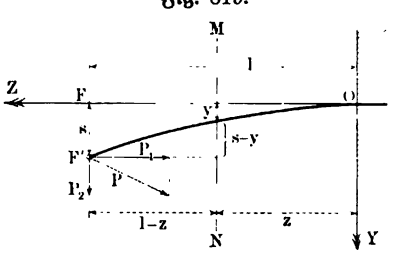
Die Bestimmung der Konstanten K_1 und K_2 und der Durchbiegung s kann natürlich nur von Fall zu Fall erfolgen.

Ersetzt man in den erhaltenen Formeln S durch $-S$, wobei für m $im' = i\sqrt{\frac{S}{E\mathfrak{T}r}}$ eintritt, so gehen die für die Druckkraft $[S]$ abgeleiteten Formeln in die Formeln für die entsprechende Zugkraft $[S]$ über.

180. Gespannter Freiträger mit Endbelastung bei Druckspannungen.

Wenn eine Kraft $[P]$ das Ende eines Freiträgers angreift, wie es Fig. 819 zeigt, so kann man $[P]$ in die Komponente $[P_1]$ und $[P_2]$ zerlegen, woraus hervorgeht, daß hier eine Vereinigung von Druck und Biegung vorliegt.

Fig. 819.



Statt $[P]$ kann auch $[P_1]$ und $[P_2]$ gesondert auftreten.

Man hat hier für einen Schnitt MN bei gerader Belastung

$$Mo = P_2(l - z) + P_1(s - y),$$

falls man die Durchbiegung am freien Ende durch s bezeichnet.

Das Moment $\overline{Mo}$, welches in § 179 eingeführt wurde, ist hier gegeben als

$$\overline{Mo} = P_2(l - z).$$

Da die zweite Ableitung von $\overline{Mo}$ nach z hier den Wert Null hat, so ist die Gleichung der Biegungslinie hier gemäß § 179 für $S = P_1$

$$y = s - K_1 \cos(mz) - K_2 \sin(mz) + \frac{P_2}{P_1}(l - z).$$

Um K_1 und K_2 zu bestimmen, beachten wir zunächst wieder, daß für Punkt O gilt $z = 0$ und $y = 0$, d. h. es ist

$$0 = s - K_1 + \frac{P_2}{P_1} l \quad \text{oder} \quad K_1 = s + \frac{P_2}{P_1} l.$$

Da im Punkte O auch wieder $f'(z) = 0$ ist, so bilden wir

$$y' = f'(z) = + mK_1 \sin(mz) - mK_2 \cos(mz) - \frac{P_2}{P_1}$$

und erhalten

$$0 = -mK_2 - \frac{P_2}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_2 = -\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{1}{m}.$$

Demnach lautet die Gleichung der Biegungslinie nunmehr

$$y = s - \left(s + \frac{P_2}{P_1} l\right) \cos(mz) + \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{1}{m} \sin(mz) + \frac{P_2}{P_1}(l - z).$$

Um s zu bestimmen, betrachten wir Punkt F', für welchen $z = l$ und $y = s$ ist, so daß sich ergiebt

$$s = s - \left(s + \frac{P_2}{P_1} l\right) \cos(ml) + \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{1}{m} \sin(ml)$$

oder

$$s = \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{tng(ml)}{m} - l\right).$$

Demgemäß ist schließlich

$$y = \frac{P_2}{P_1} \left[-z + \frac{\sin(ml) - \sin m(l - z)}{m \cdot \cos(ml)}\right] \text{ für } m^2 = \frac{P_1}{E\mathfrak{T}r} \qquad 450)$$

Man hat nun ferner für Mo die Gleichung

$$Mo = P_2(l - z) + P_1(s - y) = P_2 \cdot \frac{\sin m(l - z)}{m \cdot \cos(ml)} \quad \cdot \cdot \quad 451)$$

Um Mo_{max} zu bestimmen, beachten wir, daß $\sin m(l - z) = 1$ ist für $m(l - z) = \frac{\pi}{2}$, d. h. für $z = l - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{m} = l - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E\mathfrak{T}r}{P_1}}$.

Da bei gegebenem $[P_1]$ wegen der Knickgefahr (vergl. S. 1113) l unter der Grenze $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E\mathfrak{T}r}{P_1}}$ bleiben muß, so ist $z = l - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E\mathfrak{T}r}{P_1}}$ stets negativ und infolgedessen tritt das praktisch verwendbare Maximum von Mo für $z = 0$ ein. Man hat also

$$Mo_{max} = P_2 \frac{tng(ml)}{m} \text{ für } m^2 = \frac{P_1}{E\mathfrak{T}r} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 452)$$

Demgemäß ist die größte Spannung auf der Zugseite

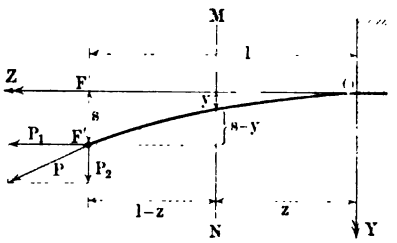
$$\sigma_1 = \frac{Mo_{max}}{\frac{\mathfrak{T}r}{w}} - \frac{P_1}{f}$$

und die größte Spannung auf der Druckseite

$$\sigma_2 = \frac{Mo_{max}}{\frac{\mathfrak{T}r}{w}} + \frac{P_1}{f}.$$

181. Gespannter Freiträger mit Endbelastung bei Zugspannungen. Für die entsprechende Aufgabe mit $[P_1]$ als Zug gilt gemäß Fig. 820

Fig. 820.



$$Mo = P_2(l - z) - P_1(s - y).$$

Um die Formeln des vorigen Paragraphen für diesen Fall umzuschreiben, haben wir in den entwickelten Formeln $-P_1$ für $+P_1$ zu setzen, wobei

$$m = \sqrt{\frac{-P_1}{E\,\mathfrak{T}r}} = i\sqrt{\frac{P_1}{E\,\mathfrak{T}r}} = im'$$

wird.

Aus

$$sin(ml) = \frac{e^{+mli} - e^{-mli}}{2i}$$

wird für $m = im'$

$$sin(im'l) = \frac{e^{-m'l} - e^{+m'l}}{2i} = -\frac{1}{i}\,\mathfrak{Sin}(m'l)$$

und ebenso geht aus $cos(ml)$ hier

$$cos(im'l) = \frac{e^{-m'l} + e^{+m'l}}{2} = \mathfrak{Cos}(m'l)$$

hervor.

Man hat also hier

$$s = -\frac{P_2}{P_1}\left(-\frac{\mathfrak{Tng}(m'l)}{i\,.\,(im')} - l\right) = \frac{P_2}{P_1}\left(l - \frac{\mathfrak{Tng}(m'l)}{m'}\right) \quad . \quad . \quad 453)$$

und ebenso

$$y = \frac{P_2}{P_1}\left(+z - \frac{\mathfrak{Sin}(m'l) - \mathfrak{Sin}[m'(l-z)]}{m'\,.\,\mathfrak{Cos}(m'l)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 454)$$

für $m' = \sqrt{\frac{P_1}{E\,\mathfrak{T}r}}$.

Man hat ferner

$$Mo = P_2\,\frac{\mathfrak{Sin}[m'(l-z)]}{m'\,.\,\mathfrak{Cos}(m'l)}.$$

Um Mo_{max} zu bestimmen, beachten wir, daß die Ableitung von

$$\mathfrak{Sin}\,m'(l-z) = \frac{e^{m'(l-z)} - e^{-m'(l-z)}}{2}$$

nach z für $z = 0 \ldots l$ ihr Vorzeichen nicht wechselt und daß also $\mathfrak{Sin}\,m'(l-z)$

für $z = 0 \ldots l$ kein Maximum oder Minimum hat. Demnach ist für $z = 0$

$$Mo_{max} = \frac{P_2 \,.\, \mathfrak{Tng}\,(m'l)}{m'}.$$

Man hat wieder für die Zugseite bezw. für die Druckseite

$$\frac{Mo_{max}}{\frac{\mathfrak{Tr}}{w}} \pm \frac{P_1}{f}$$

als Spannungsmaxima.

Faßt man $[P_2]$ als Belastung des Balkens auf, so ist für P_2 bei gegebenen Abmessungen eines Balkens aus bestimmtem Materiale ein, von $[P_1]$ abhängiger, größter zulässiger Wert vorhanden, welcher auch hier als „Tragkraft" bezeichnet werden kann.

Für $P_1 = 0$ ist die Tragkraft gemäß § 149 gegeben als $k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{wl}$.
Für die Zugseite ist bei Ausnutzung des Materials

$$k_1 = \frac{P_2 \,.\, w_1 \,.\, \mathfrak{Tng}\,(m'l)}{m' \,.\, \mathfrak{Tr}} + \frac{P_1}{f},$$

d. h. $P_2 = \left(k_1 - \frac{P_1}{f}\right) m' \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w_1} \cdot \mathfrak{Cot}\,(m'l)$.

Für die Druckseite folgt ebenso

$$P_2' = \left(k_2 + \frac{P_1}{f}\right) \cdot m' \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w_2} \cdot \mathfrak{Cot}\,(m'l).$$

Bestimmt man die Maxima von P_2 und P_2' bei veränderlichem P_1, so giebt der Wert von P_1, welcher zu dem größeren der beiden Maximalwerte gehört, die Spannung an, welcher das Maximum der Tragkraft entspricht.

Für relativ große Werte von $m'l = \sqrt{\frac{P_1}{E\,\mathfrak{Tr}}} \cdot l$ ist $\mathfrak{Cot}\,(m'l) = \frac{e^{2\,m'l} + 1}{e^{2\,m'l} - 1} \sim 1$,

so daß man in diesem Falle für $k_1 = k_2 = k$ und $w_1 = w_2 = w$ das Maximum von

$$P_2 = \left(k - \frac{P_1}{f}\right) m' \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w} = m' k \frac{\mathfrak{Tr}}{w} - (m')^3 \frac{E\,\mathfrak{Tr}^2}{fw}$$

zu bestimmen hat, welches offenbar für $(m')^2 = \frac{P_1}{E\,\mathfrak{Tr}} = \frac{1}{3}\frac{kf}{E\,\mathfrak{Tr}}$ oder für $P_1 = \frac{1}{3} kf$ eintritt und also durch

$$(P_2)_{max} = \frac{2}{3}\frac{k}{w}\sqrt{\frac{kf \,.\, \mathfrak{Tr}}{3\,E}}$$

bestimmt ist. Für relativ lange Balken tritt also für die Spannung $P_1 = \frac{1}{3} kf$ die größte Tragkraft auf, welche sich zur Tragkraft des ungespannten Balkens ($P_1 = 0$) verhält wie

$$\frac{2}{3}\frac{k}{w}\sqrt{\frac{kf\,\mathfrak{Tr}}{3\,E}} : \frac{k \,.\, \mathfrak{Tr}}{wl} \text{ oder wie } \frac{2}{3} l \sqrt{\frac{k \,.\, f}{3\,E\,\mathfrak{Tr}}} : 1,$$

d. h. in diesem Verhältnis wird die Tragkraft durch die Spannung verändert.

Soll die Tragkraft durch die Spannung erhöht werden, so muß dieses Verhältnis größer als Eins sein.

Für den kreisförmigen Querschnitt ($r = \frac{1}{2}d$) ist z. B. dieses Verhältnis

$$1{,}54\,\frac{l}{d}\sqrt{\frac{k}{E}} : 1,$$

welches hier für einen Holzbalken bei $k = 100$ und $E = 110000$ den Wert

$$0{,}046\,\frac{l}{d} : 1$$

annimmt. Für $\frac{l}{d} \sim 22$ zeigt also hier der ungespannte Balken bei $P_1 = \frac{1}{3}kf$ dieselbe Tragkraft wie der gespannte Balken, während sich für $l > 22\,d$ die Tragkraft erhöht.

Für relativ kleine Werte von m' ist

$$\mathfrak{Cot}(m'l) = \frac{e^{2m'l}+1}{e^{2m'l}-1} = \frac{1 + 2m'l + \frac{4(m'l)^2}{2!} + \cdots + 1}{1 + 2m'l + \frac{4(m'l)^2}{2!} + \cdots - 1}$$

in zweiter Annäherung gegeben als

$$\frac{1 + \frac{1}{3}(m'l)^2}{m'l},$$

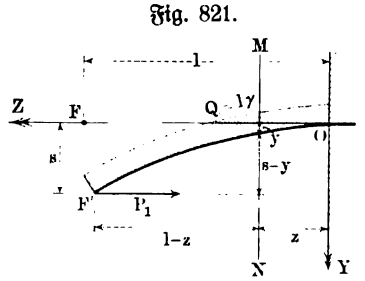
so daß unter denselben Bedingungen wie oben man hier das Maximum von

$$P_2 = \left(k - \frac{P_1}{f}\right)\cdot\frac{\mathfrak{Tr}}{wl}\left[1 + \tfrac{1}{3}(m'l)^2\right] = \left(k - \frac{P_1}{f}\right)\left(1 + \frac{P_1 l^2}{3E\mathfrak{Tr}}\right)\frac{\mathfrak{Tr}}{wl}$$

zu bestimmen hat, welches für $P_1 = \frac{1}{2}kf - \frac{8}{2}\frac{E\mathfrak{Tr}}{l^2}$ eintritt u. s. w.

182. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Druckspannungen. Ersetzt man die Belastung $[P_2]$ in Fig. 820 durch eine gleichmäßige Belastung $Q = l\gamma$, so ist gemäß Fig. 821

Fig. 821.



$$Mo = P_1(s - y) + \frac{\gamma}{2}(l - z)^2.$$

Man hat hier gemäß § 179

$$\overline{Mo} = \frac{\gamma}{2}(l - z)^2$$

und findet für die zweite Ableitung von $\overline{Mo}$ nach z den Wert $+\gamma$, so daß die Gleichung der Biegungslinie hier lautet

$$y = f(z) = s - K_1\cos(mz) - K_2\sin(mz) - \frac{\gamma}{m^2P_1} + \frac{\frac{1}{2}\gamma(l-z)^2}{P_1}.$$

Da

$$f'(z) = +mK_1\sin(mz) - mK_2\cos(mz) - \frac{\gamma(l-z)}{P_1}$$

ist, so gilt für Punkt O

$$0 = s - K_1 - \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{\frac{1}{2}\gamma l^2}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_1 = s - \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{Ql}{2P_1}$$

und

$$0 = -mK_2 - \frac{\gamma l}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_2 = -\frac{\gamma l}{mP_1}.$$

Setzt man noch $Q = l\gamma$ ein, so ist also hier

$$y = f(z) = s - \left(s + \frac{Ql}{2P_1} - \frac{Q}{m^2 l P_1}\right)\cos(mz) + \frac{Q}{mP_1}\sin(mz) - \frac{Q}{m^2 l P_1} + \frac{\frac{1}{2}Q(l-z)^2}{lP_1}.$$

Um s zu bestimmen, betrachten wir Punkt F'', für welchen $z = l$ und $y = s$ ist, wobei sich ergiebt

$$s = \frac{Q}{P_1}\left[-\frac{1}{2}l + \frac{\cos(ml) + ml\sin(ml) - 1}{m^2 l\cos(ml)}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$s = \frac{Q}{P_1}\left[-\frac{1}{2}l + \frac{2\sin\left(\frac{ml}{2}\right)\left[ml\cos\left(\frac{ml}{2}\right) - \sin\left(\frac{ml}{2}\right)\right]}{m^2 l\cos(ml)}\right] \qquad 455)$$

Führt man den Wert von s in y ein, so ist schließlich die Gleichung der Biegungslinie hier gegeben als

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[\frac{ml\sin(ml) - 1}{m^2 l\cos(ml)}[1 - \cos(mz)] + \frac{\sin(mz)}{m} - z + \frac{z^2}{2l}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{mz}{2}\right)\left[ml\cos\left(m\left(l - \frac{1}{2}z\right)\right) - \sin\left(\frac{mz}{2}\right)\right]}{m^2 l\cos(ml)} - z + \frac{z^2}{2l}\right] \qquad 456)$$

Damit ist wieder Mo gegeben u. s. w.

183. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Zugspannungen. Ersetzt man $[P_1]$ in Fig. 821 durch die entsprechende Zugkraft, so hat man in der Formel des § 182 wieder $+P_1$ durch $-P_1$ bezw. m durch im' zu ersetzen.

184 und 185. Der gespannte Zweistützenträger bei Mittelbelastung. Die in §§ 180 und 181 abgeleiteten Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf die Fälle übertragen, welche Fig. 822 und Fig. 823 darstellen. Legt man nämlich das Koordinatenkreuz in den tiefsten Punkt (Mitte) des gebogenen Balkens, so stellen die rechten Hälften der Fig. 822 (a. f. S.) und Fig. 823 genau die Fig. 819 und Fig. 820 dar, es gelten also die dort abgeleiteten Ergebnisse auch unmittelbar für die rechten Hälften der Fig. 822

Soll die Tragkraft durch die Spannung erhöht werden, so muß dieses Verhältnis größer als Eins sein.

Für den kreisförmigen Querschnitt ($r = \frac{1}{2}d$) ist z. B. dieses Verhältnis

$$1{,}54\,\frac{l}{d}\sqrt{\frac{k}{E}} : 1,$$

welches hier für einen Holzbalken bei $k = 100$ und $E = 110000$ den Wert

$$0{,}046\,\frac{l}{d} : 1$$

annimmt. Für $\frac{l}{d} \sim 22$ zeigt also hier der ungespannte Balken bei $P_1 = \frac{1}{3}kf$ dieselbe Tragkraft wie der gespannte Balken, während sich für $l > 22\,d$ die Tragkraft erhöht.

Für relativ kleine Werte von m' ist

$$\operatorname{Cot}(m'l) = \frac{e^{2m'l}+1}{e^{2m'l}-1} = \frac{1 + 2m'l + \frac{4(m'l)^2}{2!} + \cdots + 1}{1 + 2m'l + \frac{4(m'l)^2}{2!} + \cdots - 1}$$

in zweiter Annäherung gegeben als

$$\frac{1 + \frac{1}{3}(m'l)^2}{m'l},$$

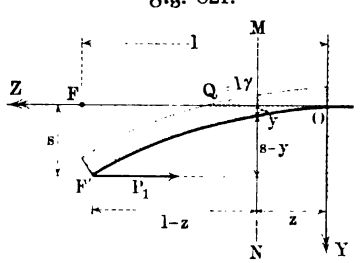
so daß unter denselben Bedingungen wie oben man hier das Maximum von

$$P_2 = \left(k - \frac{P_1}{f}\right)\cdot\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{wl}\left[1 + \tfrac{1}{3}(m'l)^2\right] = \left(k - \frac{P_1}{f}\right)\left(1 + \frac{P_1 l^2}{3E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\right)\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{wl}$$

zu bestimmen hat, welches für $P_1 = \frac{1}{2}kf - \frac{3}{2}\frac{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{l^2}$ eintritt u. s. w.

182. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Druckspannungen. Ersetzt man die Belastung $[P_2]$ in Fig. 820 durch eine gleichmäßige Belastung $Q = l\gamma$, so ist gemäß Fig. 821

Fig. 821.



$$Mo = P_1(s - y) + \frac{\gamma}{2}(l - z)^2.$$

Man hat hier gemäß § 179

$$\overline{Mo} = \frac{\gamma}{2}(l - z)^2$$

und findet für die zweite Ableitung von $\overline{Mo}$ nach z den Wert $+\gamma$, so daß die Gleichung der Biegungslinie hier lautet

$$y = f(z) = s - K_1\cos(mz) - K_2\sin(mz) - \frac{\gamma}{m^2P_1} + \frac{\frac{1}{2}\gamma(l-z)^2}{P_1}.$$

Da

$$f'(z) = +mK_1\sin(mz) - mK_2\cos(mz) - \frac{\gamma(l-z)}{P_1}$$

ist, so gilt für Punkt O

$$0 = s - K_1 - \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{\frac{1}{2}\gamma l^2}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_1 = s - \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{Ql}{2P_1}$$

und

$$0 = -mK_2 - \frac{\gamma l}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_2 = -\frac{\gamma l}{mP_1}.$$

Setzt man noch $Q = l\gamma$ ein, so ist also hier

$$y = f(z) = s - \left(s + \frac{Ql}{2P_1} - \frac{Q}{m^2 l P_1}\right)\cos(mz) + \frac{Q}{mP_1}\sin(mz) - \frac{Q}{m^2 l P_1} + \frac{\frac{1}{2}Q(l-z)^2}{lP_1}.$$

Um s zu bestimmen, betrachten wir Punkt F'', für welchen $z = l$ und $y = s$ ist, wobei sich ergiebt

$$s = \frac{Q}{P_1}\left[-\frac{1}{2}l + \frac{\cos(ml) + ml\sin(ml) - 1}{m^2 l\cos(ml)}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$s = \frac{Q}{P_1}\left[-\frac{1}{2}l + \frac{2\sin\left(\frac{ml}{2}\right)\left[ml\cos\left(\frac{ml}{2}\right) - \sin\left(\frac{ml}{2}\right)\right]}{m^2 l\cos(ml)}\right] \qquad 455)$$

Führt man den Wert von s in y ein, so ist schließlich die Gleichung der Biegungslinie hier gegeben als

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[\frac{ml\sin(ml) - 1}{m^2 l\cos(ml)}[1 - \cos(mz)] + \frac{\sin(mz)}{m} - z + \frac{z^2}{2l}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{mz}{2}\right)\left[ml\cos\left(m\left(l - \frac{1}{2}z\right)\right) - \sin\left(\frac{mz}{2}\right)\right]}{m^2 l\cos(ml)} - z + \frac{z^2}{2l}\right] \qquad 456)$$

Damit ist wieder Mo gegeben u. s. w.

183. Gespannter Freiträger mit gleichmäßiger Belastung bei Zugspannungen. Ersetzt man $[P_1]$ in Fig. 821 durch die entsprechende Zugkraft, so hat man in der Formel des § 182 wieder $+P_1$ durch $-P_1$ bezw. m durch im' zu ersetzen.

184 und 185. Der gespannte Zweistützenträger bei Mittelbelastung. Die in §§ 180 und 181 abgeleiteten Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf die Fälle übertragen, welche Fig. 822 und Fig. 823 darstellen. Legt man nämlich das Koordinatenkreuz in den tiefsten Punkt (Mitte) des gebogenen Balkens, so stellen die rechten Hälften der Fig. 822 (a. f. S.) und Fig. 823 genau die Fig. 819 und Fig. 820 dar, es gelten also die dort abgeleiteten Ergebnisse auch unmittelbar für die rechten Hälften der Fig. 822

und Fig. 823, während dann der Symmetrie wegen für die linken Hälften Entsprechendes gilt, natürlich nur unter Voraussetzung gerader Belastung.

Fig. 822.

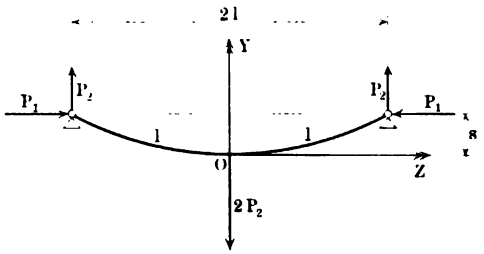
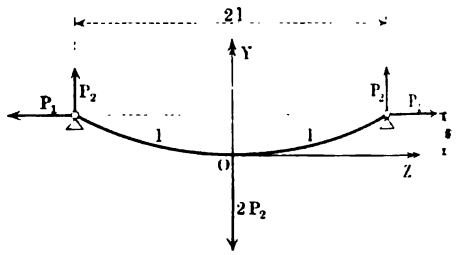
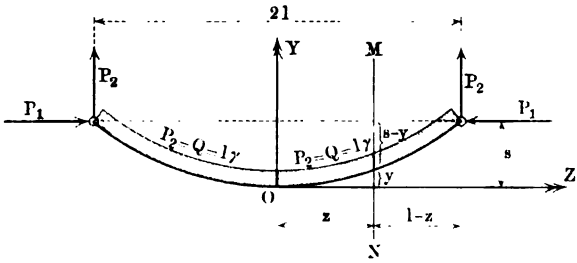


Fig. 823.



186. Der gespannte Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung bei Druckspannungen. Für den Fall der Fig. 824 ist eine einfache Übertragung der für Fig. 821 erhaltenen Ergebnisse nicht zulässig. Man hat hier

Fig. 824.



$$Mo = P_1(s - y) + P_2(l - z) - \tfrac{1}{2}\gamma(l - z)^2,$$

so daß gemäß § 179

$$\overline{Mo} = P_2(l - z) - \tfrac{1}{2}\gamma(l - z)^2$$

oder, da $P_2 = Q = l\gamma$ ist, auch

$$\overline{Mo} = \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - z^2)$$

ist.

Die zweite Ableitung von $\overline{Mo}$ nach z hat hier den Wert $-\gamma$ und demnach gilt hier gemäß § 179 für die Biegungslinie bei $S = P_1$ die Gleichung

$$y = f(z) = s - K_1 \cos(mz) - K_2 \sin(mz) + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{\tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - z^2)}{P_1}$$

und es ist ferner

$$f'(z) = +mK_1 \sin(mz) - mK_2 \cos(mz) - \frac{\gamma z}{P_1}.$$

Man hat also für O

$$0 = s - K_1 + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \tfrac{1}{2}\frac{\gamma l^2}{P_1} \quad \text{oder} \quad K_1 = s + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{Ql}{2P_1}$$

und

$$0 = -mK_2 \quad \text{oder} \quad K_2 = 0.$$

Demnach ist die Gleichung der Biegungslinie

$$y = s - \left(s + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{Ql}{2P_1}\right)\cos(mz) + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{\tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - z^2)}{P_1}.$$

Um s zu bestimmen, betrachten wir einen Endpunkt, für den $z = l$ und $y = s$ ist, man hat dann

$$s = s - \left(s + \frac{\gamma}{m^2 P_1} + \frac{Ql}{2P_1}\right)\cos(ml) + \frac{\gamma}{m^2 P_1}$$

oder

$$s = \frac{\gamma}{m^2 P_1}\left[\frac{1}{\cos(ml)} - 1\right] - \frac{Ql}{2P_1}.$$

Ersetzt man noch γ durch $\frac{Q}{l}$, so ist

$$s = \frac{Q}{P_1}\left[-\tfrac{1}{2}l + \frac{1}{m^2 l}\,\frac{1-\cos(ml)}{\cos(ml)}\right] \quad \ldots \quad 457)$$

und damit ergiebt sich

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[-\frac{z^2}{2l} + \frac{1}{m^2 l}\cdot\frac{1-\cos(mz)}{\cos(ml)}\right] \quad \ldots \quad 458)$$

bei $m^2 = \frac{P_1}{E\mathfrak{T}}$.

Man hat dann ferner

$$Mo = P_1(s-y) + \tfrac{1}{2}\gamma(l^2 - z^2) = \frac{Q}{m^2 l}\cdot\frac{\cos(mz) - \cos(ml)}{\cos(ml)}.$$

Man hat wieder für $z = 0$

$$Mo_{max} = \frac{Q}{m^2 l}\cdot\frac{1-\cos(ml)}{\cos(ml)}$$

und damit als Maximalspannungen für die Zugseite

$$\frac{Mo_{max}}{\frac{\mathfrak{T}}{w}} - \frac{P_1}{f}$$

und für die Druckseite

$$\frac{Mo_{max}}{\frac{\mathfrak{T}}{w}} + \frac{P_1}{f}.$$

187. Der gespannte Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung bei Zugspannungen. Ersetzt man die Druckkraft $[P_1]$ der Fig. 824 durch eine Zugkraft, wie es in Fig. 822 u. 823 geschehen ist, so hat man die Formeln des vorigen Paragraphen umzuschreiben, indem man $+P_1$ durch $-P_1$ und m durch $i \,.\, m'$ ersetzt für $m' = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{T}}}$.

Man erhält dann ohne weiteres

$$y = -\frac{Q}{P_1}\left[-\frac{z^2}{2l} - \frac{1}{(m')^2 \,.\, l}\cdot\frac{1-\mathfrak{Cos}(m'z)}{\mathfrak{Cos}(m'l)}\right]$$

oder

$$y = \frac{Q}{P_1}\left[\frac{z^2}{2l} + \frac{1}{(m')^2 \,.\, l}\cdot\frac{1-\mathfrak{Cos}(m'z)}{\mathfrak{Cos}(m'l)}\right] \quad \ldots \quad 459)$$

für $m' = \sqrt{\frac{P_1}{E\mathfrak{T}}}$ und

$$Mo_{max} = \frac{Q}{(m')^2 l} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}(m'l) - 1}{\mathfrak{Cos}(m'l)} \quad \ldots \ldots \quad 460)$$

und damit als Maximalspannungen für die Zugseite

$$\frac{\frac{Mo_{max}}{\mathfrak{Tr}}}{w} + \frac{P_1}{f}$$

und für die Druckseite

$$\frac{\frac{Mo_{max}}{\mathfrak{Tr}}}{w} - \frac{P_1}{f}.$$

Da bei Spannung durch Zug relativ große Werte von l nicht ausgeschlossen sind, während dies bei Spannung durch Druck wegen der Knickgefahr der Fall ist, so kann hier $\mathfrak{Cos}(m'l) \sim \infty$ werden. In diesem Falle ist

$$\frac{\mathfrak{Cos}(m'l) - 1}{\mathfrak{Cos}(m'l)} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{Cos}(m'l)} \sim 1$$

und demnach

$$Mo_{max} \sim \frac{Q}{(m')^2 l} = \frac{Q \,.\, E\mathfrak{Tr}}{P_1 \,.\, l}.$$

Die größte Biegungsspannung ist dann

$$\frac{Mo_{max} \,.\, w}{\mathfrak{Tr}} = \frac{Q \,.\, E}{P_1 \,.\, l} \cdot w = \gamma \cdot \frac{E}{P_1} \cdot w.$$

Könnte der Stab als Seilkurve frei durchhängen, so würde er bei gleichmäßiger Belastung der Horizontalen die Gestalt einer Parabel annehmen, deren Gleichung

$$z^2 = 2l \cdot \frac{P_1}{Q} \cdot y$$

wäre.

Für den Scheitel dieser Parabel ist der Krümmungshalbmesser $\varrho = l \cdot \frac{P_1}{Q}$, so daß nach der Formänderungsgleichung $\varrho = \frac{E\mathfrak{Tr}}{Mo}$ der Krümmung im Scheitel ein Moment wie oben

$$Mo = \frac{E\mathfrak{Tr}\,Q}{l\,P_1}$$

und eine Spannung wie oben

$$\frac{Mo}{\mathfrak{Tr}} \cdot w = \gamma \cdot \frac{E}{P_1} \cdot w$$

entspräche, welche also unabhängig ist von der Stützweite $2l$[1]).

188. Die Behandlung schiefer Belastung. Schneidet die Ebene des biegenden Momentes in einem der vorstehend dargestellten Fälle den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, so hat man den damit gegebenen Fall der schiefen Belastung wieder auf zwei Fälle gerader Belastung zurückzuführen, wie in § 163 gezeigt.

Für die Ermittelung der Spannungen treten dann besondere Betrachtungen ein, welche wir in der nächsten Abteilung anstellen werden.

[1]) Zu letzterem vergl. Tolle, Die steife Kettenlinie, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1897, S. 855 f.

Sechste Abteilung.

Die Anstrengung gerader Stäbe bei Fällen zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.

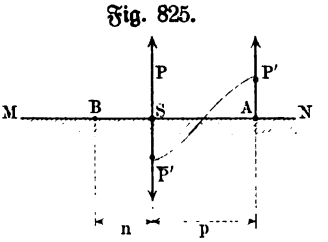
189. **Die Einteilung der Fälle zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.** Nachdem in der vorigen Abteilung der Einfluß einer, in der Achse des Stabes wirkenden Druckkraft oder Zugkraft in Verbindung mit einem biegenden Momente bestimmt worden ist, bieten die Fälle zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit, welche für die Praxis von Bedeutung sind, keine besondere Schwierigkeiten dar, da man sie stets als Vereinigungen der entsprechenden einfachen Fälle ansehen kann. Es bleibt nur übrig, die größte Anstrengung des Materiales von Fall zu Fall festzustellen. Dazu ist es zweckmäßig, zu unterscheiden, ob bei einer (ebenen) Schnittfläche des Stabes, für deren Punkte die Anstrengung bestimmt werden soll,

a) nur verschiedenartige Normalspannungen oder
b) nur verschiedenartige Schubspannungen oder
c) zugleich Normalspannungen und Schubspannungen

zu berücksichtigen sind.

190. **Beanspruchung durch Normalspannungen.** Die Fälle, welche in der vorigen Abteilung behandelt wurden, sind alle dadurch bestimmt, daß eine excentrische Druckkraft oder Zugkraft $[P']$, der Stabachse parallel, angreift, oder daß, was auf dasselbe hinausläuft, eine Druckkraft oder Zugkraft $[P]$ in der Stabachse im Verein mit einem Biegungsmomente $[Mo]$ wirkt, dessen Ebene die Achse des Stabes schneidet.

Fig. 825.



Ist die excentrische Verschiebung der Kraft $[P']$ im ersten Falle $SA = p$, so kann statt dessen die in der Achse wirkende Kraft $[P]$ vom Werte $P = P'$ und das Moment $[Mo]$ vom Werte Pp eingeführt werden, während im zweiten Falle Mo die Form Pp erhalten kann, wobei $p = \frac{Mo}{P}$ ist, so daß die eine der Kräfte von $[Mo]$ durch $[P]$ zerstört wird. Vergl. Fig. 825.

Solange die Ebene des Momentes [*Mo*] eine Hauptachse des Querschnittes trifft, ist die Bestimmung der entsprechenden Spannungen sehr einfach, sie entspricht durchaus Fig. 791, wonach sich die Neutrale für

$$\sigma = \frac{Mo}{\frac{\mathfrak{T}r}{w}} = \frac{Mo \,.\, w}{\mathfrak{T}r} \quad \text{und} \quad \sigma' = \frac{P}{f}$$

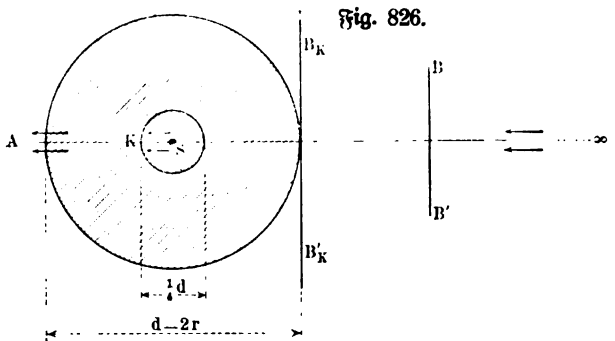
um die Strecke

$$SB = n = w \cdot \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{P \,.\, \mathfrak{T}r}{f \,.\, Mo} = \frac{\mathfrak{T}r}{f \,.\, p}$$

verschiebt.

Die Verschiebung [n] liegt stets so, daß sich S auf der Strecke AB befindet, wie es Fig. 825 zeigt; in dieser Figur ist rechts die Zugseite und links die Druckseite des Stabes, so daß der dazutretende Zug von [P] nur auf der linken Seite durch Druckspannungen zerstört werden kann.

Fig. 826.



Die größten Spannungen sind $\sigma \pm \sigma'$, wie bereits für die Fälle der vorigen Abteilung im einzelnen ausgeführt wurde, wo ja stets gerade Belastung vorausgesetzt war.

In S selbst hat die Biegungsspannung [σ] stets den Wert Null, so daß dort nur die Spannung $\sigma' = \frac{P}{f}$ herrscht.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$n = \frac{\mathfrak{T}r}{f \,.\, p}$$

noch etwas näher, wozu wir ihr die Gestalt

$$SA \,.\, SB = p \,.\, n = \frac{\mathfrak{T}r}{f} \quad \cdots\cdots \quad 461\,a)$$

geben.

Da $p = 0$ und $n = \infty$ und $p = \infty$ und $n = 0$ sich entsprechen, so liegt die verschobene Neutrale bei relativ kleinem Werte von p außerhalb des Stabmaterials und bei relativ großem Werte von p innerhalb des Stabmaterials, während sie dazwischen die Grenze des Querschnittes überschreitet.

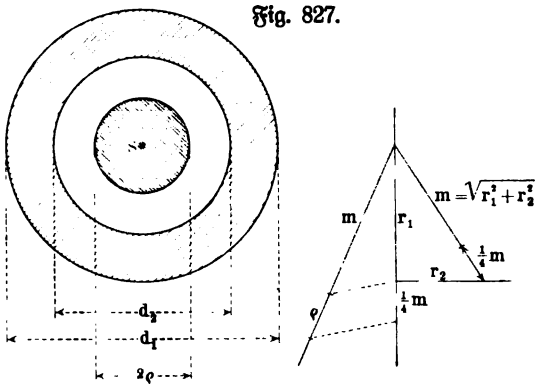
Im ersten Falle hat der Querschnitt nur Zugspannungen oder nur Druckspannungen auszuhalten, was z. B. bei Mauerwerk von Wichtigkeit ist, da dieses zwar einen bestimmten Druck aushält, gegen Zug aber fast gar nicht widerstandsfähig ist.

Die Überschreitung der Querschnittsgrenze durch die Neutrale tritt ein für $n = w$ bezw. $p = \frac{\mathfrak{T}r}{fw}$.

Für den Kreis als Querschnitt, bei dem alle Achsen Hauptachsen sind, ist $\mathfrak{T}r = \frac{1}{4}\pi r^4$, $f = r^2\pi$ und $w = r$, so daß hier die Überschreitung der Querschnittsgrenze für $n = r$ bezw. $p = \frac{1}{4}r$ eintritt.

Wenn der Angriffspunkt A von $[P]$ in Fig. 826 von S nach K rückt, wandert die Neutrale aus dem Unendlichen über BB' nach $B_K B'_K$; rückt A über K hinaus, so wandert die Neutrale weiter auf S zu, um S zu erreichen, wenn A ins Unendliche gelangt ist. Solange also der Angriffspunkt A von $[P]$ in der doppelt schraffierten Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{4}r$ bleibt, welche man als Kern oder Kernfläche des Querschnittes bezeichnet, so lange tritt die Neutrale nicht in den Querschnitt ein, d. h. so lange ist dieser nur durch Zugspannungen oder nur durch Druckspannungen beansprucht.

Fig. 827.



Für den Kreisring der Fig. 827 ist $\frac{\mathfrak{T}r}{fw} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{4r_1}$, so daß sich hier wieder die doppelt schraffierte Fläche als Kern ergiebt.

Für das Quadrat der Fig. 828 ist $\frac{\mathfrak{T}r}{f} = \frac{a^2}{12}$. Für die Richtung SG ist

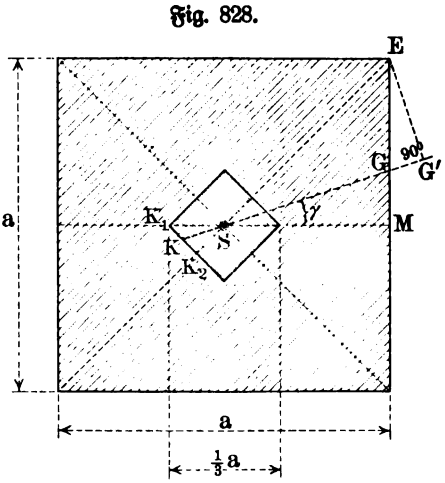
$$w = SG' = SE \cdot \cos(45^0 - \gamma)$$

$$= \frac{SM}{\cos 45^0}(\cos 45^0 \cos\gamma + \sin 45^0 \sin\gamma) = \frac{a}{2}(\cos\gamma + \sin\gamma)$$

und also

$$SK = \frac{\mathfrak{T}r}{fw} = \frac{a}{6(\cos\gamma + \sin\gamma)}.$$

Fig. 828.



Für $\gamma = 0^0$, d. h. für $SM = w$ ist $SK_1 = \frac{a}{6} = 0{,}1667\,a$ und für $\gamma = 45^0$, d. h. für $SE = w$ ist $SK_2 = \frac{a}{6\sqrt{2}} = 0{,}1179\,a$, während die Zwischenpunkte der Kerngrenze durch das Lot aus K_1 auf ES gegeben werden, da

$$SK = SK_1 \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin(\gamma + 45^0)}$$

$$= \frac{a}{6(\cos\gamma + \sin\gamma)}$$

ist.

Dasselbe Ergebnis folgt auch aus dem Ansatze

$$SK = \frac{a^2}{12\,SG'} \quad \text{bezw.} \quad SK \,.\, SG' = \frac{a^2}{12},$$

falls man von K ein Lot auf ES fällt, so daß $\triangle\, SKK_2 \sim \triangle\, SEG'$ und demnach $SK : SE = SK_2 : SG'$ oder $SK \,.\, SG' = \frac{a^2}{12} = SE \,.\, SK_2$ oder $SK_2 = \frac{a^2}{12\,SE} = \frac{a}{6\sqrt{2}}$ ist.

Durch Einzeichnung der entsprechenden Strecken für die anderen Teile der Umgrenzung des gegebenen Quadrates entsteht der doppelt schraffierte Kern der Fig. 828.

Dieselbe Betrachtung führt für das regelmäßige Achteck zu Fig. 829, in welcher $\varrho = 0{,}226\,r$ ist.

Fig. 829.

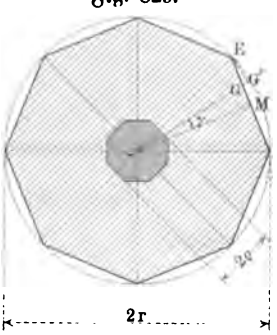
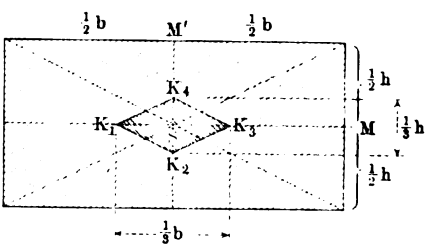
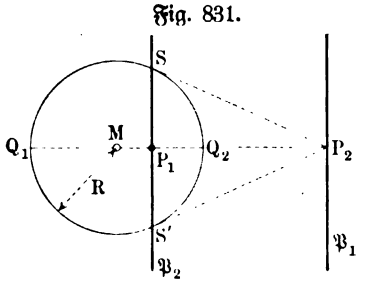


Fig. 830.



Für das Rechteck (Fig. 830), dessen Trägheitsellipse kein Kreis ist, lassen sich vorläufig nur vier Punkte der Kerngrenze bestimmen. Für $w = SM = \frac{1}{2}b$ ist $\mathfrak{T}r = \frac{b^3 h}{12}$ und also $\frac{\mathfrak{T}r}{f w} = \frac{b}{6}$, so daß $SK_1 = \frac{b}{6}$ einen Punkt K_1 der Kerngrenze bestimmt, dem dann noch K_3 entspricht; ebenso ergiebt sich $SK_2 = \frac{h}{6}$ für $w = SM' = \frac{1}{2}h$ u. s. w. Daß der Kern durch das Viereck $K_1 K_2 K_3 K_4$ bestimmt wird, kann durch Betrachtung von $w = SG$ entsprechend Fig. 828 gezeigt werden, ergiebt sich aber später auf einfachere Weise.

Fig. 831.



Die Gestalt der dargestellten Kerngrenzen in ihrer Beziehung zu den gegebenen Querschnittsumfängen erinnert an Polarfiguren.

Wenn in Fig. 831 die Beziehung $MP_1 \,.\, MP_2 = R^2$ besteht, so heißen P_1 und P_2 bekanntlich zugeordnete Pole in Bezug auf den Kreis vom Radius R. Man bezeichnet ferner das Lot $\mathfrak{P}_2$ auf $Q_1 Q_2$ im Punkte P_1 als Polare des Punktes P_2 und nennt diesen Punkt P_2 selbst den Pol der Geraden $\mathfrak{P}_2$, ebenso heißt das Lot $\mathfrak{P}_1$

auf $Q_1 Q_2$ im Punkte P_2 die Polare des Punktes P_1 und dieser Punkt P_1 selbst der Pol der Geraden $\mathfrak{P}_1$. Jede Sekante durch P_1 bezw. P_2 wird in P_1 bezw. P_2 selbst und in den Schnittpunkten mit dem Kreise und mit der Polaren $\mathfrak{P}_1$ bezw. $\mathfrak{P}_2$ harmonisch geteilt und zwar so, daß die Schnittpunkte mit dem Kreise stets das eine Paar der zugeordneten Punkte bilden; im besondern ist Q_1, P_1, Q_2, P_2 eine harmonische Punktgruppe.

Aus diesen grundlegenden Eigenschaften folgt, daß sich die Polaren zweier beliebiger Punkte im Pole von deren Verbindungsgerade

Fig. 832 a.

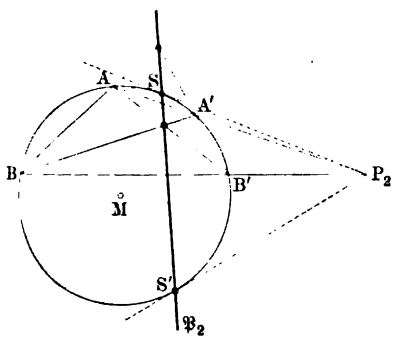
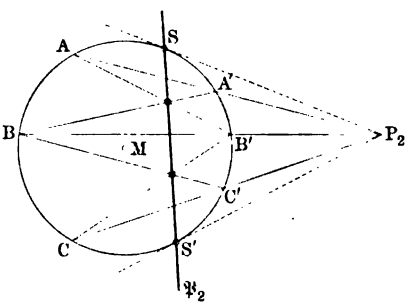


Fig. 832 b.



schneiden und daß umgekehrt die Pole zweier beliebiger Geraden auf der Polare ihres Schnittpunktes liegen.

Bewegt sich also ein Punkt auf einer Geraden $\mathfrak{P}$, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt und zwar um den Pol P der Geraden $\mathfrak{P}$; dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt P, so bewegen sich ihre Pole auf einer Geraden und zwar auf der Polaren $\mathfrak{P}$ des Punktes P.

Durchläuft ein Punkt P einen gegebenen Streckenzug, so umhüllt seine Polare $\mathfrak{P}$ einen anderen Streckenzug, und zwar entspricht jeder Seite des ersten ein Eckpunkt des zweiten und jedem Eckpunkte des ersten eine Seite des zweiten und umgekehrt; Entsprechendes ist der Fall, wenn die Polare einen gegebenen Streckenzug umhüllt. Geht der Streckenzug für P in eine Kurve über, so geht auch der Streckenzug, den $\mathfrak{P}$ einhüllt, in eine Kurve über und umgekehrt.

Diese beiden Streckenzüge oder Kurven heißen Polarfiguren voneinander in Bezug auf den Kreis vom Radius R, weil jede der beiden Figuren als Punktgebilde oder als Tangentengebilde entsteht, wenn man die Tangenten oder die Punkte des anderen als Polaren oder als Pole auffaßt, zu denen die entsprechenden Pole oder Polaren zu bestimmen sind.

Für die Herstellung von Polarfiguren ist es von Wichtigkeit, daß sich ihre Konstruktion allein mit dem Lineale durchführen läßt, da man zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt allein mit dem Lineale konstruieren kann. Liegt der Pol P_2 außerhalb des Kreises, so zeigt Fig. 832 a, in welcher $P_2 A$ und $P_2 B$ beliebige Sekanten sind, und Fig. 832 b, in welcher $P_2 A$, $P_2 B$ und $P_2 C$ beliebige Sekanten sind, die Konstruktion der Polare $\mathfrak{P}_2$, durch welche auch die Tangenten $P_2 S$ und $P_2 S'$ gegeben sind.

Liegt der Pol P_1 innerhalb des Kreises, so zeigt Fig. 833, in welcher P_1A und P_1B beliebige Sekanten sind, die Konstruktion der Polare $\mathfrak{P}_1$.

Ist umgekehrt der Pol zu einer Geraden zu konstruieren, so wählt man auf dieser zwei beliebige Punkte und konstruiert gemäß Fig. 832 oder 833 ihre Polaren, deren Schnittpunkt dann der gesuchte Pol ist.

Untersucht man nun zunächst für den Kreis als Querschnitt, ob dessen Randlinie und dessen Kerngrenze wirklich Polarfiguren voneinander sind, so hat man die Beziehungen

Fig. 833.

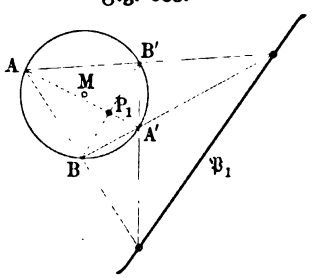
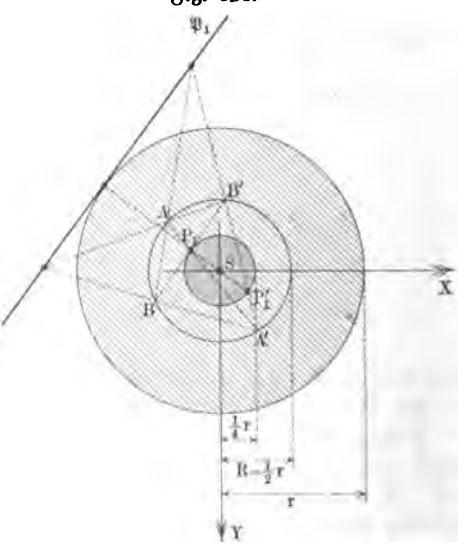


Fig. 834.



$$n \,.\, p = \frac{\mathfrak{Tr}}{f} = \tfrac{1}{4} r^2$$

und

$$MP_1 \,.\, MP_2 = R^2$$

miteinander zu vergleichen, aus denen $R = \frac{1}{2} r$ folgt. Schlägt man also mit dem Radius $R = \frac{1}{2} r$ in Fig. 834 einen Hülfskreis, so ist die Kerngrenze die Polarfigur der Randlinie und umgekehrt, wobei aber zu bemerken ist, daß der Pol P_1 einer Polare $\mathfrak{P}_1$ noch centrisch nach P_1' übertragen werden muß, um den Angriffspunkt der Kraft für $\mathfrak{P}_1$ als Nulllinie zu liefern, weil dieser Angriffspunkt und die Nulllinie auf verschiedenen Seiten von S liegen.

Man nennt P_1' wohl auch den Antipol von $\mathfrak{P}_1$ und spricht demgemäß von einer antipolaren Beziehung zwischen P_1' und $\mathfrak{P}_1$.

Der Hülfskreis vom Radius R, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = R^2 = \frac{1}{4} r^2$ für ein rechtwinkliges Kreuz durch S lautet, läßt sich natürlich als Centralellipse des Querschnittes auffassen und zwar muß in der Gleichung

$$x^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_x + y^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_y = C^2,$$

da $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{\pi}{4} r^4$ ist, gesetzt werden $C^2 = \frac{\pi r^6}{16}$, um die Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2 = \tfrac{1}{4} r^2$$

zu liefern; da demnach

$$C^2 = (r^2 \pi)\,(\tfrac{1}{4} r^2)\,(\tfrac{1}{4} r^2)$$

ist, so hat man die Culmannsche Ellipse (vergl. S. 660) als Hülfskreis der polaren Abbildung zu wählen.

Eine entsprechende Betrachtung für die anderen Kerngrenzen der Querschnitte mit Trägheitskreis führt zu demselben Ergebnisse, d. h.

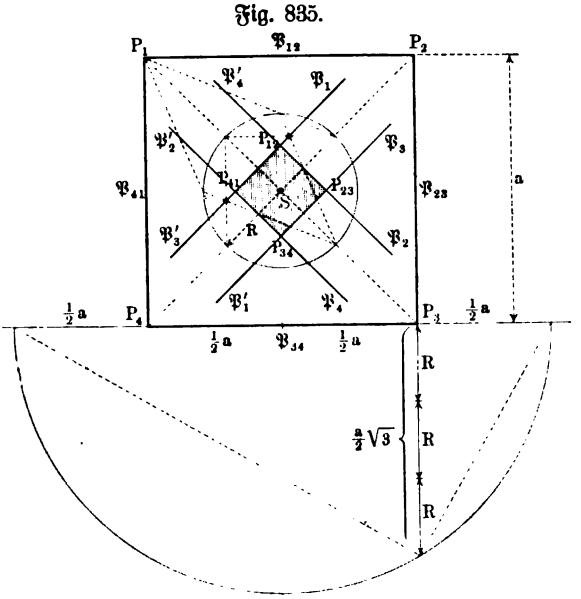
Querschnittsgrenze und Kerngrenze sind Antipolarfiguren voneinander, wenn man den Kreis, welchen die Culmannsche Ellipse darstellt, als Hülfskreis für die polare Abbildung verwendet.

Für das Rechteck, dessen Trägheitsellipse kein Kreis ist, gilt, wie sich später ergeben wird, Entsprechendes.

Die Kerngrenzen der Fig. 826 u. f. lassen sich demnach nunmehr als die Antipolarfiguren der Querschnittsgrenzen konstruieren und umgekehrt. Als Beispiel behandeln wir den quadratischen Querschnitt, für den Fig. 835 die Konstruktion zeigt. Da hier $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{a^4}{12}$ ist, so ist die Culmannsche Ellipse gegeben als $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{12}$, d. h. man hat $R = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

In Fig. 835 ist unterhalb der Basis die Konstruktion von R durchgeführt, so daß der Kreis um S bestimmt ist; in Bezug auf diesen ist dann für P_1 die Polare $\mathfrak{P}_1$ konstruiert und als $\mathfrak{P}_1'$ centrisch übertragen, wobei zu bemerken ist, daß $\mathfrak{P}_1'$ zugleich die Polare $\mathfrak{P}_3$ für P_3 ist, während $\mathfrak{P}_1$ zugleich als $\mathfrak{P}_3'$ angesehen werden kann. Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Querschnittsgrenze ist damit auch die Kerngrenze bestimmt. Dabei sind einerseits $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ die Polaren von P_1, P_2, P_3, P_4 und anderseits $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{34}$, $\mathfrak{P}_{41}$ die Polaren zu P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}.

Fig. 835.



Trifft die Ebene des Momentes [*Mo*] nicht eine Hauptachse des Querschnittes, so liegt ein Fall schiefer Belastung vor und man hat also auf § 163 zurückzugreifen. Hat man die Nulllinie (Biegungsachse) für die gegebene Kraftlinie (Spur der Momentenebene im Querschnitt) von [*Mo*], z. B. gemäß Fig. 784 bestimmt, so gilt für eine Faser des Querschnittes im Abstande v von der Nulllinie gemäß § 163

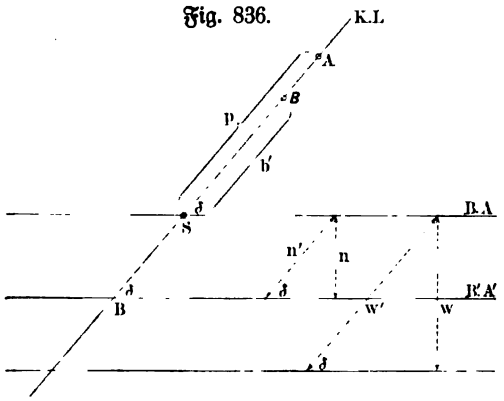
$$\sigma_v = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}'} \cdot v,$$

wobei $\mathfrak{Tr}' = \mathfrak{Tr}_N \,.\, \sin\delta$ ist, falls $\mathfrak{Tr}_N$ das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Nulllinie und δ der Winkel zwischen Kraftlinie und Null-

linie ist. Für die so, lediglich für $[Mo]$ bestimmte Nulllinie gilt wieder die frühere Darstellung der Spannungen gemäß Fig. 791, wobei $\sigma = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}} \cdot w$ und $\sigma' = \frac{P}{f}$ ist, so daß sich die ursprüngliche Nulllinie durch den Einfluß von $[\sigma']$ um $n = \frac{\mathfrak{Tr}'}{f \cdot p}$ verschiebt.

Man hat dann wieder σ_{max} und $\sigma_{min} = \sigma \pm \sigma'$.

Fig. 836.

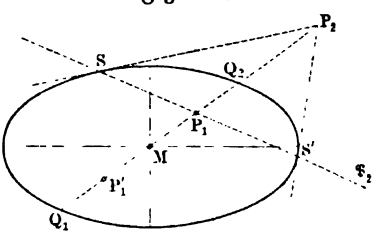


Um die Gleichung

$$n = \frac{\mathfrak{Tr}'}{f \cdot p} \quad \text{oder} \quad n \cdot p = \frac{\mathfrak{Tr}'}{f}$$

auszuwerten, formen wir die

Fig. 837.



Verschiebung n wieder (vergl. S. 1065) gemäß Fig. 836 um in eine Verschiebung n', welche in die Richtung der Kraftlinie fällt; es ist wieder

$$n' \sin\delta = n \quad \text{oder} \quad SB = n' = \frac{n}{\sin\delta}$$

und also

$$n' \cdot p = \frac{\mathfrak{Tr}'}{f \cdot \sin\delta}.$$

Da $\mathfrak{Tr}' = \frac{\mathfrak{Tr}_N}{\sin\delta} = \mathfrak{Tr}'_N \cdot \sin\delta$ gemäß S. 1070 und da ferner $\mathfrak{Tr}'_N = f \cdot (b')^2$ gemäß S. 1066, so ist $\mathfrak{Tr}' = f(b')^2 \cdot \sin\delta$ und man hat also

$$n' \cdot p = (b')^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 461\,b)$$

wobei $SB = b'$ der Halbmesser der Culmannschen Centralellipse ist, welcher in die Kraftlinie fällt.

Die Gleichung Nr. 461 b) ist aber die Gleichung der antipolaren Abbildung für die Culmannsche Ellipse als Hülfsfigur, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht.

Bildet man Fig. 831 durch Parallelprojektion auf einer Ebene ab, so geht der Kreis vom Radius R in Fig. 831 im allgemeinen in eine Ellipse über, für welche, wie Fig. 837 zeigt, $P_2 M$ und SS' konjugierte Richtungen werden; dabei ist wieder $MP_1 \cdot MP_2 = \overline{MQ_2}^2$, da die Punktgruppe Q_1, P_1, Q_2, P_2 bei der Projektion harmonisch bleibt und $MQ_1 = MQ_2$ ist. Infolgedessen bestehen die bei Fig. 831 angeführten Sätze auch für Fig. 837 weiter, ebenso die Betrachtungen gemäß Fig. 832 und Fig. 833.

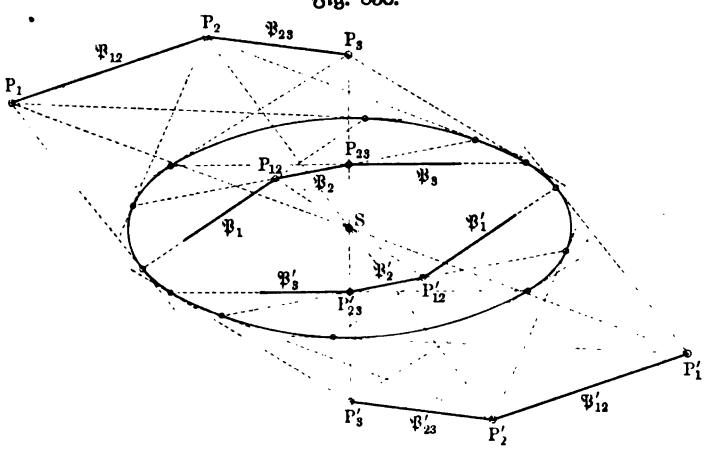
Überträgt man P_1 centrisch nach P_1', so entsprechen die Punkte P_2, Q_2, M, P_1' der Fig. 837 genau den Punkten A, B, S, B der Fig. 836.

Nennt man das centrische Bild P_1' des Poles P_1 für das Centrum S wieder den Antipol für die Polare $\mathfrak{P}_1$ von P_1 u. s. w., so gilt also der Satz:

Der Angriffspunkt A der excentrischen Kraft ist der Antipol für die Nulllinie $B'A'$ als Polare in Bezug auf die Culmannsche Trägheitsellipse als Hülfsfigur der polaren Abbildung.

Bewegt sich der Angriffspunkt A auf einer Linie, so umhüllen die zugehörigen Nulllinien die Polarfigur der Linie, welche das centrische Bild von A (für S als Centrum) beschreibt. Vergl. Fig. 838.

Fig. 838.



In dem besonderen Falle, in welchem die bewegliche Nulllinie die Querschnittsgrenze umhüllt, beschreibt der bewegliche Angriffspunkt A die Kerngrenze, wobei man der Nulllinie als Polare als Pol das centrische Bild von A für das Centrum S zuordnen muß (in Bezug auf die Culmannsche Ellipse als Hülfsfigur der polaren Abbildung).

Man hat in diesem Falle $n = w$ und demnach $SA = p = \frac{\mathfrak{T}r'}{f \, , w}$.

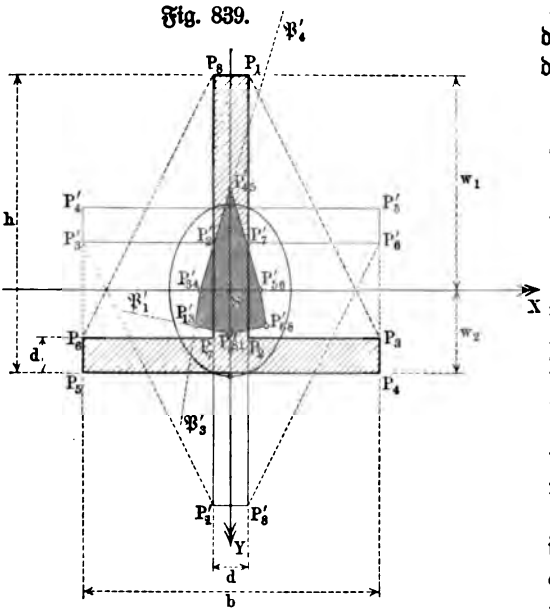
Mit dieser Betrachtung ist auch die Konstruktion der auf S. 1070 eingeführten Landschen Widerstandsfläche erledigt. Diese entsteht dadurch, daß man auf jeder Kraftlinie von S aus den Wert von $W' = \frac{\mathfrak{T}r'}{w}$ für die zugehörige Nulllinie aufträgt. Da nun für die Kerngrenze $SA = p = \frac{\mathfrak{T}r'}{f \, . \, w}$ ist und da also $W' : p = f : 1$, so ist die Grenze der Widerstandsfläche eine perspektivische Abbildung der Kerngrenze für S als Centrum und zwar nach dem Modul $f : 1$. Da man die Widerstandsfläche bei passender Wahl für die Einheiten der Zeichnung in beliebiger Größe entwerfen kann, während die Kernfläche bei der gewöhnlichen Größe der Querschnittsdarstellungen ziemlich klein ausfällt, so ist es zweckmäßig, von der

Widerſtandsfläche auszugehen und aus ihr durch perſpektiviſche Abbildung in Bezug auf S die Kernfläche abzuleiten.

Zunächſt ſoll die Kerngrenze eines beliebigen Querſchnittes unmittelbar beſtimmt werden, ſo wie es durch Fig. 835 für das Quadrat geſchehen iſt.

Iſt in Fig. 838 (a. v. S.) die Culmannſche Ellipſe für den Querſchnitt gezeichnet und iſt $P_1P_2P_3$ ein Stück der Grenze des Querſchnittes, ſo ſind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ die Polaren von P_1, P_2, P_3 und P_{12}, P_{23} die Pole für $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$. Überträgt man $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ centriſch, ſo beſtimmen $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_3$ mit den Schnittpunkten P'_{12}, P'_{23} die Kerngrenze, ſoweit ſie durch $P_1P_2P_3$ gegeben iſt.

Fig. 839.



Statt die centriſche Übertragung von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ vorzunehmen, kann man auch von vornherein die Querſchnittsgrenze $P_1P_2P_3$ centriſch übertragen, und für dieſe centriſch übertragene Querſchnittsgrenze $P'_1P'_2P'_3$ die Polaren $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_3$ mit den Schnittpunkten P'_{12}, P'_{23} beſtimmen.

Wir führen dieſe Konſtruktion nun für ein ⊥-Eiſen vom Normalprofile $\frac{6}{6}$ durch, wie es Fig. 839 zeigt; es iſt hier $b = 6$ cm, $h = 6$ cm, $d = 0{,}7$ cm, $w_1 = 4{,}34$ cm, $w_2 = 1{,}66$ cm, $f = 7{,}94$ qcm, $\mathfrak{Tr}_x = 23{,}8\ \overline{\text{cm}}^4$ und $\mathfrak{Tr}_y = 12{,}2\ \overline{\text{cm}}^4$. Demnach gilt für die Culmannſche Ellipſe bei Centimetern als Einheit

$$\left(\frac{x}{1{,}239}\right)^2 + \left(\frac{y}{1{,}731}\right)^2 = 1,$$

wobei der Abſtand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte 1,209 cm iſt.

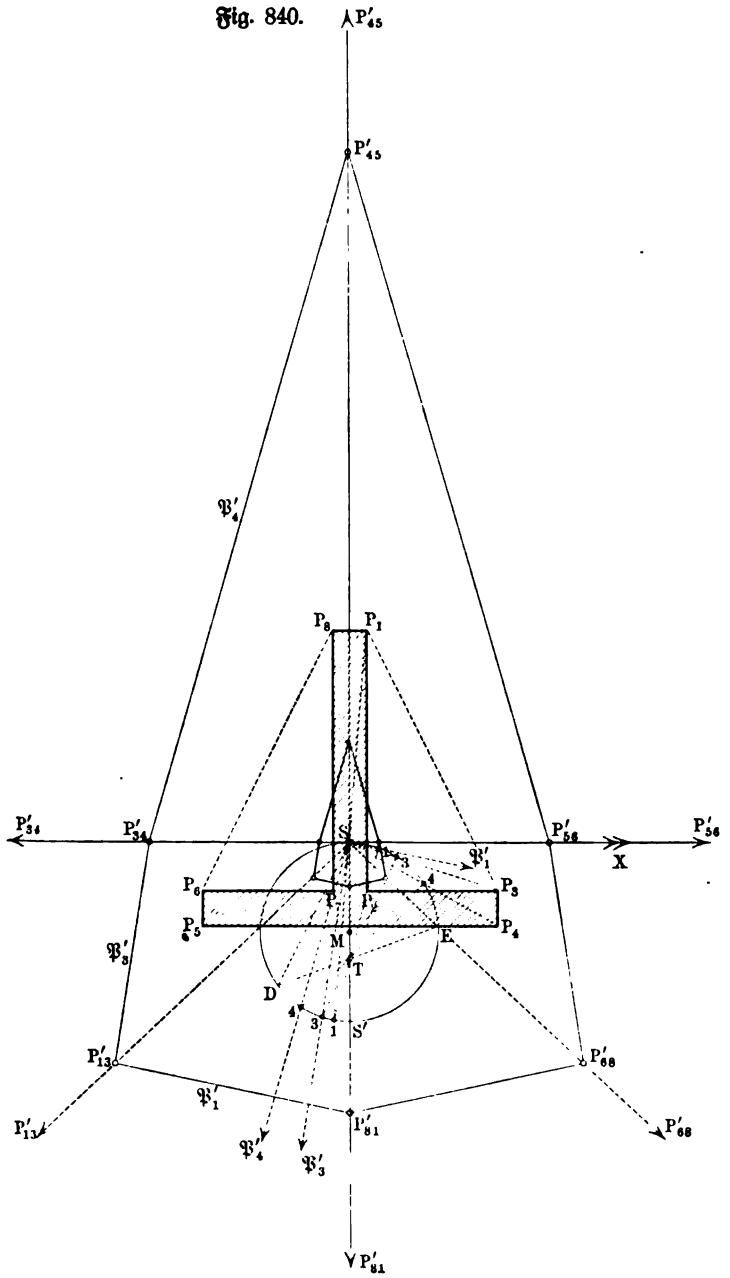
Wir übertragen den Querſchnitt $P_1P_2\ldots$ zunächſt centriſch, ſo daß $P'_1P'_2\ldots$ entſteht, und zeichnen dann in Bezug auf die Culmannſche Ellipſe die Polarfigur für $P'_1P'_2\ldots$ Dabei hat man die Winkel beiderſeits bei P'_2 und bei P'_7 durch die Strecken $P'_1P'_3$ und $P'_6P'_8$ zu beſeitigen, weil die Nullinie in der Lage $P'_1P'_2$ und in der Lage $P'_2P'_8$ u. ſ. w. in den Querſchnitt eintreten würde. Zeichnet man die Polaren $\mathfrak{P}'_1$ für P'_1, $\mathfrak{P}'_3$ für P'_3 und $\mathfrak{P}'_4$ für P'_4, ſo liefern dieſe die linke Hälfte des Kernes, da die Pole P'_{81} und P'_{45} für $P'_8P'_1$ und $P'_4P'_5$ auf der Symmetrale SY liegen.

Umhüllt die Nullinie den Querſchnitt $P_1P_3P_4\ldots$, ſo durchläuft der Angriffspunkt der excentriſchen Kraft den Kern $P'_{81}P'_{13}\ldots$

Man kann die Zeichnung der Culmannſchen Ellipſe ſparen, wenn man

statt ihrer den Landschen Trägheitskreis einführt und mit dessen Hülfe die konjugierten Richtungen von Nulllinien und Kraftlinien bestimmt. Wir zeigen dies für den Querschnitt der Fig. 839 in Fig. 840 und zwar unter Be-

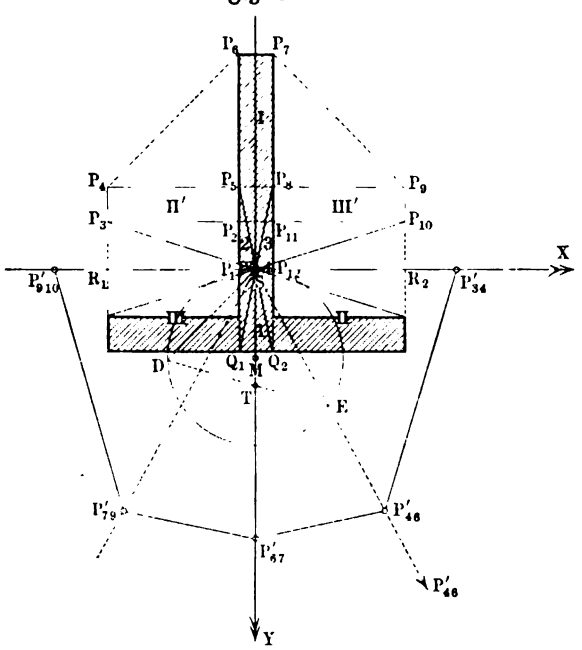
Fig. 840.



nutzung eines Trägheitskreises für Hauptachsen. Dabei ist zu beachten, daß wegen der Gegenseitigkeit der Beziehungen von Polarfiguren nicht nur die Kerngrenze als Ort des Angriffspunktes erscheint, wenn man die Seiten des gegebenen Querschnittes als Nulllinien auffaßt, sondern daß auch die Grenze des Querschnittes als Ort des Angriffspunktes entsteht, wenn man die Seiten des gesuchten Kernes als Nulllinien auffaßt.

Denkt man sich die Ecken des gegebenen Querschnittes und die Ecken des gesuchten Kernes mit S verbunden, so ist z. B. einerseits der Strecke SP_1 als Kraftlinie die gesuchte Kernseite $\mathfrak{P}'_1$ als Nulllinie konjugiert, während anderseits der gesuchten Strecke SP'_{81} als Kraftlinie die gegebene Querschnittsseite P_8P_1 konjugiert ist. Man erhält also mit Hülfe des Trägheitskreises sowohl die Richtungen von SP'_{81}, SP'_{12}, ... als auch die Richtungen von $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, ..., so daß man ohne weiteres eine Figur herstellen kann, welche der gesuchten Kerngrenze ähnlich ist und demnach als Widerstandsfläche aufgefaßt werden kann. Trägt man W'_1 oder W'_2 für die X-Achse (als Nulllinie) auf der Y-Achse (als Kraftlinie) in einem bestimmten Maßstabe auf, so erhält man die Größen W' in demselben Maßstabe für alle Achsen durch S; dasselbe gilt natürlich auch, falls man W' für die Y-Achse verwendet.

Fig. 841.



Bildet man die so erhaltene Fläche, nachdem ein Punkt der Kerngrenze bestimmt ist, perspektivisch ab für S als Centrum, so erhält man die ganze Kerngrenze.

Da die konjugierten Richtungen für P_3P_4, P_4P_5 ... hier ohne weiteres durch die Achsen gegeben sind, so hat man nur die konjugierte Richtung für P_1P_3 oder P_6P_8 zu bestimmen; für P_6P_8 geschieht dies, indem man $SD \parallel P_6P_8$ legt, ferner DT zieht und damit E erhält, so daß nun SE die Richtung für P'_{68} ist.

Bestimmt man ebenso die konjugierten Richtungen $S\mathfrak{P}'_1$, $S\mathfrak{P}'_2$, $S\mathfrak{P}'_4$ bezw. zu SP_1, SP_2, SP_4, so sind damit die Richtungen für $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_4$ gegeben.

Trägt man nun z. B. W' für die X-Achse als Nulllinie in irgend einem Maßstabe mit seinem Werte $W'_1 = 5{,}48\ \mathrm{cm}^3$ für die obere Seite nach unten oder mit seinem Werte $W'_2 = 14{,}33\ \mathrm{cm}^3$ für die untere Seite nach oben ab

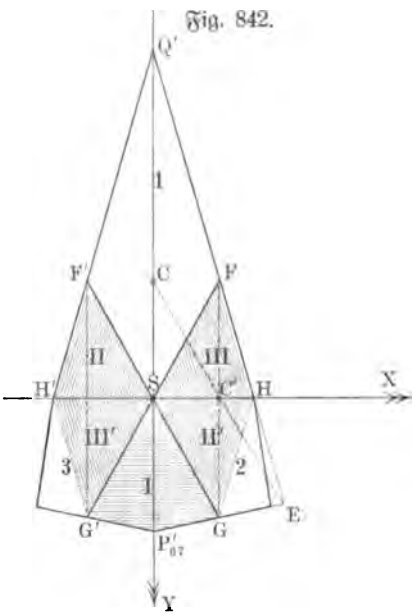
(vergl. S. 1070), so erhält man Punkt P'_{81} oder Punkt P'_{45}, so daß nun die Widerstandsfläche durch Ziehen von Parallelen auf der linken Seite gewonnen und dann symmetrisch auf die rechte Seite übertragen werden kann.

Berechnet man die Lage eines Kernpunktes oder entnimmt man dessen Lage aus Fig. 839, so entsteht wieder durch ähnliche Abbildung die Kerngrenze der Fig. 839.

Will man nur die Maxima von $\sigma = \frac{Mo}{W'}$ bestimmen, so braucht man von der Widerstandsfläche nur die kleineren Werte für jeden Strahl durch S festzustellen, was natürlich darauf hinausläuft, daß man von den Strahlen durch S im Querschnitte für jeden Strahl nur den größeren der beiden Werte w_1 und w_2 berücksichtigt.

Für das Beispiel der Fig. 839 und Fig. 840 liegen die größeren Werte von w, wie Fig. 841 zeigt, in den Gebieten *I*, *II*, *III* und die kleineren Werte von w in den Gebieten 1, 2, 3, während die Gebiete *IV* und 4 gleiche Werte für w_1 und w_2 liefern. Überträgt man *II* und *III* centrisch als *II'* und *III'* und halbiert man *IV* und 4 durch die X-Achse, so stellt der Querschnitt $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{10} P_{11} P_{12}$ für Strahlen durch S nur die größeren Werte von w für den gegebenen Querschnitt dar; ebenso stellt der Querschnitt $P_1 Q_1 Q_2 P_{12}$ für Strahlen durch S nur die kleineren Werte von w für den gegebenen Querschnitt dar.

Fig. 842.



Um dieselbe Entwickelung für die Widerstandsfläche der Fig. 840 durchzuführen, ist diese in Fig. 842 nochmals in der halben Größe der Fig. 840 gezeichnet.

Man kann mit Hülfe des Trägheitskreises leicht die Schnitte für Fig. 842 finden, welche den Schnitten der Fig. 841 entsprechen. Statt dessen kann man auch in Fig. 842 auf der einen Seite, z. B. der rechten, den Schnittpunkt E der äußeren Seiten bilden und die Mittellinie EC in $\triangle\ Q'EP'_{67}$ ziehen, es wird dann die Vertikale durch C' halbiert, so daß $C'F = C'G$ ist, und demnach ist auch $SF = SG$ und $SF' = SG'$. Den Teilen *I*, *II*, *III* und der Hälfte von *IV* und 4 in Fig. 841 entsprechen hier also die Teile *I*, *II*, *III* für die Bestimmung der Maxima, während dafür 1, 2, 3 fortfallen. Überträgt man *II* centrisch als *II'*, welches innerhalb 2 zu liegen kommt, und *III* centrisch als *III'*, welches innerhalb 3 zu liegen kommt, so entspricht die Fläche $HGP'_{67}G'H'$ dem abgeleiteten Querschnitt $R_1 P_4 P_6 P_7 P_9 R_2$ der Fig. 841, für welchen diese Fläche nochmals mit Hülfe des Trägheitskreises in Fig. 841 dargestellt ist.

Die abgeleitete Widerstandsfläche $HGP'_{67}G'H'$ der Fig. 842 oder $P'_{34} \ldots P'_{910}$ der Fig. 841 stellt für jede Kraftlinie $\sigma_{max} = \frac{Mo}{W'_{min}}$ dar.

Land nennt diese abgeleitete Widerstandsfläche, aus welcher man natürlich nur auf einen Teil der Kernfläche einen Schluß machen kann, die polar-symmetrische Widerstandsfläche, während er die thatsächliche Widerstandsfläche als allgemeine Widerstandsfläche bezeichnet.

Natürlich kann man auch für σ_{min} eine Widerstandsfläche ableiten.

Oft braucht man zur Bestimmung von σ_{max} überhaupt nur einen Teil der Widerstandsfläche zu zeichnen. So ist z. B. für das [-Eisen der Fig. 843 wegen des Abschlusses rechts die allgemeine Gestalt der Kernfläche, zu welcher die Widerstandsfläche in Bezug auf S perspektivisch liegt, ohne weiteres ersichtlich (vergl. Rechteck).

Fig. 843.

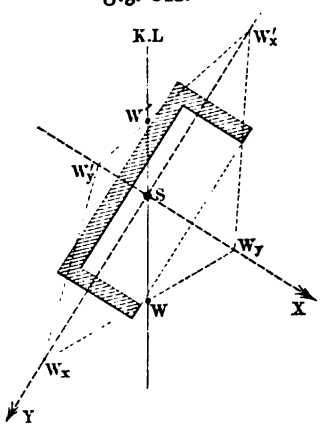
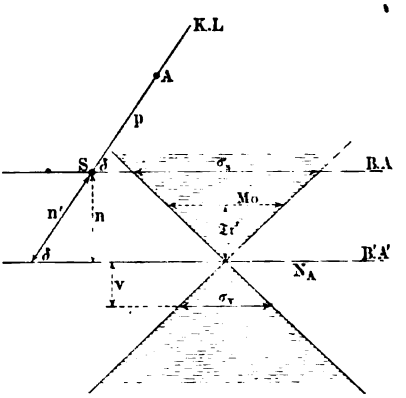


Fig. 844.



Trägt man also die beiden Werte von W für SX als Nulllinie, welche miteinander übereinstimmen, auf SY (als Kraftlinie) ab und ebenso die beiden Werte von W für SY als Nulllinie, von denen der größere der vollen Seite entspricht und also nach der hohlen Seite zu aufgetragen werden muß, so erhält man die Widerstandsfläche $W_x W_y W'_x W'_y$, welche für eine bestimmte Kraftlinie SW und SW' als Widerstandsmomente bestimmt. Der kleinere der beiden Werte SW und SW', also in der Fig. 843 der Wert SW', bestimmt für die gezeichnete Kraftlinie

$$\sigma_{max} = \frac{Mo}{SW'},$$

d. h. man braucht hier nur SW'_x und SW'_y aufzutragen, um σ_{max} zu erhalten.

In manchen Fällen ist auch die Gleichung der Polaren von Nutzen, welche in der Form mit der Gleichung der Tangente übereinstimmt, also für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1$$

lautet, falls $(\xi; \eta)$ der Pol ist; der Ausdruck zeigt auch, daß die Polare die Tangente in $(\xi; \eta)$ ist, falls $(\xi; \eta)$ auf der Ellipse liegt.

Um die Spannung für einen beliebigen Punkt des Querschnittes graphisch zu bestimmen, zeichnet man zum Angriffspunkte A der Kraft die zugehörige Nullinie N_A und zieht zu ihr (vergl. Fig. 844) im Abstande $\mathfrak{T}r'$ eine Parallelstrecke vom Werte Mo. In dem damit bestimmten Winkelraume (vergl. S. 1069) ist σ_v für den Abstand v von N_A als Parallelstrecke zu N_A gegeben, gemäß der Gleichung

$$\sigma_v : v = Mo : \mathfrak{T}r'.$$

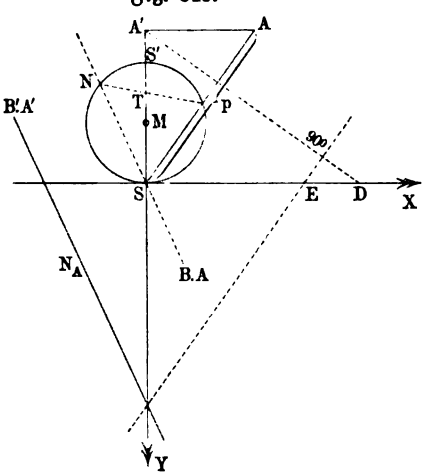
Die Parallele durch S liefert im besondern die Spannung für die Biegungsachse, welche $[Mo]$ entsprechen würde, falls nicht $[P]$ hinzuträte; man hat, wie schon oben auf S. 1142 gezeigt wurde,

$$\sigma_S = \frac{P}{f}.$$

Für $v = w_1$ und $v = w_2$ erhält man die Maxima der Spannungen.

Mit Hülfe der Culmannschen Ellipse ist N_A als Antipolare zu A leicht zu bestimmen, während dann $\mathfrak{T}r'$ durch den Trägheitskreis geliefert wird.

Fig. 845.



Will man die Zeichnung der Ellipse umgehen, so kann man auch die Nullinie allein durch den Trägheitskreis gewinnen, wie Fig. 845 zeigt. Man zeichnet erst zum Strahle SA einen Strahl SN in konjugierter Richtung. Um diesen um die Strecke n gemäß der Gleichung $n.p = \frac{\mathfrak{T}r'}{f}$ zu verschieben, kann man n aus $TN = \mathfrak{T}r'$ unter Einführung einer Größe d von dritter Dimension (z. B. 100 $\overline{\text{cm}}^3$) als vierte Proportionale gewinnen, es ist dann

$$n = \frac{\frac{\mathfrak{T}r'}{d} \cdot \frac{d}{f}}{p}.$$

Land führt diese Konstruktion aus, indem er $SE = \frac{\mathfrak{T}r'}{d}$ und $SD = \frac{d}{f}$ macht, $AA' // SX$ zieht, D mit A' verbindet und von E ein Lot auf DA' fällt, welches SY in einem Punkte der Nullinie schneidet, so daß eine Parallele durch ihn zu SN die Gerade N_A liefert.

Statt die Nullinie N_A zu konstruieren, kann man auch bei der Geraden SN stehen bleiben, welche Nullinie sein würde, wenn nur das Moment $[Mo]$ in Frage käme und nicht außerdem die Kraft P. Bestimmt man $\sigma_v = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r'} \cdot v$

für SN als Nullinie, so hat man zu σ_v noch $\sigma' = \frac{P}{f}$ hinzuzufügen oder abzuziehen, um die Spannungen für N_A als Nullinie zu erhalten.

Handelt es sich lediglich um das Maximum und Minimum der Spannung, so benutzt man am besten die Widerstandsfläche. Schneidet die Kraftlinie die Widerstandsfläche in W_1 und in W_2, so trägt man auf irgend einem Strahle durch S in derselben Richtung ab $SP = P$ und $SS' = \sigma_S = \frac{P}{f}$ und zieht zu PW_1 und PW_2 die Parallelen durch A, welche den Strahl durch S in M_1 und M_2 schneiden; es stellen dann $S'M_1$ und $S'M_2$ das Maximum und das Minimum der Spannung dar. Vergl. Fig. 846.

Da nämlich nach Konstruktion $SM_2 : P = p : SW_2$ ist, so hat man $SM_2 = \frac{Pp}{SW_2} = \frac{Mo}{SW_2}$, und ebenso ist $SM_1 = \frac{Mo}{SW_1}$, d. h. man hat σ_{max} und σ_{min} unter Berücksichtigung der Vorzeichen durch

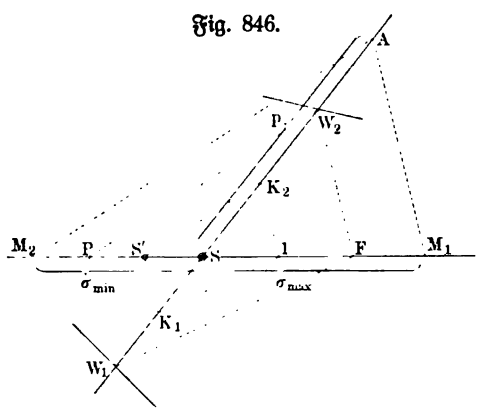
$$\frac{P}{f} + \frac{Mo}{SW_1} \quad \text{und durch} \quad \frac{P}{f} + \frac{Mo}{SW_2}$$

dargestellt, wie es sein muß.

Giebt man $[P]$ das Vorzeichen + für Zug und das Vorzeichen — für Druck, so kann man diese Vorzeichen auf $SS' = \sigma_S = \frac{P}{f}$ übertragen; es hat dann SM_1 das Vorzeichen von P bezw. σ_S und SM_2 das entgegengesetzte Vorzeichen, wonach die größere der Strecken $S'M_1$ und $S'M_2$ als σ_{max}, die kleinere als σ_{min} erscheint. Ebenso hat SW_1 in rechnerischen Ausdrücken das Vorzeichen von P bezw. σ_S und SW_2 das entgegengesetzte.

Über den Maßstab für σ vergl. S. 1070.

Fig. 846.



Bei symmetrischen Querschnitten ist

$$\sigma_{max} = \frac{P}{f} + \frac{Mo}{SW_1} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P}{f} + \frac{Mo}{SW_2}.$$

Nach dem Vorgange von W. Ritter kann man für σ_{max} und σ_{min} ganz einfache Ausdrücke gewinnen, wenn man in Fig. 846 noch den Schnitt der Kerngrenze mit SW_1 und SW_2 bestimmt, so daß K_1 und K_2 Punkte dieser Grenze sind. Da die Kerngrenze aus der Grenze der Widerstandsfläche entsteht, indem man letztere im Verhältnisse $1 : f$ für S als Centrum perspektivisch abbildet, so ist $SK_1 = \frac{SW_1}{f}$ und $SK_2 = \frac{SW_2}{f}$. Man hat demnach

$$\sigma_{max} \text{ und } \sigma_{min} = \frac{P}{f} + \frac{Mo}{f \,.\, SK_1} \quad \text{und} \quad \frac{P}{f} + \frac{Mo}{f \,.\, SK_2}$$

oder für $Mo = P \,.\, p$ auch

$$\sigma_{max} \text{ und } \sigma_{min} = \frac{P}{f}\left(1 + \frac{p}{SK_1}\right) \quad \text{und} \quad \frac{P}{f}\left(1 + \frac{p}{SK_2}\right).$$

Die Klammern bedeuten $\frac{SK_1 + p}{SK_1} = \frac{AK_1}{SK_1}$ und $\frac{SK_2 + p}{SK_2} = \frac{AK_2}{SK_2}$, letzteres, weil SK_2 als negative Größe eingeführt wurde. Demnach iſt

$$\sigma_{max} \text{ und } \sigma_{min} = P \cdot \frac{AK_1}{SW_1} \quad \text{und} \quad P \cdot \frac{AK_2}{SW_2} \quad \ldots \quad 462)$$

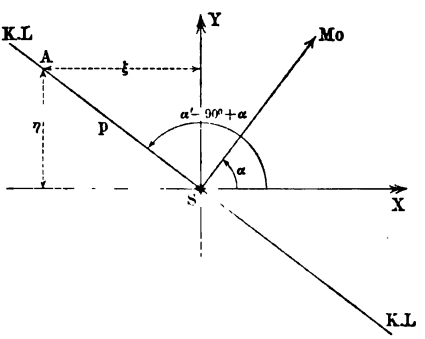
Die Zähler bedeuten die Momente von $[P]$ in Bezug auf die Kernpunkte K_1 und K_2, während die Nenner die entſprechenden Strahlen der Widerſtandsfläche ſind.

Bei ſymmetriſchen Querſchnitten iſt ſtets

$$\sigma_{max} = P \cdot \frac{AK_1}{SW_1} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = P \cdot \frac{AK_2}{SW_2}.$$

Um K_1 und K_2 zeichneriſch zu beſtimmen, kann man in Fig. 846 auftragen $SF = f$ und $S1 = 1$ und die Strahlen FW_1 und FW_2 ziehen: die Parallelen durch 1 zu dieſen Strahlen geben die Kernpunkte K_1 und K_2.

Fig. 847.



Da AK_1 und AK_2 als Arme von Momenten verwendet werden, ſo ſtellen dieſe Strecken dar, die im Längenmaßſtabe des Querſchnittes gemeſſen gedacht werden können, wobei zu beachten iſt, daß $SK_1 = \frac{1 \,.\, SW_1}{f}$ iſt und daß SW_1 die Dimenſion $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Strecke}}$ hat.

Da $\sigma_S = \frac{P}{f}$ iſt, ſo iſt $P : \sigma_S = f : 1$,

d. h. $SP : SS' = f : 1$ und man hat alſo $S'K_2 // PW_2$ und $S'K_1 // PW_1$.

Schließlich mag noch darauf aufmerkſam gemacht werden, daß der Ausdruck für die Spannung in einem beliebigen Punkte $(x; y)$, der durch Gleichung Nr. 401 a) gegeben iſt, zu einem bemerkenswerten Ergebniſſe führt, wenn $[Mo]$ durch $[P \,.\, p]$ beſtimmt iſt, wie es in vorſtehenden Unterſuchungen der Fall war.

In Gleichung Nr. 401 a), welche

$$\sigma_v = -Mo\left(-\frac{x \sin\alpha}{\mathfrak{T}r_y} + \frac{y \cos\alpha}{\mathfrak{T}r}\right)$$

lautet, iſt α der Winkel zwiſchen $[Mo]$ und der X-Achſe, ſo daß in Fig. 847 für die Kraftlinie $\sphericalangle XSA = \alpha' = 90^0 + \alpha$ einzuführen iſt, wobei $\sin\alpha' = +\cos\alpha$ und $\cos\alpha' = -\sin\alpha$ iſt.

Man hat also auch

$$\sigma_v = -(P \,.\, p)\left(\frac{x\cos\alpha'}{\mathfrak{T}r_y} + \frac{y\sin\alpha'}{\mathfrak{T}r_x}\right)$$
$$= -P\left[\frac{x\,.\,(p\cos\alpha')}{\mathfrak{T}r_y} + \frac{y\,.\,(p\sin\alpha')}{\mathfrak{T}r_x}\right].$$

Bezeichnet man die Koordinaten von A durch ξ und η, so ist auch weiter

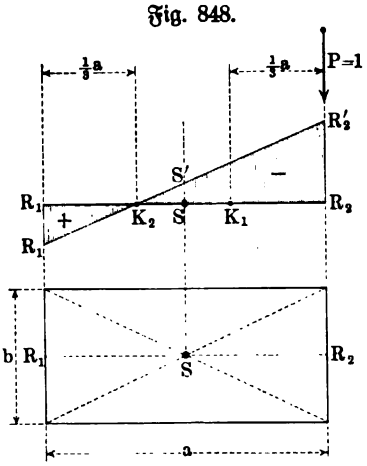
$$\sigma_v = -P\left(\frac{x\,.\,\xi}{\mathfrak{T}r_y} + \frac{y\,.\,\eta}{\mathfrak{T}r_x}\right).$$

Da dieser Ausdruck unverändert bleibt, wenn man zugleich x und ξ und y und η miteinander vertauscht, so folgt:

Die Spannung in einem beliebigen Punkte $(x; y)$, welche durch die Kraft $[P]$ im Punkte $(\xi; \eta)$ hervorgerufen wird, ist gleich der Spannung, welche im Punkte $(\xi; \eta)$ erzeugt wird, wenn die Kraft $[P]$ im Punkte $(x; y)$ wirkt.

Durch Hinzufügen der gleichmäßig verteilten Spannung $\frac{P}{f}$ wird an diesem Ergebnisse nichts geändert, so daß es also auch für die gesamte Spannung gilt, welche in diesem Paragraphen betrachtet wurde [1]). Daraus folgt nun, daß die Spannungsfläche der Fig. 844, welche man wieder drehen und geradlinig abgleichen (vergl. S. 1070) kann, noch eine andere Bedeutung hat, als bisher angegeben wurde. Läßt man den Angriffspunkt der Kraft $[P]$ im Querschnitte wandern und trägt man in jedem Punkte des Querschnittes, welcher augenblicklich Angriffspunkt ist, senkrecht zur Querschnittsfläche die augenblicklich in einem bestimmten festen Punkte A erzeugte Spannung auf, so erhalten die Punkte des Querschnittes dieselbe Spannung, als wenn die Kraft $[P]$ in dem festen Punkte A wirkt.

Fig. 848.



Für $P = 1$ stellt daher die Spannungsfläche der Fig. 844, nachdem sie gedreht und geradlinig abgeglichen ist, zugleich die Einflußfläche einer im Querschnitt wandernden Kraft $[P]$ vom Werte 1 für den festen Punkt A dar.

Wirkt z. B., wie Fig. 848 zeigt, die Druckkraft $[P]$ vom Werte 1 in dem Randpunkte R_2 der Mittellinie R_1R_2 eines rechteckigen Querschnittes, so hat die Spannung im Kernpunkte K_2 den Wert Null, während sie im Punkte S den Wert $SS' = \frac{P}{f} = \frac{1}{ab}$ hat, und demnach ist die Randspannung

$$R_2R_2' = S'S \cdot \frac{R_2K_2}{K_2S} = \frac{4}{ab}.$$

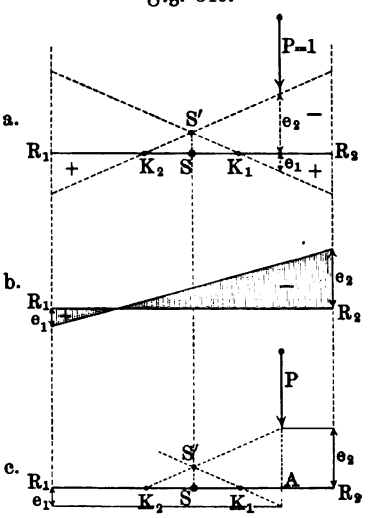
[1]) Dieser Satz, der auch aus der Polarbeziehung folgt, kann umgekehrt dazu dienen, die Beziehung zwischen Kraftlinie und Nullinie von neuem festzustellen.

Betrachtet man diese Spannungsfläche nun als Einflußfläche einer Kraft $[P]$ vom Werte 1, welche den Querschnitt von R_1 bis R_2 durchwandert, so stellt sie die, dabei nacheinander in R_2 auftretenden Spannungen dar.

Da für $[P]$ als Druckkraft auch $S'S$ eine Druckspannung darstellt, so sieht man, daß $[P]$ nicht in R_1K_2 angreifen darf, wenn R_2 nur Druckspannungen erhalten soll, wie es für Mauerwerk nötig ist; dasselbe folgt für R_2K_1 in Bezug auf R_1 im Hinblick auf die Symmetrie.

Sollen also im Querschnitte nur Druckspannungen entstehen, so muß P im mittleren Drittel K_2K_1 angreifen.

Fig. 849.



Zeichnet man Fig. 848 für R_1 und R_2, wie es Fig. 849 a zeigt, so geben $[e_2]$ und $[e_1]$ für eine beliebige Lage von $[P]$ die Randspannungen für R_1 und R_2, so daß Fig. 849 b die Spannungsfläche für Fig. 849 a darstellt.

Da K_1 und K_2 im Verein mit $SS' = \frac{P}{f}$ die Spannungsflächen für R_1R_2 bestimmen, so kann man die Konstruktion der Randspannungen abkürzen, wie Fig. 849 c zeigt, wobei SS' für eine Kraft vom beliebigen Werte abgetragen werden kann.

Die Rechnung liefert für eine beliebige Druckkraft $[P]$

$$\sigma_{R_2} = -\frac{6 \cdot P \cdot \overline{AK_2}}{a^2 b} \quad \text{und} \quad \sigma_{R_1} = +\frac{6 \cdot P \cdot \overline{AK_1}}{a^2 b},$$

wie auch aus Fig. 849 c folgt, da $\frac{e_2}{SS'} = \frac{AK_2}{SK_2}$ oder

$$e_2 = \frac{P}{f} \cdot \frac{AK_2}{\frac{1}{6}a} = \frac{6P \cdot AK_2}{a^2 b}$$

ist u. s. w.

Wenn ein bestimmtes Material nur Zug oder nur Druck aushält, wie es z. B. bei Mauerwerk für Druck der Fall ist, so bedarf die Darstellung des ganzen Paragraphen noch einer Ergänzung für den Fall, daß die excentrische Kraft außerhalb des Kernes wirkt.

Die gegebene Darstellung bleibt hier nur für den ersten Anfangszustand der Belastung richtig, während dann sofort entweder die Zugseite oder die Druckseite unter Verschiebung der ursprünglichen Nulllinie spannungslos wird, so daß für die weitere Betrachtung überhaupt nur ein Teil des Querschnittes in Frage kommt.

Wir führen diesen Fall durch für Mauerwerk, bei welchem die Zugseite spannungslos wird, so daß nur die Druckseite, aber bei Verschiebung der ursprünglichen Nulllinie weiter zu betrachten ist, für welche eine neue Verteilung der Spannung eintritt. Es hat sich bisher als ausreichend erwiesen,

anzunehmen, daß die Spannungen proportional zu dem Abstande von der neuen Nulllinie von dieser aus wachsen.

Ist nun z. B. ein Rechteck in der Mittellinie in A belastet, wie es Fig. 850 andeutet, so folgt aus der Symmetrie der Anordnung, daß die neue Nulllinie N_A senkrecht zu der Mittellinie steht, auf welcher A liegt.

Während also auf der Zugseite (links) ein Teil des Querschnittes, wie es die Schraffierung andeutet, unwirksam wird, hat der andere Teil (rechts) Druckspannungen auszuhalten. Da für diesen Teil von der Breite x die Linie N_A Nulllinie ist, so muß N_A die Nulllinie sein, die zu A als Kernpunkt des rechten Flächenteiles gehört, d. h. A ist der rechte Endpunkt des

Fig. 850.

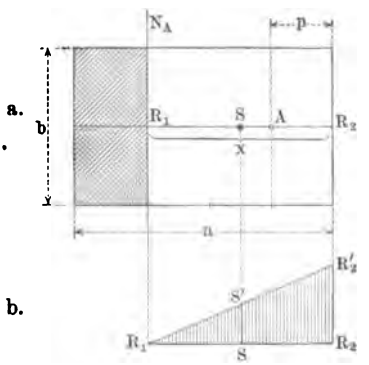
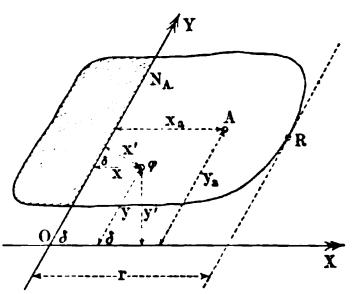


Fig. 851.



mittleren Drittels von x, so daß $x = 3p$ ist. Damit ist die Lage der neuen Nulllinie N_A durch p bestimmt. Fig. 850 b zeigt die zugehörige Spannungsfläche, es ist $\sigma_{R_1} = 0$ und $\sigma_{R_2} = 2\frac{P}{3pb}$, da $SS' = \frac{P}{f} = \frac{P}{3pb}$ und $R_2R_2' = SS' \cdot \frac{2}{1}$ ist.

Allgemein gelten gemäß Fig. 851 die Beziehungen

$$\sigma_x = \sigma_R \cdot \frac{x}{r}$$

und

$$P = \frac{\sigma_R}{r} \Sigma \varphi x$$

$$P \cdot x_a = \frac{\sigma_R}{r} \Sigma \varphi x^2$$

$$P \cdot y_a = \frac{\sigma_R}{r} \Sigma \varphi xy,$$

von denen die drei letzten die Bedingungen des Gleichgewichts für Kräfte senkrecht zur Fläche und für Drehungen um OY und OX aussprechen.

Aus diesen Beziehungen folgt

$$x_a = \frac{\Sigma \varphi x^2}{\Sigma \varphi x} \quad \text{und} \quad y_a = \frac{\Sigma \varphi xy}{\Sigma \varphi x} \quad \text{und} \quad \sigma_R = \frac{rP}{\Sigma \varphi x},$$

und zwar bedeuten $\Sigma \varphi x$, $\Sigma \varphi x^2$ und $\Sigma \varphi xy$ bezw. Massenmoment, Träg-

heitsmoment und Deviationsmoment für ſchiefe Achſen. Will man dieſe Größen in ſenkrechten Abſtänden x' und y' ausdrücken, ſo hat man $x' = x \sin\delta$ und $y' = y \,.\, \sin\delta$ zu ſetzen.

Für die Parabelfläche der Fig. 852 iſt $\Sigma \varphi xy = 0$ und $\delta = 90^0$ und $\Sigma \varphi x = \frac{2}{5} fh$ und $\Sigma \varphi x^2 = \frac{8}{35} fh^2$, ſo daß hier $x_a = \frac{4}{7} h$ und $p = \frac{3}{7} h$, alſo $h = \frac{7}{3} p$ iſt.

Man hat $\sigma_S = \dfrac{P}{f}$ und demnach $\sigma_R = \frac{5}{2} \dfrac{P}{f} = \frac{15}{8} \dfrac{P}{bh}$, da $\sigma_R : \sigma_S = OR : OS = 5 : 2$ iſt.

Fig. 852.

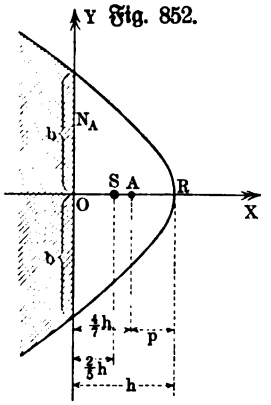


Fig. 853.

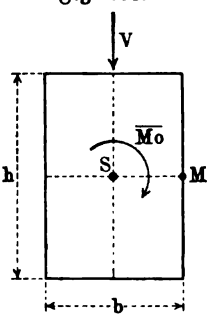
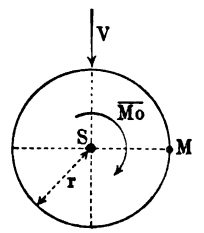


Fig. 854.



191. Beanſpruchung durch Schubſpannungen. Treten in einem Punkte einer Schnittfläche des Stabes mehrere Schubſpannungen auf, ſo ſind ſie in dem Punkte nach dem Parallelogrammgeſetze zu vereinigen. Für die Praxis kommt nur der Fall in Frage, daß innerhalb eines Querſchnittes eine Schubkraft zugleich mit einem verdrehenden Momente auftritt.

Man hat hier die entſprechenden beiden Spannungen nach den früheren Unterſuchungen zu beſtimmen und demgemäß die größte Anſtrengung feſtzuſtellen.

So tritt z. B. für den rechteckigen Querſchnitt der Fig. 853 bei $b < h$ in der Mitte M der längeren Seite ſowohl das Maximum der $[V]$ entſprechenden Spannung auf mit dem Werte $\frac{3}{2} \dfrac{V}{bh}$ als auch das Maximum der $[\overline{Mo}]$ entſprechenden Spannung mit dem Werte $\frac{9}{2} \dfrac{\overline{Mo}}{b^2 h}$. Da hier die Spannungen in M gleichgerichtet ſind, ſo ſind ihre Werte einfach zu addieren, und man hat für das Maximum von τ in M gegeben

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V + \dfrac{3\,\overline{Mo}}{b}}{bh}.$$

Dabei iſt $\tau_{max} \leqq k_d$ zu halten, da erfahrungsmäßig $k_d < t$ iſt.

Für den Kreisquerſchnitt der Fig. 854 ergiebt ſich ebenſo für M

$$\tau_{max} = \tfrac{4}{3} \frac{V + \frac{3\overline{Mo}}{2r}}{\pi r^2}.$$

192. Beanspruchung durch Normalspannungen und Schubspannungen. Wenn ein Punkt einer Schnittfläche im Stabe zugleich die Normalspannung $[\sigma]$ und die Schubspannung $[\tau]$ zeigt, so gilt gemäß § 161 stets für die entsprechenden Hauptspannungen

$$\sigma_1 \text{ und } \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

In Bezug auf die des weiteren im § 161 abgeleiteten Formeln für die größte Anstrengung

$$\sigma_1 = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{m-1}{m}\sigma - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

ist dagegen zu bemerken, daß sie gemäß ihrer Ableitung selbstverständlich nur für isotropes Material gelten, aber auch für dieses nur verwandt werden dürfen, solange die zulässige Normalspannung zur zulässigen Schubspannung im Verhältnisse $(m+1) : m$ steht.

Letzteres ist z. B. nicht der Fall, wenn eine Welle zugleich auf Biegung und auf Verdrehung beansprucht ist, weil die Normalspannung hierbei eine stets wechselnde Größe ist, während die Schubspannung als konstant angesehen werden darf.

Für $\sigma = 0$ folgt aus obigen Gleichungen für die größte Anstrengung

$$\sigma_1 = +\frac{m+1}{m} \cdot \tau \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -\frac{m+1}{m} \cdot \tau,$$

so daß der zulässigen Anstrengung $\tau = t$ hier die zulässige Anstrengung $k_1 = k_2 = \frac{m+1}{m} \cdot t$ entspricht, wie es der Voraussetzung gemäß ist.

Um die obigen Gleichungen auch den Fällen anzupassen, in welchen jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, hat v. Bach einen Koeffizienten α_0 eingeführt, durch welchen obige Formeln übergehen in

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \\ \text{und} \\ \sigma_2 &= \frac{m-1}{2m}\sigma - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 463)$$

Jetzt ist für $\sigma = 0$

$$\sigma_1 = +\frac{m+1}{m} \cdot \alpha_0\tau \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -\frac{m+1}{m} \cdot \alpha_0\tau,$$

so daß nun der zulässigen Anstrengung $\tau = t$ die zulässige Anstrengung

$$k_1 = k_2 = \frac{m+1}{m} \cdot \alpha_0 t$$

entspricht, woraus sich als Bedeutung von α_0 ergiebt

$$\alpha_0 = \frac{k}{\frac{m+1}{m} \cdot t},$$

d. h. α_0 ist das Verhältnis der zulässigen Normalspannung zur $\frac{m+1}{m}$-fachen zulässigen Schubspannung.

Für $m \sim \frac{10}{3}$ ist $\alpha_0 = \frac{k}{1{,}3\,t}$.

Für den bisher behandelten Fall isotroper Körper ist demnach $\alpha_0 = 1$, so daß die durch v. Bach verbesserte Formel allgemein gültig ist.

Man hat nun in der Praxis vier Fälle zu unterscheiden, gemäß folgender Einteilung. Es tritt für eine Schnittfläche des Stabes auf

a) Zug oder Druck zugleich mit Schub,
b) Zug oder Druck zugleich mit Verdrehung,
c) Biegung und Schub,
d) Biegung und Verdrehung.

a) Zug oder Druck in Verbindung mit Schub. Da die Normalkraft $[P]$ die gleichmäßig verteilte Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ liefert, so ist nur die größte Schubspannung im Querschnitte gemäß den früheren Betrachtungen aufzusuchen.

Für das Rechteck der Fig. 853 ist wieder τ_{max} in M gegeben, so daß

$$\tau = \tfrac{3}{2}\frac{V}{bh}$$

zu setzen ist. Man hat also hier die Werte $\sigma = \frac{P}{f}$ und $\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}$ in die Formel Nr. 463) einzutragen, und es muß dann

$$\bar{\sigma}_1 \text{ bezw. } \bar{\sigma}_2 \leqq k_1 \text{ bezw. } k_2$$

sein. Dabei ist $\alpha_0 = \frac{k_1}{1{,}3\,t}$ bezw. $\frac{k_2}{1{,}3\,t}$.

b) Zug oder Druck in Verbindung mit Verdrehung. Da die Normalkraft $[P]$ die gleichmäßig verteilte Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ liefert, so ist nur die größte Schubspannung im Querschnitte, welche dem verdrehenden Momente $[\overline{Mo}]$ entspricht, gemäß den früheren Betrachtungen aufzusuchen.

Für das Rechteck der Fig. 853 ist wieder τ_{max} in M gegeben, so daß

$$\tau = \tfrac{9}{2}\frac{\overline{Mo}}{b^2 h}$$

zu setzen ist. Man hat also hier die Werte $\sigma = \frac{P}{f}$ und $\tau = \frac{3}{2}\frac{\overline{Mo}}{b^2 h}$ in die Formel Nr. 463) einzutragen und es muß dann

$$\bar{\sigma}_1 \text{ bezw. } \bar{\sigma}_2 \leqq k_1 \text{ bezw. } k_2$$

sein. Dabei ist $\alpha_0 = \frac{k_1}{1{,}3\,k_d}$ bezw. $\frac{k_2}{1{,}3 k_d}$.

c) Biegung in Verbindung mit Schub. Da die Schubspannung nur berechnet werden kann, falls der Querschnitt symmetrisch ist und die Schubkraft V in seine Symmetrale fällt, so hat nur der Fall der geraden Belastung praktische Bedeutung.

Für diesen hat die Normalspannung im Abstande v von der Neutralen den Wert $\sigma_v = \sigma_w \cdot \frac{v}{w}$, wenn sie für die äußerste Faser (w) den Wert σ_w hat; für den Fall der schiefen Belastung wäre der entsprechende Ausdruck zu verwenden.

Für die Schubspannung im Abstande v von der Neutralen gilt unter den erwähnten Bedingungen gemäß § 137 und § 160, falls die Breite des Querschnittes für v den Wert x hat,

$$\tau_v = V \cdot \frac{s_v \cdot f_v}{\mathfrak{T}\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sin\omega}.$$

Trägt man die Werte von σ_v und τ_v in Gleichung Nr. 463) ein, so erhält man die Werte für $\bar{\sigma}_1$ und σ_2, deren Maxima im Stabe nun noch bestimmt werden müssen, was nur von Fall zu Fall geschehen kann.

Für einen prismatischen Freiträger (l) mit Endbelastung [P] ist z. B. V für alle Querschnitte konstant ($= P$), während Mo für den eingeklemmten Querschnitt sein Maximum hat, so daß in diesem Falle nur die Veränderung von σ_1 und σ_2 für den eingeklemmten Querschnitt bestimmt zu werden braucht, in welchem $\frac{\sigma_w}{w} = \frac{Pl}{\mathfrak{T}\mathrm{r}}$ ist.

Hat der Balken ein Rechteck (b, h) als Querschnitt, so ist hier gemäß § 160

$$\tau_v = \tfrac{3}{2}\frac{P}{bh}\,\frac{h^2 - 4v^2}{h^2}$$

und außerdem $\mathfrak{T}\mathrm{r} = \frac{bh^3}{12}$ und $w = \frac{h}{2}$.

Demnach gilt in diesem Fall für $m = \frac{10}{3}$ und $\alpha_0 = 1$

$$\bar{\sigma}_1 \text{ bezw. } \bar{\sigma}_2 = 0{,}35\,\sigma_w \cdot \frac{v}{w} \pm 0{,}65\,\sqrt{\sigma_w^2 \cdot \frac{v^2}{w^2} + 4 \cdot \tfrac{9}{4}\frac{P^2}{b^2h^2}\left(\frac{h^2 - 4v^2}{h^2}\right)^2}$$

$$= \sigma_w\left[0{,}35\,\frac{v}{w} \pm 0{,}65\,\sqrt{\frac{v^2}{w^2} + \frac{w^2}{l^2}\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^2}\right],$$

wobei $\sigma_w = \frac{6\,Pl}{bh^2}$ ist.

Für $v = 0$, d. h. in der Neutralen ist

$$\bar{\sigma}_1 \text{ bezw. } \bar{\sigma}_2 = 0{,}65\,\sigma_w \cdot \frac{w}{l}.$$

Soll dieser Wert mit σ_w übereinstimmen, so muß $l = 0{,}65\,w = 0{,}325\,h$ sein.

Untersucht man die Formel für $\bar{\sigma}_1$ bezw. σ_2, in welcher hier lediglich das Zeichen + in Frage kommt, für $v = 0 \cdots \frac{h}{2}$ bei $l = 0{,}325\,h$, so

zeigt sich, daß das Maximum der Anstrengung den Wert σ_w um 4 Proz. übersteigt, so daß man mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Zahlen k_1 oder k_2 und t in diesem Falle überhaupt nur auf Biegung zu rechnen braucht.

Entsprechende Betrachtungen ergeben, daß es genügt, den Stab für $l > 0{,}325\,h$ nur auf Biegung und für $l < 0{,}325\,h$ nur auf Schub zu berechnen. Ersetzt man das Rechteck durch einen Kreis ($d = 2r$), so gilt ebenso die Grenze $l = 0{,}25\,d$ [1]).

d) Biegung in Verbindung mit Verdrehung. Hier verbindet sich die Biegungsspannung $\sigma_v = \frac{Mo \cdot v}{\mathfrak{T}r}$, welche dem biegenden Momente $[Mo]$ entspricht, mit der Schubspannung τ_v, welche dem verdrehenden Momente $[\overline{Mo}]$ entspricht. Man hat beide Werte in die Formel Nr. 463) einzutragen und zunächst den Querschnitt aufzusuchen, für welchen σ_1 bezw. σ_2 ihr Maximum haben und dann für dieses innerhalb dieses Querschnittes die Lage zu bestimmen, was natürlich nur von Fall zu Fall geschehen kann.

Für den Kreis als Querschnitt sind für die Bestimmung der Maxima nur Umfangspunkte zu betrachten. Für diese ist ($w = r = \frac{1}{2}d$)

$$\sigma_w = \frac{32\,Mo}{\pi d^3} \quad \text{und} \quad \tau_w = \frac{16\,\overline{Mo}}{\pi d^3}.$$

Trägt man diese Werte in die Formeln für σ_1 bezw. σ_2 ein, so ist für $\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d}$ und $m = \frac{10}{3}$

$$\bar{\sigma}_1 \text{ bezw. } \bar{\sigma}_2 = \frac{32}{\pi d^3}\left[0{,}35\,Mo \pm 0{,}65\sqrt{Mo^2 + \alpha_0^2\overline{Mo}^2}\right],$$

wobei nur das Zeichen + weiter zu benutzen ist.

Um das Maximum für die Klammergröße zu bestimmen, hat man zu beachten, daß $\overline{Mo}$ eine Konstante ist, während Mo von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich ist. Demnach tritt das Maximum von σ_1 ein für den gefährlichen Querschnitt der Biegung, dem Mo_{max} entspricht, d. h. man hat

$$k_b \geqq \frac{32}{\pi d^3}\left[0{,}35\,Mo_{max} + 0{,}65\sqrt{Mo_{max}^2 + \alpha_0^2\overline{Mo}^2}\right].$$

Für den Kreisring gilt dieselbe Formel, falls man den Faktor vor der Klammer durch $\frac{32\,d_1}{\pi(d_1^4 - d_2^4)}$ ersetzt.

Für den elliptischen Querschnitt ist die Betrachtung einfach, wenn die Ebene des biegenden Momentes durch die kleine Achse (b) der Ellipse geht, weil dann die Spannungsmaxima der Biegung mit denen der Verdrehung zusammenfallen, nämlich in den Endpunkten der kleinen Achse. Man hat dann

$$\sigma_w = \frac{4}{\pi}\frac{Mo}{ab^2} \quad \text{und} \quad \tau_w = \frac{4}{\pi}\frac{\overline{Mo}}{ab^2}$$

---

[1]) Vergl. hierzu § 160, wo für das Rechteck bei einfacherer Betrachtung $l = 0{,}333\,h$ gefunden wurde.

in die Formeln einzusetzen und findet dasselbe Ergebnis wie beim Kreise, falls man den Faktor vor der Klammer durch $\frac{4}{ab^2\pi}$ ersetzt, der für $a = b = \frac{1}{2}d$ in den Faktor des Kreises übergeht.

Wenn die Ebene des biegenden Momentes durch die große Achse (a) der Ellipse geht, so liegen die Biegungsmaxima in den Endpunkten der großen, die Schubmaxima für die Verdrehung in den Endpunkten der kleinen Achse.

Die Punkte größter Anstrengung liegen hier in Randpunkten zwischen den Scheiteln des elliptischen Querschnittes. Hat ein Randpunkt von der kleinen Achse den Abstand v, so ist für ihn die Biegungsspannung $\sigma_v = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r} \cdot v$, während $\mathfrak{T}r = \frac{\pi}{4} a^3 b$ ist, während die Schubspannung für ihn

$$\tau_v = \frac{2\,\overline{Mo}}{\pi a b^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} \cdot v^2}$$

beträgt.

Bildet man aus σ_v und τ_v den Wert für $\bar{\sigma}_1$ bezw. $\bar{\sigma}_2$ mit dem Mittelzeichen $+$, so ist zunächst die Stelle v zu bestimmen, für welche $\bar{\sigma}_1$ ein Maximum wird. Für das so bestehende Maximum von $\bar{\sigma}_1$ ist dann wieder zu untersuchen, durch welchen Wert von Mo es seinen größten Wert erhält.

Schneidet die Ebene von $[Mo]$ weder die große noch die kleine Achse der Ellipse, so ist unter Rückgang auf die Formeln für schiefe Belastung entsprechend zu verfahren.

Läuft für ein Rechteck als Querschnitt die Ebene von $[Mo]$ der kürzeren Seite (b) des Rechtecks parallel, so fallen die Maxima der Normalspannung und der Schubspannung wieder zusammen, so daß sich ähnlich wie beim Kreise einfach die Formel

$$k_b \geqq \frac{6}{b^2 h} \left[0{,}35\, Mo_{max} + 0{,}65 \sqrt{Mo_{max}^2 + 2{,}25\, \alpha_0^2\, \overline{Mo}^2}\right]$$

ergiebt.

Bei anderer Lage der Ebene des Momentes ist entsprechend zu verfahren wie bei der Ellipse.

Angenähert läßt sich für die Ellipse als Querschnitt die Dimensionierung durchführen, indem man $[Mo]$ in zwei Komponenten $[Mo_1]$ und $[Mo_2]$ zerlegt, deren erste um die große und deren zweite um die kleine Achse dreht, und dann die an erster Stelle abgeleitete Formel für $[Mo_1]$ und $[Mo_2]$ ansetzt. Man erhält dann

$$k_b \geqq \frac{4}{ab^2\pi} \left[0{,}35\, Mo_1 + 0{,}65 \sqrt{Mo_1^2 + \alpha_0^2\, \overline{Mo}^2}\right]$$

$$k_b \geqq \frac{4}{a^2 b \pi} \left[0{,}35\, Mo_2 + 0{,}65 \sqrt{Mo_2^2 + \alpha_0^2\, \overline{Mo}^2}\right],$$

wobei für Mo_1 und Mo_2 ihre Maximalwerte einzuführen sind.

Bei Ausnutzung des Materials sind damit zwei Gleichungen für die Bestimmung von a und b gegeben.

Dieselbe Betrachtung giebt für das Rechteck als Querschnitt, falls $[Mo_1]$ um die Achse, parallel zu h, und $[Mo_2]$ um die Achse, parallel zu b dreht, die Formeln

$$k_b \geqq \frac{6}{b^2 h}\left[0{,}35\, Mo_1 + 0{,}65\sqrt{Mo_1^2 + 2{,}25\,\alpha_0^2\,\overline{Mo}^2}\right]$$

$$k_b \geqq \frac{6}{b h^2}\left[0{,}35\, Mo_2 + 0{,}65\sqrt{Mo_2^2 + 2{,}25\,\alpha_0^2\,\overline{Mo}^2}\right],$$

wobei für Mo_1 und Mo_2 ihre Maximalwerte einzuführen sind; dabei muß (vergl. S. 1068)

$$\frac{6\, Mo_1}{b^2 h} + \frac{6\, Mo_2}{b h^2} \leqq k_b$$

sein.

Siebente Abteilung.

Das Fachwerk aus geraden Stäben.

193. Einfache Fachwerke und die aus ihnen abgeleiteten Fachwerke. Wenn gerade Stäbe durch Gelenke, deren Mitten in den Stabachsen liegen, zu einem Körper verbunden werden, welcher sich unter der Voraussetzung starren Materials einem beliebigen, von außen wirkenden Kräftesystem gegenüber „starr" verhalten würde, so bezeichnet man eine solche Stabverbindung als ein Fachwerk[1]).

Falls lediglich diese Gelenkmitten, welche Knoten genannt werden, von äußeren Kräften angegriffen werden, so werden die Stäbe bei Vernachlässigung ihres Gewichtes und bei Vernachlässigung der Reibung in den Gelenken lediglich auf Zug oder Druck (bezw. Knickung) beansprucht. In diesem Falle, welcher in den Konstruktionen der Praxis meist verwirklicht zu werden pflegt, sind die Formänderungen, welche das elastische Material der Stäbe zeigt, leicht zu beurteilen, nachdem die Zug- oder Druckkräfte für die einzelnen Stäbe bei gegebener Belastung festgestellt worden sind.

Beispiele für die Behandlung solcher Fachwerke mit gegebener Knotenbelastung sind bereits früher gegeben worden, vergl. Fig. 205 bezw. Fig. 211, ferner Figg. 206, 207, 212, 227, 228 und 229.

Liegen die Achsen der Stäbe, die zum Fachwerke vereint werden, alle in einer Ebene, so nennt man das Fachwerk ein ebenes Fachwerk, andernfalls heißt es ein räumliches Fachwerk; die Gelenke eines ebenen Fachwerkes sind cylindrische Gelenke, deren Achsen senkrecht zur Ebene des Fachwerkes stehen, die Gelenke eines räumlichen Fachwerkes sind als Kugelgelenke aufzufassen.

Unter den ebenen Fachwerken bilden die einfachen ebenen Fachwerke eine besonders wichtige Klasse.

Bei ihrer Bildung geht man von zwei, durch einen Stab verbundenen Knoten (1 und 2) aus und schließt jeden neuen Knoten durch je zwei Stäbe an zwei bereits vorhandene Knoten an, wie es Fig. 855a und b zeigen.

[1]) Das Fachwerk ist also eine starre (oder stabile oder steife) Stabverbindung, welche im Gegensatz steht zu beweglichen Stabverbindungen (z. B. Mechanismen). Gelegentlich pflegt man auch von beweglichen Fachwerken zu sprechen und im Gegensatz dazu dann, was hier kurz als Fachwerk bezeichnet wird, als steifes oder stabiles Fachwerk zu bezeichnen.

Dabei sind Stäbe, deren Achsen sich schneiden, wie $\overline{23}$ und $\overline{14}$ in Fig. 855b, an der Kreuzungsstelle D als unverbunden anzusehen; bei entsprechender Ausführung hat man z. B. $\overline{23}$ mit Spielraum durch eine Öffnung von $\overline{14}$ zu leiten.

Wenn ein solches einfaches ebenes Fachwerk n Knoten hat, so enthält es $2n - 3$ Stäbe.

Um dies einzusehen, hat man zu beachten, daß die ersten beiden Knoten durch einen Stab verbunden sind, während der Anschluß jedes der folgenden $n - 2$ Knoten je zwei Stäbe erfordert; es ist also die Stabzahl

$$1 + 2(n - 2) = 2n - 3.$$

Aus einem gegebenen einfachen ebenen Fachwerk kann man andere Fachwerke durch eine sogenannte Stabvertauschung herleiten, indem man ohne Änderung der Lage der Knoten einen Stab des Fachwerkes fortnimmt und dafür einen anderen einsetzt. So geht z. B. Fig. 855b in Fig. 855a über, wenn man in Fig. 855b den Stab $\overline{14}$ fortnimmt und dafür den Stab $\overline{34}$ einsetzt.

Durch solche Stabvertauschungen, bei denen man natürlich darauf zu sehen hat, daß die neue Figur geometrisch bestimmt (unbeweglich) bleibt, kann man für $n \geqq 6$ auch Fachwerke ableiten, welche nicht mehr einfache Fachwerke sind.

Fig. 855a.

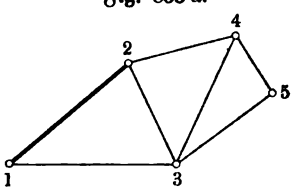
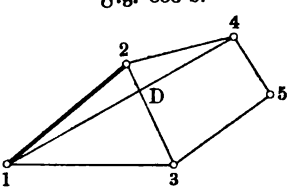


Fig. 855b.



Ein einfaches ebenes Fachwerk kann man, seinem Bildungsgesetze entsprechend, wieder auflösen, indem man den zuletzt angefügten Knoten, von dem jedenfalls nur zwei Stäbe ausgehen, mit seinen beiden Stäben fortnimmt, darauf mit dem, an vorletzter Stelle hinzugefügten Knoten ebenso verfährt u. s. w. Dabei ist es natürlich nicht ausgeschlossen, daß diese Auflösung auch von anderen Knoten aus bewirkt werden kann.

Soll eine solche Auflösung für ein ebenes Fachwerk unmöglich sein, und zwar nicht bloß ihre ganze Durchführung, sondern schon ihr Beginn, so müssen von jedem Knoten mindestens drei Stäbe ausgehen.

Der einfachste Fall, bei welchem eine derartige Auflösung unmöglich ist, ist offenbar der, bei welchem von jedem Knoten auch wirklich nur drei Stäbe ausgehen, so daß die Anzahl der Stäbe bei n Knoten $\frac{3n}{2}$ beträgt. Da das einfache Fachwerk, aus welchem das zu bestimmende Fachwerk durch Stabvertauschungen hervorgegangen ist, $2n - 3$ Stäbe enthält, so ist

$$\frac{3n}{2} = 2n - 3 \quad \text{oder} \quad n = 6.$$

In Fig. 856 ist ein einfaches ebenes Fachwerk mit sechs Knoten dargestellt, welches thatsächlich durch Ersatz von $\overline{13}$ und $\overline{15}$ durch $\overline{25}$ und $\overline{36}$ in ein Fachwerk übergeht, welches nicht mehr einfach ist.

Ebenso stellt der Teil $A_2C_2CC_2B_2$ von Fig. 206 ein Fachwerk dar, welches nicht mehr einfach ist.

Bildet man irgend ein ebenes Fachwerk mit n Knoten und $2n-3$ Stäben, so läßt sich dieses durch Stabvertauschungen stets auf ein einfaches Fachwerk zurückführen, da die n Seiten eines n-Ecks und die $n-3$ Diagonalen, welche von irgend einer bestimmten Ecke desselben ausgehen, stets ein einfaches Fachwerk darstellen. Da man die relative Lage von n Punkten stets durch $2n-3$ Strecken bestimmen kann, so sind für die Konstruktion eines beliebigen ebenen Fachwerkes von n Knoten auch stets $2n-3$ Stäbe erforderlich, aber auch hinreichend, falls man dabei Überbestimmungen im geometrischen Sinne vermeidet.

Fig. 856.

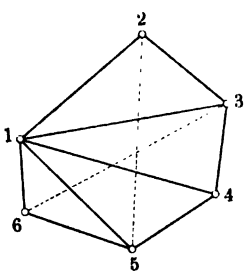
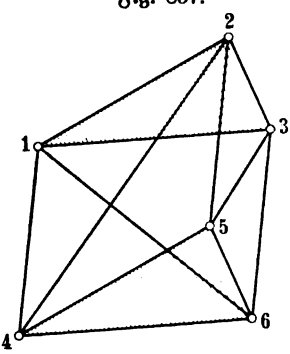


Fig. 857.



Entsprechende Betrachtungen gelten für das räumliche Fachwerk.

Bei der Bildung des einfachen räumlichen Fachwerkes geht man von drei, durch drei Stäbe zu einem Dreiecke verbundenen Knoten aus und schließt jeden neuen Knoten durch je drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knoten an, wobei wieder sich etwa schneidende Stäbe als unverbunden anzusehen sind.

Bei n Knoten hat man hier

$$3 + 3(n-3) = 3n - 6$$

Stäbe zu verwenden.

Durch Stabvertauschungen gelangt man auch hier von den einfachen räumlichen Fachwerken zu anderen Arten, falls wieder $n \geqq 6$ ist.

Soll der Abbau nach Art eines einfachen Fachwerkes hier von vornherein unmöglich sein, so müssen von jedem Knoten mindestens vier Stäbe ausgehen; der einfachste Fall, bei welchem von jedem Knoten auch thatsächlich nur vier Stäbe ausgehen, fordert bei n Knoten die Stabzahl $\frac{4n}{2}$, während sie anderseits $3n-6$ sein muß, so daß wieder $n = 6$ ist.

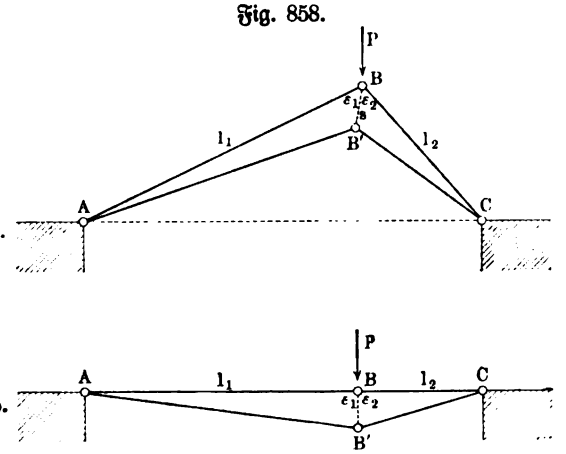
Wenn man die Ecken eines Tetraeders als vier Knoten und dessen sechs Seiten als Stäbe ansieht, so kann man diese Konstruktion zu einem einfachen räumlichen Fachwerk mit sechs Knoten ausgestalten, indem man zwei neue Knoten durch je drei Stäbe an je drei Ecken des Tetraeders anschließt.

Ein entsprechendes räumliches Fachwerk, welches nicht mehr einfach ist, zeigt Fig. 857, in welchem die Achsen der Stäbe als die Kanten eines dreiseitigen Prismas und als drei nicht zusammenhängende Diagonalen der

Mantelfläche erscheinen; unter Änderung einzelner Stablängen kann man aus Fig. 857 leicht andere herleiten, in welcher nur je drei Stäbe in einer Ebene liegen.

194. Einschränkung der Betrachtung des vorigen Paragraphen mit Rücksicht auf das elastische Verhalten des Materials der Stäbe (Nachgiebige Fachwerke). Wären die Stäbe, aus denen man ein Fachwerk bildet, thatsächlich starr, so würde gemäß den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, jeder geometrisch bestimmten Konstruktion aus Strecken ein Fachwerk entsprechen. Mit Rücksicht auf das elastische Verhalten des Materials der Stäbe sind jedoch bei der Bildung der Fachwerke gewisse geometrisch bestimmte Konstruktionen auszuschließen. Um dies zu erläutern, vergleichen wir die Formänderungen der beiden, in Fig. 858 a und in Fig. 858 b dargestellten Stabverbindungen. Man hat für Fig. 858 a

Fig. 858.



$$\overline{AB'}^2 = l_1^2 + s^2 - 2\,l_1\,s\cos\varepsilon_1$$
$$= l_1^2\left[1 - 2\frac{s}{l_1}\cos\varepsilon_1 + \left(\frac{s}{l_1}\right)^2\right]$$

und demnach

$$AB' \sim l_1 - s\cos\varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{l_1}\sin^2\varepsilon_1$$

und ebenso

$$CB' \sim l_2 - s\cos\varepsilon_2 + \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{l_2}\sin^2\varepsilon_2.$$

Dagegen ist für Fig. 858 b, da hier $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \sim 90^0$ ist

$$AB' \sim l_1 + \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{l_1} \quad \text{und} \quad CB' \sim l_2 + \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{l_2}.$$

Während also die Formänderung von AB oder CB für Fig. 858 a schon von der ersten Potenz der Verschiebung $[s]$ abhängt, ist diese für Fig. 858 b erst durch die zweite Potenz bestimmt, d. h. bei einer kleinen Verschiebung $[s]$ sind die (positiven oder negativen) Verlängerungen von AB oder CB für Fig. 858 a in erster Annäherung dieser Verschiebung proportional, während sie in Fig. 858 b bei derselben Annäherung den Wert Null haben.

Da die Stäbe einer gemäß Fig. 858 ausgeführten Konstruktion stets kleine Formänderungen zulassen, so tritt unter dem Einfluß von $[P]$ in

Fig. 858 b gegenüber Fig. 858 a eine relativ große Verschiebung [s] auf, d. h. die Konstruktion gemäß Fig. 858 ist auch nicht angenähert als starr zu bezeichnen, wie auch die alltägliche Erfahrung (Druck der Hand auf B u. s. w. bei entsprechenden Anordnungen) lehrt.

Die Eigentümlichkeit des betrachteten Beispiels tritt deutlich hervor, wenn man sich die Stange BC in den Fig. 858 a und b entfernt denkt, so daß AB beweglich wird, und nun die Bahn des Endpunktes B von AB betrachtet, welche ein Kreis um A ist. Unter den unendlich vielen Stellungen der um A beweglichen Stange AB ist für die Einfügung einer Stange BC in Fig. 858 b diejenige gewählt, bei welcher die Entfernung BC ein Minimum ist, während in Fig. 858 a eine beliebige andere Stellung dargestellt ist. Entsprechendes gilt auch für die Stange AB, falls man den Kreis von CB um C betrachtet.

Denkt man sich nun in irgend einem ebenen Fachwerke eine Stange entfernt und eine andere Stange festgehalten, so geht das (steife) Fachwerk in einen beweglichen Mechanismus über. Hält man eine Stange fest, welche mit der beseitigten Stange einen Knoten (entsprechend C in Fig. 858) gemeinsam hatte, so beschreibt der andere Knoten der entfernten Stange (entsprechend B in Fig. 858) bei der Bewegung des Mechanismus eine Linie (entsprechend dem Kreise in Fig. 858), deren Punkte von dem festen Punkte (entsprechend C) veränderliche Abstände (ϱ) haben. Bestimmt man die etwa vorhandenen Minima und Maxima dieser veränderlichen Abstände, so zeigt jede der entsprechenden Minimal- und Maximalstellungen des Mechanismus, nachdem ihr wieder eine Stange (entsprechend BC) eingefügt ist, die Eigenschaften, welche bei Fig. 858 b hervorgehoben wurden. Denkt man nämlich die beschriebene Linie auf Polarkoordinaten (ϱ, φ) bezogen, für welche der feste Punkt (entsprechend C) als Pol genommen ist, so sind die veränderlichen Abstände (entsprechend BC) durch die Gleichung $\varrho = f(\varphi)$ dieser Linie gegeben, so daß Maxima oder Minima von ϱ der Gleichung $f'(\varphi) = 0$ entsprechen. Entspricht ein Wert ϱ_0 von ϱ dem Werte φ_0, für welche $f'(\varphi_0) = 0$ ist, so ist

$$\varrho = f(\varphi_0 + \delta) = f(\varphi_0) + \frac{\delta}{1} f'(\varphi_0) + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} f''(\varphi_0) + \cdots$$
$$= f(\varphi_0) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f''(\varphi_0) + \cdots,$$

d. h. in der Nähe dieser Stelle gilt in erster Annäherung $\varrho = \varrho_0$.

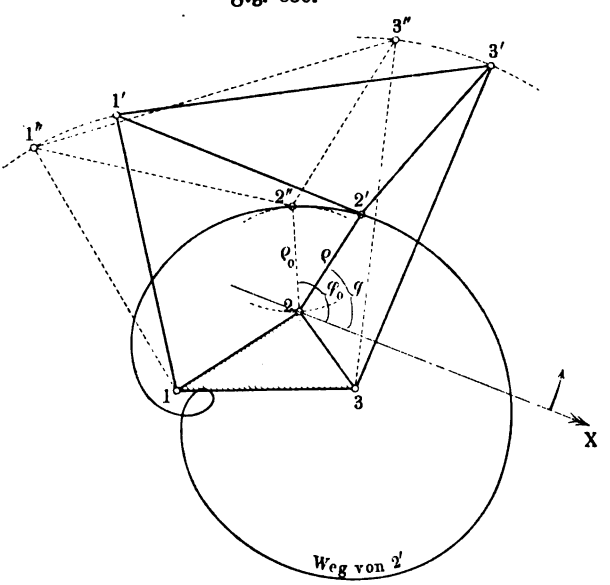
Aus dieser Betrachtung folgt, daß die auszuschließenden Konstruktionen durch die Bedingung $f'(\varphi) = 0$ bestimmt werden, welche im allgemeinen einem Minimum oder einem Maximum der Stangenlänge ϱ entspricht, d. h. abgesehen von ganz seltenen Fällen genügt es, diejenigen Konstruktionen auszuschließen, bei welchen irgend ein Stab als Länge die kleinste oder größte Entfernung hat, welche die Knoten seiner Enden nach seiner Beseitigung zeigen können.

Als Beispiel betrachten wir Fig. 859, in welcher zwei Dreiecke 1, 2, 3 und 1′, 2′, 3′ durch die Stäbe $\overline{1\,1'}$, $\overline{2\,2'}$, $\overline{3\,3'}$ zu einem Fachwerke verbunden sind, das übrigens eine andere Darstellung des Falles $n = 6$ auf S. 1164 ist. Entfernt man z. B. die Stange $\overline{2\,2'}$ und hält die Stange $\overline{1\,2}$ oder $\overline{2\,3}$

und damit das Dreieck $\overline{1\,2\,3}$ fest, so beschreibt $2'$ bei den möglichen Bewegungen der Stabverbindung 1, $1'$, $2'$, $3'$, 3 eine Linie, welche für 2 als Pol die Polargleichung $\varrho = f(\varphi)$ hat. Für eine Stange $\overline{2\,2'}$ von der Länge $\varrho_0 = f(\varphi_0)$ zeigt das Fachwerk, falls $f'(\varphi_0) = 0$ ist, denselben Mangel an Steifigkeit, der an Fig. 858 b erläutert wurde. In Fig. 859 ist einer der Werte von φ_0, für welche $f'(\varphi_0) = 0$ ist, eingetragen für die Polarachse $\overline{2\,X}$; ihm entspricht das nachgiebige Fachwerk 1, 2, 3, $1''$, $2''$, $3''$, bei dem $\overline{2\,2''} = \varrho_0$ ein Minimum ist.

Will man auch die seltenen Fälle, in denen der Gleichung $f'(\varphi) = 0$ kein Maximum oder Minimum von ϱ entspricht, berücksichtigen, so muß man sagen: **Als Fachwerke auszuschließen sind alle Konstruktionen, bei denen sich ein Knoten um [s] verschieben kann, während die Länge eines von ihm ausgehenden Stabes in erster Annäherung in Bezug auf s unverändert bleibt.**

Fig. 859.



Man kann dieser allgemeinen Fassung entsprechend auch leicht eine allgemeine Regel für die auszuschließenden Konstruktionen angeben, welche als „Nachgiebige Fachwerke" bezeichnet werden mögen.

Betrachtet man nämlich die Konstruktion einmal in ihrer ursprünglichen Beschaffenheit, dann aber, nachdem sich die Länge jedes Stabes um eine gegebene relativ kleine Größe geändert hat, so kann man die entsprechenden Verschiebungen der Knoten formell leicht bestimmen und demgemäß feststellen, ob die eine oder die andere dieser Verschiebungen einer Stabverlängerung entspricht, welche in erster Annäherung verschwindet.

Bezeichnet man die Knoten der Konstruktion in ihrer ursprünglichen Gestalt durch 1, 2, 3, ... n und in ihrer veränderten Gestalt durch $1'$, $2'$, $3'$, ... n', so kann man die beiden Darstellungen in einer Ebene so aufeinanderlegen, daß z. B. Knoten 1 mit Knoten $1'$ zusammenfällt und daß außerdem die durch 1 und 2 bestimmte Gerade auf die durch $1'$ und $2'$ bestimmte Gerade fällt. Vergl. die Befestigung eines einfachen Balkens in Fig. 794. Wählt man die sich deckenden Knoten zum Anfangspunkte eines Koordinatensystems, dessen Y-Achse mit der bezeichneten Geraden zusammen-

fällt, so zeigt Knoten 1 keine relative Verschiebung, während die relative Verschiebung des Knotens 2 auf der Y-Achse liegt.

Zerlegt man die Verschiebung für einen beliebigen (p) Knoten, welcher in der ursprünglichen Konstruktion durch $(x_p; y_p)$ dargestellt ist, in die Komponenten ξ_p und η_p nach den Achsen, so ist dieser Knoten in der veränderten Konstruktion durch $(x_p + \xi_p;\ y_p + \eta_p)$ dargestellt. Um die $2n$ Größen ξ_p, η_p zu bestimmen, bedarf man eines Systems von $2n - 3$ Gleichungen, da $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ ist. Diese $2n - 3$ Gleichungen liefern die Ansätze für die Verlängerungen der $2n - 3$ Stäbe. Für den Stab, der die Knoten p und q verbindet, sei l_{pq} die ursprüngliche Länge und λ_{pq} seine Verlängerung; es gilt dann für die ursprüngliche Konstruktion

$$[x_p - x_q]^2 + [y_p - y_q]^2 = l_{pq}^2$$

und für die veränderte Konstruktion ebenso

$$[(x_p + \xi_p) - (x_q + \xi_q)]^2 + [(y_p + \eta_p) - (y_q + \eta_q)]^2 = (l_{pq} + \lambda_{pq})^2.$$

Führt man letztere Gleichung aus, so ist mit Rücksicht auf die Gleichung für l_{pq}^2

$$2(x_p - x_q)(\xi_p - \xi_q) + (\xi_p - \xi_q)^2 + 2(y_p - y_q)(\eta_p - \eta_q) + (\eta_p - \eta_q)^2 = 2 l_{pq}\lambda_{pq} + \lambda_{pq}^2.$$

Diese Gleichung lautet nach Streichung der Quadrate

$$2(x_p - x_q)(\xi_p - \xi_q) + 2(y_p - y_q)(\eta_p - \eta_q) = 2 l_{pq}\lambda_{pq}$$

oder

$$\xi_p(x_p - x_q) + \xi_q(x_q - x_p) + \eta_p(y_p - y_q) + \eta_q(y_q - y_p) = l_{pq} \cdot \lambda_{pq}.$$

Da jeder der $2n - 3$ Stäbe eine solche Gleichung liefert, so sind die $2n$ Verschiebungen, unter denen $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ bereits bestimmt sind, im allgemeinen linear durch die Verlängerungen λ_{pq} bestimmt. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, d. h. in diesem Falle ist die Konstruktion als Fachwerk auszuschließen.

Für die räumlichen Fachwerke gilt Entsprechendes.

195. Die statisch bestimmten Fachwerke und die Berechnung ihrer Stabkräfte. Ist ein ebenes Fachwerk bei Knotenbelastung im Gleichgewicht, so heben sich die Kräfte an jedem Knoten auf, d. h. man erhält für die an einem Knoten angreifenden Kräfte zwei Gleichungen, entsprechend der X-Richtung und Y-Richtung eines Koordinatensystems. Bei n Knoten erhält man demnach hier $2n$ Gleichungen, welche aber nicht voneinander unabhängig sind, da die äußeren Kräfte unter sich im Gleichgewicht stehen.

Führt man die drei Gleichungen, welche dieses Gleichgewicht bestimmen, in das System der $2n$ Gleichungen ein, so bleiben demnach $2n - 3$ Gleichungen übrig, um die Stabkräfte, d. h. den Zug oder Druck in den einzelnen Stäben, zu bestimmen. Da man durch $2n - 3$ Gleichungen im allgemeinen $2n - 3$ Unbekannte bestimmen kann, so können hier im allgemeinen $2n - 3$ Stabkräfte, welche also $2n - 3$ Stäben entsprechen, bestimmt werden.

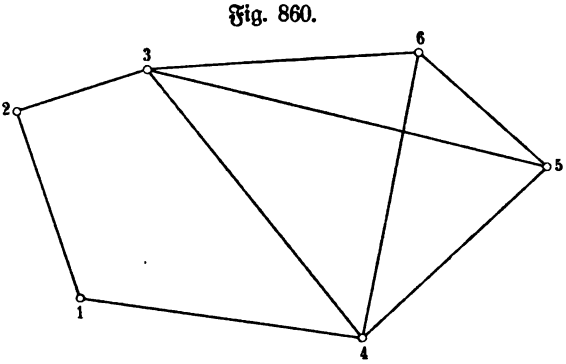
Ist nun ein ebenes Fachwerk von n Knoten vorgelegt, welches entweder einfach ist oder durch Stabvertauschung aus einem solchen entstanden gedacht werden kann, so führt die obige Betrachtung auch im allgemeinen zu der Bestimmung seiner $2n - 3$ Stabkräfte. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die Determinante des Gleichungssystems für die Bestimmung der Stabkräfte verschwindet.

Bildet man diese Determinante, so findet man, daß sie übereinstimmt mit der, am Schluß des vorigen Paragraphen bezeichneten Determinante. Demnach gilt:

Ein ebenes Fachwerk, welches entweder einfach ist oder durch Stabvertauschung aus einem solchen entstanden gedacht werden kann, ist, abgesehen von dem Falle des nachgiebigen Fachwerkes, statisch-bestimmt, d. h. seine Stabkräfte lassen sich ohne Hülfe der Elasticitätslehre bestimmen, und umgekehrt.

Bei der Bestimmung der Stabkräfte zeigt sich der Fall des nachgiebigen Fachwerkes dadurch an, daß Stabkräfte unendlich werden. An dem Beispiele der Fig. 858 b zeigt das Kraftdreieck für $[P]$ und für die Richtungen $B'A$ und $B'C$ in diesem um so größere Stabkräfte an, je kleiner BB' ist und zwar werden diese Stabkräfte unendlich für $BB' = 0$, d. h. für die ursprünglichen Stangenlängen BA und BC; dagegen treten in Fig. 858 a für B und B' endliche Stabkräfte auf.

Fig. 860.



Dazu mag noch bemerkt werden, daß durch das Verschwinden der Determinante auch angezeigt werden kann, daß eine Stabverbindung überhaupt kein Fachwerk ist; das gilt z. B. für Fig. 860, diese stellt eine Stabverbindung von sechs Knoten und der richtigen Anzahl von neun Stäben dar, aber der Teil 1, 2, 3, 4 ist beweglich und also kein Fachwerk, während der Teil 4, 5, 6, 3 erst nach Fortnahme des Stabes $\overline{35}$ oder $\overline{46}$ in ein Fachwerk der bisher betrachteten Art übergehen würde.

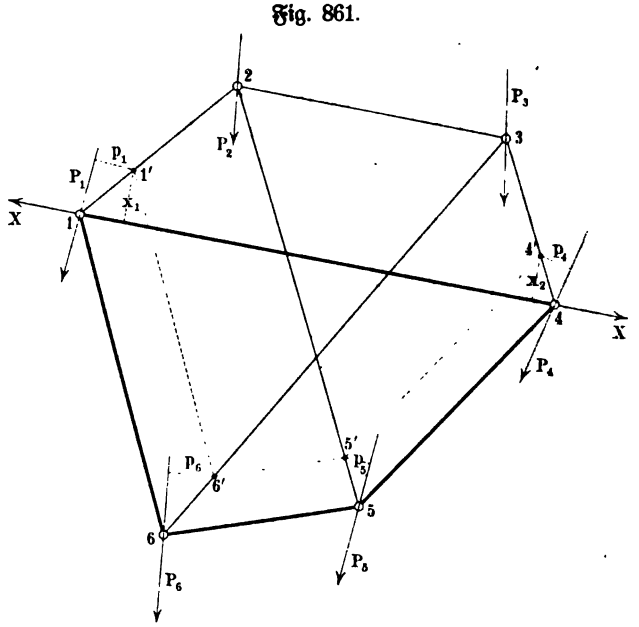
Die Bestimmung der Stabkräfte durch Auflösung der bezeichneten Gleichungen ist meist äußerst umständlich.

Wie die Stabkräfte des ebenen Fachwerkes wirklich bestimmt werden können, ist an den Beispielen, welche Fig. 205, 206 u. s. w. entsprechen, bereits gezeigt worden.

Da die Zerlegung einer Kraft nach zwei gegebenen Richtungen eindeutig bestimmt ist, so kann man bei einem einfachen Fachwerk der Ebene die Stabkräfte auf alle Fälle leicht bestimmen, wenn man von dem zuletzt angeschlossenen Knoten ausgeht und zunächst dessen Belastung nach Richtung

der beiden, durch ihn angeschlossenen Stäbe zerlegt. Ersetzt man diese beiden Stäbe des letzten Knotens durch die beiden Kräfte, welche sie bezw. auf die Knoten ihres anderen Endpunktes ausüben, so lassen sich diese Kräfte mit den dort wirkenden äußeren Kräften zusammenfassen und es liegt demnach für die weitere Behandlung jetzt ein einfaches Fachwerk vor, welches einen Knoten und zwei Stäbe weniger enthält als das gegebene. Wendet man auf dieses Fachwerk dasselbe Verfahren an, so gelangt man wieder zu einem einfachen Fachwerk, das zwei Knoten und vier Stäbe weniger enthält als das gegebene u. s. w. Ein Beispiel für derartige Bestimmungen der Stabkräfte wurde auf S. 375 gegeben.

Fig. 861.



Statt dessen kann man auch die Ritterschе Methode der Momente anwenden, für welche gleichfalls früher Beispiele gegeben wurden; dabei hat man gelegentlich eine Stabspannung, die bereits bestimmt wurde, für die weitere Betrachtung zu verwenden, wie es z. B. in Bezug auf Schnitt 7 in Fig. 205 geschah.

Die Ritterschе Methode reicht auch noch meist für Fachwerke aus, welche nicht mehr einfach sind, falls man auch hier gelegentlich bei der weiteren Betrachtung Stabspannungen verwendet, welche bereits bestimmt wurden; ein Beispiel dafür gab die Behandlung des Binders der Fig. 206, dessen mittlerer Teil $A_2 C_2 C C_2 B_2$ kein einfaches Fachwerk ist, während die Seitenteile, für sich betrachtet, noch einfache Fachwerke darstellen.

Es giebt aber auch Fälle, in denen die Ritterschе Methode nicht mehr ausreicht. Dies gilt z. B. für das eine Fachwerk der Fig. 856, welches in Fig. 861 von neuem dargestellt ist, und zwar mit bestimmter Knoten-

belastung. Um hier die Stabkraft für $\overline{14}$ zu bestimmen, greifen wir einen möglichst einfachen geschlossenen Teil des Fachwerks heraus, welcher $\overline{14}$ enthält, z. B. den Teil 1, 4, 5, 6 und setzen für die Kräfte der vier Knoten 1, 4, 5, 6 dieses Teiles die Momentengleichung an, und zwar für passend gewählte Drehpunkte. Den Drehpunkt 1′ für den Knoten 1 wählen wir beliebig auf $\overline{12}$, damit in der Momentengleichung die Stabkraft von $\overline{12}$ fortfällt. Da diese Momentengleichung für den Knoten 1 die Stabkraft von $\overline{16}$ enthält, welche auch in der Momentengleichung für den Knoten 6 auftritt, so wählen wir den Drehpunkt 6′ für den Knoten 6 so auf $\overline{63}$, daß die Stabkraft von $\overline{16}$ in der Momentengleichung für diese Knoten das umgekehrte Moment liefert, wie für den Knoten 1, d. h. wir wählen 6′ auf $\overline{63}$ so, daß $\overline{1'6'}$ zu $\overline{16}$ parallel ist. Entsprechende Überlegungen führen dazu, den Drehpunkt 5′ für den Knoten 5 auf $\overline{25}$ so zu wählen, daß $\overline{6'5'}$ zu $\overline{65}$ parallel ist, und den Drehpunkt 4′ für den Knoten 4 so auf $\overline{34}$ zu bestimmen, daß $\overline{5'4'}$ zu $\overline{54}$ parallel ist.

Bei Addition der vier Momentengleichungen ergiebt sich für die Stabkraft X die Gleichung

$$Xx_1 - p_1P_1 - p_6P_6 + p_5P_5 + p_4P_4 - Xx_2 = 0,$$

d. h. es ist

$$X = \frac{Mo}{x_2 - x_1},$$

falls man die algebraische Summe der Momente der Kräfte $[P_1]$, $[P_6]$, $[P_5]$, $[P_4]$ bezw. für die Drehpunkte 1′, 6′, 5′, 4′ durch Mo bezeichnet.

Erhält X einen positiven Wert, so ist der Pfeil von $[X]$ in der Fig. 861 richtig angesetzt, andernfalls muß er umgekehrt werden. Sollte $1'4'$ zu 14 parallel werden, so würde, falls $Mo = 0$ ausgeschlossen ist, $X = \infty$ sein, d. h. es würde der Ausnahmefall vorliegen, der auf ein nachgiebiges Fachwerk hinweist, wie übrigens auch eine geometrische Betrachtung zeigt.

Fig. 862.

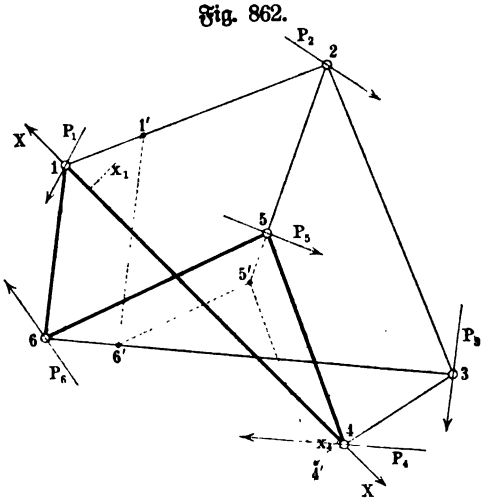


Fig. 862 zeigt das Verfahren noch bei einem anderen Fachwerke und zwar für die Stange $\overline{14}$, welcher der Teil 1, 4, 5, 6 des Fachwerkes zugeordnet ist; hier hat man

$$+ x_1X + x_4X + Mo = 0$$

und also

$$-X = \frac{Mo}{x_1 + x_4}.$$

Hat man die Stabkraft X in Fig. 861 oder in Fig. 862 bestimmt, so erhält man alle übrigen Stabkräfte durch einfache Zerlegung in den Knoten.

Das Verfahren führt ohne weiteres zum Ziel, wenn der Stab, dessen Stabkraft ermittelt werden soll, einem geschlossenen Teile des Fachwerkes angehört, dessen Knoten nur drei Stäbe enthalten.

Ist dies nicht mehr der Fall, so hat man nacheinander mehrere Linienzüge der betrachteten Art einzuführen, um zum Ziele zu gelangen.

Ist für die Praxis ein Fachwerk zu behandeln, welches nicht einfach ist, so hat es meist Teile, welche als einfache Fachwerke angesehen und demnach durch Kraftzerlegungen oder gemäß Ritters Methode behandelt werden können; dies ist z. B. der Fall für die Außenteile des in Fig. 206 dargestellten Binders. Hat man diese Teile behandelt, so löst man sie ab, wie bei der Auflösung eines einfachen Fachwerkes, und ersetzt die Stäbe, welche am Knoten des Restes angreifen, durch die bekannten Kräfte, welche sie an den Knoten ausüben. Faßt man diese Kräfte mit den äußeren Kräften, welche an diesem Knoten wirken, zusammen, so stellt der Rest des Fachwerks, welchen man als dessen zusammengesetzten Kern (Grundfigur) bezeichnen kann, ein Fachwerk mit Knotenbelastung dar, welches nicht mehr einfach ist und auch nicht mehr Teile enthält, die sich als einfache Fachwerke auffassen lassen.

Auf solche zusammengesetzten Kerne von Fachwerken, wie sie z. B. der Teil $A_2 C_2 C C_2 B_2$ in Fig. 206 darstellt, beziehen sich die weitergehenden Überlegungen; als solche Kerne sind auch die Fig. 861 und 862 aufzufassen.

Ein allgemeines Verfahren für die Bestimmung der Stabkräfte eines Fachwerkes, welches keine besonderen Überlegungen fordert, ist unter anderem von Henneberg[1]) angegeben worden; formell stellen natürlich auch die im Eingange dieses Paragraphen bezeichneten Gleichungen eine allgemeine Lösung dar, doch sind diese für die wirkliche Berechnung der Stabkräfte meist sehr ungeeignet.

Für das räumliche Fachwerk gelten entsprechende Betrachtungen.

196. Das statisch-bestimmte ebene Fachwerk als statisch-bestimmter und als statisch-unbestimmter Träger. Die gewöhnliche Befestigung eines ebenen Fachwerkes entspricht der Befestigung eines Balkens, welche in Fig. 794 dargestellt wurde; bei ihr (vergl. Fig. 863) ist ein Knotenpunkt A drehbar befestigt, während ein zweiter B eine gerade Führungsbahn erhält, welche wagerecht oder schief liegen kann und behufs Verminderung der Reibung meist als Rollenlager ausgeführt ist. Bei dieser Art der Befestigung geht das statisch-bestimmte Fachwerk in einen statisch-bestimmten Träger über, da sich seine Formänderungen (sowohl die elastischen als die, welche Temperaturschwankungen entsprechen) entwickeln können, als wenn das Fachwerk nicht befestigt wäre, und da demnach auch die Auflagerreaktionen statisch bestimmt sind, wie bei einem einfachen Balken.

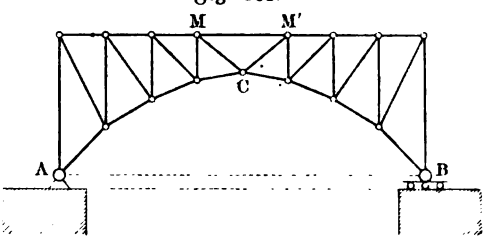
Würde man auch B drehbar befestigen, so würde damit eine solche Entwickelung der Formänderungen verhindert werden und damit würde der

[1]) Vergl. dessen Statik, Darmstadt bei Bergsträßer.

Träger statisch-unbestimmt, d. h. es ließen sich dann seine Stabkräfte und die Auflagerreaktionen nur auf Grund der Elasticitätslehre bestimmen.

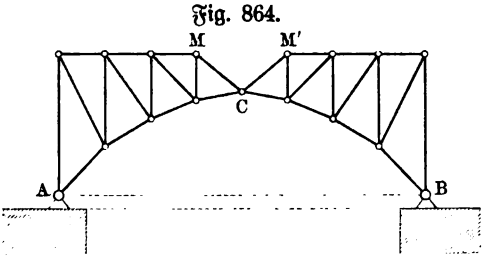
Entfernt man bei dieser Befestigung (vergl. Fig. 864) den Mittelstab MM', so gelangt man wieder (vergl. auch Fig. 229) zu einem statisch-bestimmten Träger, da jetzt der Knoten C den beiden Hälften des Fachwerks die freie Entwickelung ihrer Formänderungen sichert, womit auch die Auflagerreaktionen wieder statisch bestimmt werden; man kann diesen Drei-Gelenkbogen (A, B, C) als eine Verbindung zweier statisch-bestimmter Fachwerke auffassen, denen der gemeinsame Knoten C dieselbe Beweglichkeit sichert, welche in Fig. 863 die Auflagerung in B gab.

Fig. 863.



Allgemein gilt, daß ein statisch-bestimmtes Fachwerk in einen statisch-bestimmten Träger übergeht, wenn man die Befestigung so wählt, daß sie eine Entwickelung der Formänderungen des Fachwerks nicht hindert, während andernfalls ein statisch-unbestimmter Träger entsteht, den man durch Ausschaltung geeigneter Stäbe wieder zu einem statisch-bestimmten Träger machen kann.

Fig. 864.



Auflagerbedingungen, welche die Entwickelung der Formänderungen des Fachwerks hindern, mögen als überzählige Auflagerbedingungen bezeichnet werden.

Anderseits kann man auch den statisch-bestimmten Fachwerkträger zu einem statisch-unbestimmten Träger machen, indem man das Fachwerk selbst durch Einfügung überzähliger Stäbe statisch-unbestimmt macht.

Um in den beiden, hiermit bezeichneten Fällen statischer Unbestimmtheit die Behandlung der Träger durchführen zu können, müssen wir zunächst die Formänderungen eines statisch-bestimmten Fachwerkes betrachten.

197. Die Formänderung eines ebenen statisch-bestimmten Fachwerks. Nach Feststellung der Stabkräfte eines Fachwerks sind die elastischen Formänderungen der einzelnen Stäbe leicht zu bestimmen, da es sich lediglich um Verlängerungen bezw. Verkürzungen handelt. Nach dem Gesetze von Hooke gilt für die positive oder negative Verlängerung eines Stabes, welcher die Knoten p und q verbindet,

$$\lambda_{pq} = \frac{l_{pq} \cdot S_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E},$$

falls E den Elasticitätsmodul des Materials, l_{pq} die ursprüngliche Länge und f_{pq} den Querschnitt des Stabes und S_{pq} die Stabkraft mit positivem Zeichen für Zug und mit negativem Zeichen für Druck bezeichnet.

Hat man die Stabkraft X in Fig. 861 oder in Fig. 862 bestimmt, so erhält man alle übrigen Stabkräfte durch einfache Zerlegung in den Knoten.

Das Verfahren führt ohne weiteres zum Ziel, wenn der Stab, dessen Stabkraft ermittelt werden soll, einem geschlossenen Teile des Fachwerkes angehört, dessen Knoten nur drei Stäbe enthalten.

Ist dies nicht mehr der Fall, so hat man nacheinander mehrere Linienzüge der betrachteten Art einzuführen, um zum Ziele zu gelangen.

Ist für die Praxis ein Fachwerk zu behandeln, welches nicht einfach ist, so hat es meist Teile, welche als einfache Fachwerke angesehen und demnach durch Kraftzerlegungen oder gemäß Ritters Methode behandelt werden können; dies ist z. B. der Fall für die Außenteile des in Fig. 206 dargestellten Binders. Hat man diese Teile behandelt, so löst man sie ab, wie bei der Auflösung eines einfachen Fachwerkes, und ersetzt die Stäbe, welche am Knoten des Restes angreifen, durch die bekannten Kräfte, welche sie an den Knoten ausüben. Faßt man diese Kräfte mit den äußeren Kräften, welche an diesem Knoten wirken, zusammen, so stellt der Rest des Fachwerks, welchen man als dessen zusammengesetzten Kern (Grundfigur) bezeichnen kann, ein Fachwerk mit Knotenbelastung dar, welches nicht mehr einfach ist und auch nicht mehr Teile enthält, die sich als einfache Fachwerke auffassen lassen.

Auf solche zusammengesetzten Kerne von Fachwerken, wie sie z. B. der Teil $A_2 C_2 C C_2 B_2$ in Fig. 206 darstellt, beziehen sich die weitergehenden Überlegungen; als solche Kerne sind auch die Fig. 861 und 862 aufzufassen.

Ein allgemeines Verfahren für die Bestimmung der Stabkräfte eines Fachwerkes, welches keine besonderen Überlegungen fordert, ist unter anderem von Henneberg [1]) angegeben worden; formell stellen natürlich auch die im Eingange dieses Paragraphen bezeichneten Gleichungen eine allgemeine Lösung dar, doch sind diese für die wirkliche Berechnung der Stabkräfte meist sehr ungeeignet.

Für das räumliche Fachwerk gelten entsprechende Betrachtungen.

196. Das statisch-bestimmte ebene Fachwerk als statisch-bestimmter und als statisch-unbestimmter Träger. Die gewöhnliche Befestigung eines ebenen Fachwerkes entspricht der Befestigung eines Balkens, welche in Fig. 794 dargestellt wurde; bei ihr (vergl. Fig. 863) ist ein Knotenpunkt A drehbar befestigt, während ein zweiter B eine gerade Führungsbahn erhält, welche wagerecht oder schief liegen kann und behufs Verminderung der Reibung meist als Rollenlager ausgeführt ist. Bei dieser Art der Befestigung geht das statisch-bestimmte Fachwerk in einen statisch-bestimmten Träger über, da sich seine Formänderungen (sowohl die elastischen als die, welche Temperaturschwankungen entsprechen) entwickeln können, als wenn das Fachwerk nicht befestigt wäre, und da demnach auch die Auflagerreaktionen statisch bestimmt sind, wie bei einem einfachen Balken.

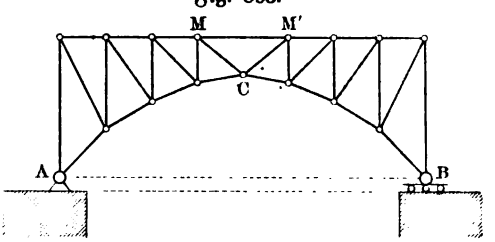
Würde man auch B drehbar befestigen, so würde damit eine solche Entwickelung der Formänderungen verhindert werden und damit würde der

[1]) Vergl. dessen Statik, Darmstadt bei Bergsträßer.

Träger statisch-unbestimmt, d. h. es ließen sich dann seine Stabkräfte und die Auflagerreaktionen nur auf Grund der Elasticitätslehre bestimmen.

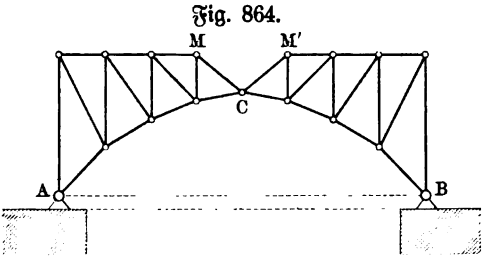
Entfernt man bei dieser Befestigung (vergl. Fig. 864) den Mittelstab MM', so gelangt man wieder (vergl. auch Fig. 229) zu einem statisch-bestimmten Träger, da jetzt der Knoten C den beiden Hälften des Fachwerks die freie Entwickelung ihrer Formänderungen sichert, womit auch die Auflagerreaktionen wieder statisch bestimmt werden; man kann diesen Drei-Gelenkbogen (A, B, C) als eine Verbindung zweier statisch-bestimmter Fachwerke auffassen, denen der gemeinsame Knoten C dieselbe Beweglichkeit sichert, welche in Fig. 863 die Auflagerung in B gab.

Fig. 863.



Allgemein gilt, daß ein statisch-bestimmtes Fachwerk in einen statisch-bestimmten Träger übergeht, wenn man die Befestigung so wählt, daß sie eine Entwickelung der Formänderungen des Fachwerks nicht hindert, während andernfalls ein statisch-unbestimmter Träger entsteht, den man durch Ausschaltung geeigneter Stäbe wieder zu einem statisch-bestimmten Träger machen kann.

Fig. 864.



Auflagerbedingungen, welche die Entwickelung der Formänderungen des Fachwerks hindern, mögen als überzählige Auflagerbedingungen bezeichnet werden.

Anderseits kann man auch den statisch-bestimmten Fachwerkträger zu einem statisch-unbestimmten Träger machen, indem man das Fachwerk selbst durch Einfügung überzähliger Stäbe statisch-unbestimmt macht.

Um in den beiden, hiermit bezeichneten Fällen statischer Unbestimmtheit die Behandlung der Träger durchführen zu können, müssen wir zunächst die Formänderungen eines statisch-bestimmten Fachwerkes betrachten.

197. Die Formänderung eines ebenen statisch-bestimmten Fachwerks. Nach Feststellung der Stabkräfte eines Fachwerks sind die elastischen Formänderungen der einzelnen Stäbe leicht zu bestimmen, da es sich lediglich um Verlängerungen bezw. Verkürzungen handelt. Nach dem Gesetze von Hooke gilt für die positive oder negative Verlängerung eines Stabes, welcher die Knoten p und q verbindet,

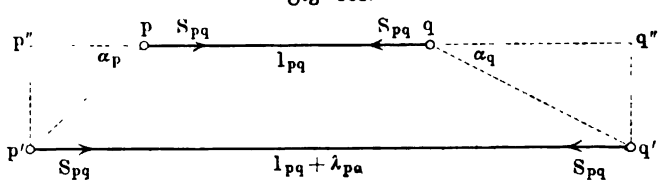
$$\lambda_{pq} = \frac{l_{pq} \cdot S_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E},$$

falls E den Elasticitätsmodul des Materials, l_{pq} die ursprüngliche Länge und f_{pq} den Querschnitt des Stabes und S_{pq} die Stabkraft mit positivem Zeichen für Zug und mit negativem Zeichen für Druck bezeichnet.

Gemäß den Gleichungen, welche am Schluß von § 194 aufgestellt wurden, sind bei gegebenen Werten λ_{pq} die Verschiebungen ξ_p, η_p und ξ_q, η_q der Knoten jedes Stabes formell bestimmt, doch ist die Verwendung dieser Gleichungen wieder meist sehr unzweckmäßig.

Man benutzt statt ihrer das Maxwell-Mohrsche Verfahren, welches in folgendem besteht: man beansprucht einen Knoten m, dessen Verschiebungen ξ_m und η_m man bestimmen will, bei unbelastetem Fachwerk einmal in der Richtung der X-Achse und einmal in der Richtung der Y-Achse, durch eine Kraft vom Werte 1, stellt die dadurch im Fachwerk hervorgerufenen Stabkräfte $S_{pq}^{(x)}$ und $S_{pq}^{(y)}$ fest und wendet bei jedem der Kraftsysteme, welche den beiden Beanspruchungen entsprechen, auf die Knoten des Fachwerks das Princip der virtuellen Verrückungen an, und zwar in Bezug auf Verrückungen, welche mit den thatsächlich vorhandenen Verrückungen λ_{pq} übereinstimmen; dabei erhält der Knoten m einmal die Komponente ξ_m der gesuchten Verschiebung in Richtung der Kraft 1, welche die Richtung der X-Achse hat, und einmal die Komponente η_m der gesuchten Verschiebung in Richtung der Kraft 1, welche die Richtung der Y-Achse hat, womit die gesuchte Verschiebung gegeben ist.

Fig. 865.



Um dieses Verfahren anwenden zu können, betrachten wir zunächst die Arbeiten der beiden Stabkräfte eines Stabes für die Verrückung seiner Enden.

Geht ein gezogener Stab l_{pq} gemäß Fig. 865 unter Verlängerung um λ_{pq} aus der Lage p, q in die parallele Lage p', q' über, so leistet die Stabkraft $[S_{pq}]$, welche als Reaktion der Zugkraft in p auftritt, am Knoten p für den Weg pp' die Arbeit

$$pp' \,.\, S_{pq} \,.\, \cos(180^0 - \alpha_p) = -pp' \,.\, S_{pq} \,.\, \cos\alpha_p$$

und ebenso die Stabkraft $[\overline{S}_{pq}]$ am Knoten q für den Weg qq' die Arbeit

$$qq' \,.\, S_{pq} \,.\, \cos(180^0 - \alpha_q) = -qq' \,.\, S_{pq} \,.\, \cos\alpha_q.$$

Projiziert man p' als p'' und q' als q'' auf pq, so ist $pp'' = pp'\cos\alpha_p$ und $qq'' = qq'\cos\alpha_q$, und demnach ist die gesamte Arbeit für den Übergang aus der Lage p, q in die parallele Lage p', q' gegeben als

$$-S_{pq}(pp'' + qq'') = -S_{pq} \,.\, \lambda_{pq},$$

da die Verlängerung λ_{pq} von l_{pq} durch $pp'' + qq''$ gegeben wird.

Die entsprechende Arbeit für einen gedrückten Stab, bei dem $[S_{pq}]$ mit dem Vorzeichen — eingeführt wird, ist durch denselben Ausdruck gegeben.

Ist die Lage p', q' der Lage p, q nicht parallel, so ist neben der betrachteten Verschiebung noch eine Drehung zu betrachten, deren Einfluß auf die berechnete Arbeit aber, wie man leicht sieht, verschwindend klein ist, solange es sich nur um sehr geringe Drehungen handelt.

Beansprucht man nun das unbelastete Fachwerk im Knoten m durch eine Kraft 1 in Richtung der X-Achse, so treten neben den Auflagerreaktionen in jedem Stabe des Fachwerks zwei Stabkräfte auf, deren Wert für den Stab pq durch $S_{pq}^{(x)}$ bezeichnet werden mag. Da die Kräfte jedes Knotens für sich im Gleichgewicht stehen, so hat die Arbeit dieser Kräfte den Wert Null, wenn man dem Knoten irgend eine beliebige Verrückung giebt, also auch, wenn man ihm die Verrückung $\lambda_{pq} = \frac{l_{pq} \cdot S_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E}$ giebt, welche bei dem belasteten Fachwerk thatsächlich auftritt.

Giebt man allen Knoten die Verrückungen, welche bei dem belasteten Fachwerk thatsächlich auftreten, so hat die Summe der Arbeiten für die Kräfte an jedem einzelnen Knoten, welche der Belastung 1 des Knotens m in Richtung der X-Achse entsprechen, den Wert Null.

Da die Kraft 1 dabei in ihrer Richtung der Verschiebung ξ_m unterliegt und da die entsprechenden Auflagerreaktionen dabei die Arbeit Null leisten, weil sich ihre Angriffspunkte entweder gar nicht oder senkrecht zur Auflagerfläche bewegen, so ist mit Rücksicht auf den oben entwickelten Ausdruck für die Arbeit der Stabkräfte

$$1 \cdot \xi_m - \Sigma S_{pq}^{(x)} \cdot \frac{l_{pq} \cdot S_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E} = 0,$$

d. h. man hat

$$\xi_m = \frac{1}{E} \Sigma S_{pq}^{(x)} \cdot S_{pq} \cdot \frac{l_{pq}}{f_{pq}},$$

wobei die Summation auf alle Stäbe zu erstrecken ist und wobei S_{pq} die Stabkraft des Stabes l_{pq} bezeichnet, welche der thatsächlichen Belastung entspricht, während $S_{pq}^{(x)}$ die Stabkraft desselben Stabes ist, falls das sonst unbelastete Fachwerk im Knoten m in der Richtung der X-Achse durch die Kraft 1 beansprucht wird.

Ebenso folgt

$$\eta_m = \frac{1}{E} \Sigma S_{pq}^{(y)} \cdot S_{pq} \cdot \frac{l_{pq}}{f_{pq}},$$

wobei $S_{pq}^{(y)}$ die Stabkraft des Stabes l_{pq} ist, falls das sonst unbelastete Fachwerk im Knoten m in der Richtung der Y-Achse durch die Kraft 1 beansprucht wird.

Aus den Verschiebungen ξ_m und η_m erhält man die Verschiebung des Knotens m durch das Parallelogramm.

Da die Größen S_{pq} stets lineare Funktionen der angreifenden Kräfte sind (vergl. die Beispiele zu Fig. 205 u. f. w.), so sind auch ξ_m und η_m lineare Funktionen der angreifenden Kräfte.

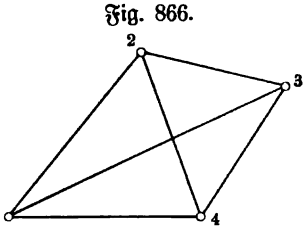
Da die Wahl der Achsenrichtungen in Bezug auf das Fachwerk völlig willkürlich ist, so sind die Komponenten der thatsächlichen Knotenverschiebungen nach jeder beliebigen Richtung lineare Funktionen der angreifenden Kräfte.

Bestimmt man also für zwei angreifende Kräfte P_m und P_n, welche bezw. an den Knoten m und n wirken, die in ihre Richtungen fallenden Komponenten der thatsächlichen Knotenverschiebungen, so sind auch diese lineare

Funktionen der angreifenden Kräfte und demnach gilt für diese Verschiebungen (vergl. S. 1081) auch der Maxwellsche Satz, welcher sich hier folgendermaßen aussprechen läßt: Wenn zwei Kräfte $[P_m]$ und $[P_n]$ von gleichem Werte an den Knoten m und n eines Fachwerks wirken, so stimmt die Verschiebung von m in der Richtung von $[P_m]$, welche durch $[P_n]$ hervorgerufen wird, überein mit der Verschiebung von n in der Richtung von $[P_n]$, welche durch $[P_m]$ hervorgerufen wird.

198. Behandlung ebener statisch-unbestimmter Fachwerkträger. Ein ebenes Fachwerk, das entweder einfach ist oder sich durch Stabvertauschung auf ein solches zurückführen läßt, wird statisch-unbestimmt, wenn man noch einen überzähligen Stab (oder mehrere) einfügt. Den einfachsten Fall eines solchen statisch-unbestimmten Fachwerks stellt das Viereck der Fig. 866 dar, welches durch Beseitigung einer Diagonale ($\overline{13}$ oder $\overline{24}$) oder auch durch Entfernung einer Seite in ein einfaches Fachwerk übergeht.

Fig. 866.



Wird ein Fachwerk mit einem überzähligen Stabe (oder mit mehreren) so aufgelagert, daß eine Entwickelung der Formänderungen möglich ist, so entsteht ein statisch-unbestimmter Träger, dessen statische Unbestimmtheit lediglich dadurch hervorgerufen wird, daß die für den Aufbau des Fachwerks notwendige und hinreichende Anzahl der Stäbe ($2n - 3$ für n Knoten) hier überschritten ist.

Geschieht die Auflagerung eines Fachwerks so, daß eine Entwickelung der Formänderungen nicht möglich ist, so giebt schon das statisch-bestimmte Fachwerk einen statisch-unbestimmten Träger (vergl. S. 1173), während sich bei statisch-unbestimmten Fachwerken durch eine solche Auflagerung der Grad der statischen Unbestimmtheit noch vermehrt, unter dem man die gesamte Anzahl der überzähligen Stäbe und der überzähligen Auflagerbedingungen versteht.

Der Unterschied der statisch-bestimmten Träger von den statisch-unbestimmten Trägern, mag die statische Unbestimmtheit durch überzählige Stäbe oder durch die Art der Auflagerung oder durch beides zugleich hervorgerufen sein, besteht vornehmlich darin, daß bei statisch-bestimmten Trägern im unbelasteten Zustande keine Stabkräfte auftreten, während statisch-unbestimmte Träger auch im unbelasteten Zustande solche haben können.

Während sich nämlich bei dem statisch-bestimmten Träger jede Formänderung entwickeln kann, wird eine solche Entwickelung bei dem statisch-unbestimmten Träger durch die überzähligen Stäbe oder durch die Auflagerung oder durch beides gehindert.

Als Formänderungen, welche beim unbelasteten Träger auftreten können, sind namentlich die Änderungen der Stablängen infolge Änderung der Temperatur zu berücksichtigen. Außerdem ist aber noch zu beachten, daß jeder überzählige Stab genau die Entfernung der Knoten, zwischen denen er eingefügt werden soll, als Länge haben muß, wenn seine Einfügung nicht Formänderungen des ganzen Trägers nach sich ziehen soll, und daß Entsprechendes auch für die Abmessungen der Koordinaten für die festen Punkte

der Auflagerung gilt. Da sich dies, selbst unter der Voraussetzung konstanter Temperatur, in der Praxis nur angenähert erreichen läßt, so zeigt ein statisch-unbestimmter Träger selbst bei sorgfältiger Ausführung im unbelasteten Zustande geringe Stabkräfte, welche man als „Montierungsspannungen“ zu bezeichnen pflegt.

Nimmt man bei belasteten Fachwerken für die Stabkräfte der überzähligen Stäbe und für die Einwirkung der überzähligen Auflagerbedingungen willkürliche Kraftwerte an, so kann man die entsprechenden Kräfte unter Beseitigung der überzähligen Stäbe bezw. Vereinfachung der Auflagerbedingungen den Knotenbelastungen zurechnen und dann die Stabkräfte des entsprechenden zurückbleibenden statisch-bestimmten Trägers nach den früheren Methoden behandeln. Man sieht daraus, daß dessen Stabkräfte dann abhängig sind von den willkürlich gewählten Kraftwerten, welche den Einfluß der überzähligen Stäbe und der überzähligen Auflagerbedingungen darstellen, d. h. die Lösung der Aufgabe scheint unendlich-vieldeutig zu sein. Thatsächlich ist sie aber

Fig. 867 a.

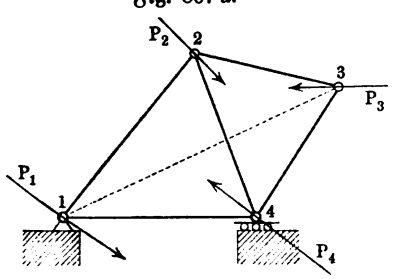
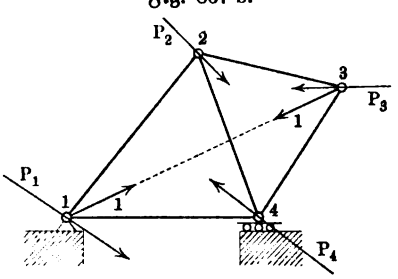


Fig. 867 b.



eindeutig, weil die Bestimmung der Formänderungen des statisch-unbestimmten Trägers, welcher aus dem berechneten statisch-bestimmten Träger entsteht, wenn man ihm die beseitigten überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen wieder hinzufügt, nachträglich auch eine Bestimmung der willkürlich eingeführten Kraftwerte ergiebt.

Handelt es sich zunächst um einen Träger mit der statischen Unbestimmtheit vom Grade 1, d. h. um ein statisch-bestimmtes Fachwerk, welches entweder durch einen überzähligen Stab oder durch eine überzählige Auflagerbedingung zu einem statisch-unbestimmten Träger geworden ist, so verfährt man folgendermaßen.

Man berechnet den statisch-bestimmten Träger, welcher nach Entfernung des überzähligen Stabes oder der überzähligen Auflagerbedingung entsteht, einerseits bei der gegebenen Belastung seiner Knoten, und anderseits in einem Zustande, bei welchem die Einwirkung des überzähligen Stabes bezw. der überzähligen Auflagerbedingung durch Zugkräfte vom Werte 1 dargestellt wird, während die übrigen Knoten unbelastet bleiben.

Entfernt man z. B. in Fig. 866 den Stab $\overline{1\,3}$, so ist einmal ein statisch-bestimmtes Fachwerk gemäß Fig. 867 a, und ferner ein statisch-bestimmtes Fachwerk gemäß Fig. 867 b zu behandeln, letzteres unter Entfernung von P_1, P_2, P_3, P_4.

Wenn ein Stab, welcher die Knoten p und q verbindet, im zweiten Falle die Stabkraft H_{pq} zeigt, so würde in ihm, unter übrigens gleichen Bedingungen bei einer Stabkraft X im überzähligen Stabe, die Stabkraft $X \cdot H_{pq}$ vorhanden sein.

Hat dieser Stab im ersten Falle die Stabkraft S_{pq}, so hat er als Stab des belasteten statisch-unbestimmten Fachwerks, wenn X die Kraft des überzähligen Konstruktionsstabes ist, die Stabkraft

$$S_{pq} + X \cdot H_{pq},$$

welcher die Formänderung

$$\lambda_{pq} = \frac{(S_{pq} + X \cdot H_{pq}) \cdot l_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E}$$

entspricht.

Um X zu bestimmen, wendet man wieder nach der Maxwell-Mohrschen Methode auf die Knoten des Fachwerks im zweiten Belastungsfalle das Princip der virtuellen Verrückungen an und zwar für Verrückungen, welche den thatsächlichen Verrückungen λ_{pq} des belasteten statisch-unbestimmten Fachwerks entsprechen.

Handelt es sich um einen überzähligen Stab, welcher die Knoten m und n verbindet, so leisten die Auflagerreaktionen, welche den beiden Stabkräften vom Werte 1 entsprechen, keine Arbeit, während für den Stab $\overline{mn}$ die Arbeit $-1 \cdot \lambda_{mn}$ und für jeden der übrigen Stäbe eine Arbeit $-H_{pq} \cdot \lambda_{pq}$ anzusetzen ist. Führt man $H_{mn} = 1$ ein, so ist auch die Arbeit des überzähligen Stabes als $-H_{mn} \cdot \lambda_{mn}$ gegeben, so daß sich also die Bedingung

$$\Sigma H_{pq} \cdot \lambda_{pq} = \Sigma H_{pq} (S_{pq} + X H_{pq}) \cdot \frac{l_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E} = 0$$

ergiebt.

Bezeichnet man $\frac{l_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E}$ durch α_{pq}, so ist also

$$\Sigma H_{pq} \cdot S_{pq} \cdot \alpha_{pq} + X \Sigma H_{pq}^2 \cdot \alpha_{pq} = 0,$$

d. h. man hat

$$-X = \frac{\Sigma \alpha_{pq} \cdot H_{pq} \cdot S_{pq}}{\Sigma \alpha_p \cdot H_{pq}^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 469)$$

Da jede Größe α_{pq} den Faktor $\frac{1}{E}$ enthält, so ist X unabhängig von E, falls das Material für alle Stäbe dasselbe ist.

Handelt es sich um eine überzählige Auflagerbedingung, z. B. um die Befestigung des Knotens 4 in Fig. 867, so führt diese einen Horizontalschub X für 4 ein, welchem eine Reaktion X in 1 entspricht, und demgemäß spielt jetzt die Strecke $\overline{14}$ dieselbe Rolle, welche bisher der überzählige Stab $\overline{mn}$ spielte, d. h. man hat auch hier X gegeben nach Formel Nr. 469).

Ist die statische Unbestimmtheit von höherem Grade, so bleibt das gegebene Verfahren weiter anwendbar. Man geht wieder zunächst auf den statisch-bestimmten Träger zurück, welcher bei Beseitigung der überzähligen Konstruktionsstücke entsteht, und berechnet für diesen bei voller Belastung die Stabkräfte S_{pq}. Darauf setzt man das erste der beseitigten Konstruktions-

stücke mit dem Kraftwerte 1 ein und berechnet die Stabkräfte $H_{pq}^{(1)}$ wie vorher für den sonst unbelasteten Träger; dann entfernt man dieses Konstruktionsstück wieder und setzt dafür ein anderes der beseitigten Konstruktionsstücke mit dem Kraftwerte 1 ein und berechnet die Stabkräfte $H_{pq}^{(2)}$ wie vorher für den sonst unbelasteten Träger u. s. f., bis der Reihe nach alle beseitigten Konstruktionsstücke in dieser Weise berücksichtigt sind.

Auf die n Belastungsfälle, welche den n überzähligen Konstruktionsstücken entsprechen, wendet man wie oben das Princip der virtuellen Verrückungen an, wodurch die n Gleichungen

$$\Sigma H_{pq}^{(1)} \cdot \lambda_{pq} = 0, \ \ldots \ \Sigma H_{pq}^{(n)} \cdot \lambda_{pq} = 0$$

entstehen.

Bezeichnet man die Kräfte für die beseitigten Konstruktionsstücke bezw. durch $X_1, X_2, \ldots X_n$, so ist die Stabkraft für den Stab $\overline{pq}$ im statisch-unbestimmten und voll belasteten Fachwerke

$$S_{pq} + H_{pq}^{(1)} \cdot X_1 + H_{pq}^{(2)} \cdot X_2 + \cdots H_{pq}^{(n)} \cdot X_n,$$

so daß

$$\lambda_{pq} = \alpha_{pq}(S_{pq} + H_{pq}^{(1)} \cdot X_1 + H_{pq}^{(2)} \cdot X_2 + \cdots H_{pq}^{(n)} \cdot X_n)$$

ist für $\alpha_{pq} = \frac{l_{pq}}{f_{pq}} \cdot \frac{1}{E}$.

Trägt man diesen Wert von λ_{pq} in die oben aufgestellten n Gleichungen ein, so erhält man n Gleichungen für die Bestimmung der n Unbekannten $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Schließlich mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß statisch-unbestimmte Träger auch dadurch gebildet werden können, daß man Stäbe, deren Achsen sich schneiden, an der Kreuzungsstelle vernietet.

Gehen bei einem statisch-bestimmten Fachwerk zwei Stäbe durch eine solche Kreuzungsstelle, so kann man die beiden in ihr vernieteten Stäbe als vier Stäbe mit einem Knoten an der Nietstelle auffassen; dabei steigt die Anzahl der Knoten des Fachwerks von n auf $n' = n + 1$ und die Anzahl der Stäbe von $2n - 3$ auf $2n - 3 + 2 = 2n' - 3$, d. h. das Fachwerk bleibt statisch-bestimmt. Solange die Nietstelle nicht belastet wird, unterscheidet sich das Fachwerk mit Nietstelle nicht von dem ursprünglichen, da bei Gleichgewicht an der Nietstelle die Stabkräfte der vier Stabteile paarweise einander gleich sind, d. h. man kann die unbelastete Nietstelle als Knoten auffassen oder auch ganz übergehen. Gehen jedoch bei einem statisch-bestimmten Fachwerke drei oder mehrere Stäbe durch eine Kreuzungsstelle, so erhält man bei der Vernietung aller Stäbe einen neuen Knotenpunkt und drei, vier u. s. w. neue Stäbe, d. h. das Fachwerk wird dabei einfach, zweifach u. s. w. statisch-unbestimmt; soll es statisch-bestimmt bleiben, so darf man nur je zwei Stäbe unter sich vernieten.

Entsprechende Überlegungen gelten für die Vernietung sich kreuzender Stäbe im statisch-unbestimmten Fachwerk.

199. Die nachgiebigen Fachwerke. Bei einem nachgiebigen Fachwerk treten im allgemeinen, solange es als starr vorausgesetzt wird, Stabkräfte von

unendlich-großem Werte auf, wie an dem Beispiele der Fig. 858 b erläutert wurde (vergl. auch S. 1171). Ein weiteres Beispiel zeigt das Fachwerk der Fig. 868, in welchem fünf Knoten durch $2 \cdot 5 - 3 = 7$ Stäbe verbunden sind, aber so, daß der geradlinige Anschluß des Knotens 5 an die Knoten 3 und 4 das Fachwerk zu einem „nachgiebigen" Fachwerk macht. Wirkt $[P]$ in 5 senkrecht zu $\overline{34}$, so bleiben die Betrachtungen für Fig. 858 b auch hier in Kraft. Das gilt auch für andere Lagen von $[P]$, solange $[P]$ eine Komponente hat, die senkrecht zu $\overline{34}$ steht; fällt aber $[P]$ in die Richtung von $\overline{54}$ oder von $\overline{53}$, so treten keine Stabkräfte von unendlich-großem Werte auf, dafür wird aber der Träger der Fig. 868 statisch-unbestimmt, weil die Verteilung von $[P]$ auf die Stäbe $\overline{54}$ und $\overline{53}$ nicht durch einfache statische Betrachtungen festgestellt werden kann.

Fig. 868.

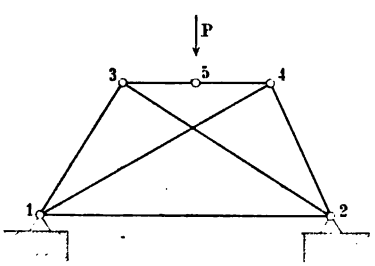
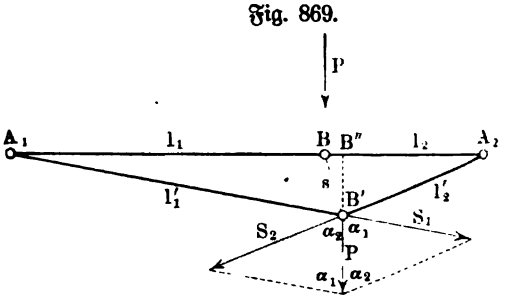


Fig. 869.



Das oben entwickelte Verfahren für die Behandlung statisch-unbestimmter Träger (Beseitigung von Stab $\overline{54}$ oder $\overline{53}$ u. s. w.) führt auch hier zum Ziele.

Entsprechende Betrachtungen gelten für beliebige nachgiebige Fachwerke, bei denen Stäbe nur durch Kräfte innerhalb ihrer Achsen beansprucht werden.

Treten in einem nachgiebigen Fachwerk, unter der Voraussetzung, daß es als starr angesehen wird, Stabkräfte von unendlich-großem Werte auf, so geht das Fachwerk thatsächlich infolge der Formänderungen des Materials in ein statisch-bestimmtes Fachwerk über, aber die Gestalt dieses statisch-bestimmten Fachwerks ist nur mit Hülfe der eingetretenen Formänderungen bestimmbar. Wir erläutern das wieder an Fig. 858 b, welche für den vorliegenden Zweck als Fig. 869 weiter ausgeführt ist.

Führt man die Stabkräfte von den Werten S_1 und S_2 ein, so ist

$$l'_1 = l_1\left(1 + \frac{S_1}{f_1} \cdot \frac{1}{E}\right) \quad \text{und} \quad l'_2 = l_2\left(1 + \frac{S_2}{f_2} \cdot \frac{1}{E}\right),$$

falls man die Querschnitte der Stäbe bezw. durch f_1 und f_2 und den Elasticitätsdruck des Materials durch E bezeichnet.

Anderseits gelten für die Stabkräfte von den Werten S_1 und S_2 die Beziehungen

$$S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 = P \quad \text{und} \quad S_1 \sin\alpha_1 = S_2 \sin\alpha_2,$$

welche in zwei Gleichungen für S_1 und S_2 übergehen, falls man die Funktionen

von α_1 und α_2 aus den durch die Höhe $B'B''$ gebildeten Teildreiecken $B'B''A_1$ und $B'B''A_2$ mit Hülfe von $A_1A_2 = l_1 + l_2$, l_1' und l_2' bestimmt.

Bei symmetrischer Konstruktion ($l_1 = l_2 = l$ und $f_1 = f_2 = f$) ist $S_1 = S_2 = S$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so daß hier die eine Gleichung

$$2\,S\cos\alpha = P$$

zur Bestimmung der Stabkräfte genügt, während außerdem $s^2 = \overline{l'}^2 - l^2$ und $\cos\alpha = \frac{s}{l'}$ ist. Man hat demnach in diesem Falle

$$2\,Ss = 2\,S\sqrt{\overline{l'}^2 - l^2} = P\,.\,l'.$$

Für $l' = l + \lambda$ und $\lambda = \frac{Sl}{fE}$ folgt daraus

$$\frac{2\,\lambda f E}{l}\sqrt{2\,l\lambda + \lambda^2} = P(l + \lambda)$$

oder, falls man $\frac{P}{2\,Ef} = m$ setzt,

$$\lambda^4 + 2\,l\lambda^3 - m^2l^2\lambda^2 - 2\,m^2l^3\lambda - m^2l^4 = 0.$$

Um eine angenäherte Lösung dieser Gleichung zu erhalten, beachten wir, daß in $\sqrt{2\,l\lambda + \lambda^2}$ das quadratische Glied λ^2 gegen $2\,l\lambda$ vernachlässigt werden kann, wodurch die Gleichung für λ die Form

$$\lambda^3 - \tfrac{1}{2}m^2l\lambda^2 - m^2l^2\lambda - \tfrac{1}{2}m^2l^3 = 0$$

annimmt. Da $S = \frac{\lambda f E}{l} = \frac{1}{2}\frac{P}{l}\cdot\frac{\lambda}{m}$ für beliebige Werte von P und l relativ-groß ist, so ist $\frac{\lambda}{m}$ relativ-groß; schreiben wir demgemäß die Gleichung für λ als

$$\lambda\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - \tfrac{1}{2}l\lambda^2 - l^2\lambda - \tfrac{1}{2}l^3 = 0,$$

so ist ersichtlich, daß die beiden Mittelglieder gegenüber den beiden Außengliedern vernachlässigt werden können. Demnach ist

$$\lambda^3 \sim l^3\cdot\frac{m^2}{2} \quad \text{und} \quad \lambda \sim \tfrac{1}{2}l\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2f^2}}.$$

Daraus folgt weiter

$$S \sim \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{P^2fE} \quad \text{und} \quad s \sim l\sqrt[3]{\frac{P}{Ef}}.$$

Diese Behandlung der durch Fig. 869 bezeichneten Aufgabe gilt auch für ein Seil A_1A_2, das in der Mitte durch $[P]$ belastet wird.

200. Ebene Fachwerkträger unter dem Einfluß beweglicher Belastungen. Wenn sich eine Last über einen Fachwerkträger bewegt, so stellt man die entsprechende Änderung der Reaktionen der Auflagerung und der Stabkräfte am besten wieder durch Einflußlinien (vergl. S. 1032) dar.

Wir erläutern dies gemäß Fig. 870 (a. f. S.), in welcher eine Fahrbahn durch einfache senkrechte Zwischenträger mit Knoten des statisch-bestimmten

Fachwerks CD verbunden ist, und zwar mit Knoten auf dessen oberem Rande, der als Obergurt (O) bezeichnet wird, während der untere Rand Untergurt (U) genannt wird.

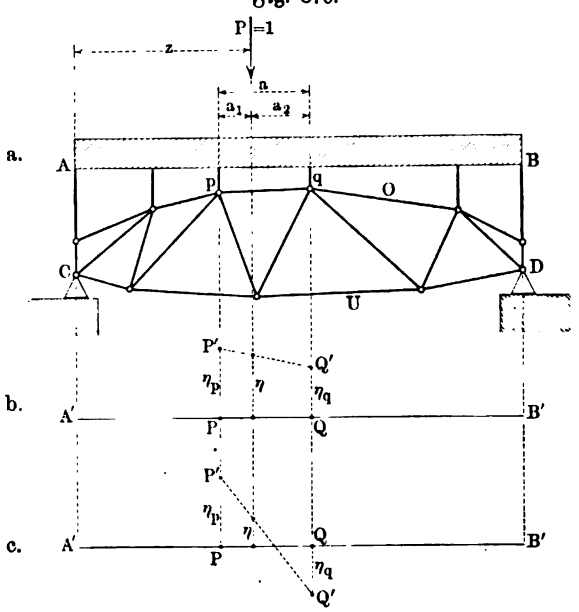
Wenn sich eine Last vom Werte 1 über die Fahrbahn bewegt, so erzeugt sie bei jeder Stellung in einem bestimmten Stabe, für welchen die Einflußlinie bestimmt werden soll, eine bestimmte Stabkraft. Hat diese für die Stellung der Last 1 über zwei benachbarten Knoten p und q bezw. die Werte η_p und η_q, so entsteht beim Auftragen dieser Werte als Ordinaten ein Bild, wie es Fig. 870 b für den Fall zeigt, daß die Stabkraft für die Belastung von p und q dasselbe Vorzeichen (beide Mal Zug oder beide Mal Druck) hat, während Fig. 870 c das entsprechende Bild für einen Wechsel des Vorzeichens darstellt.

Nimmt die Last eine Zwischenstellung ein, bei welcher das Fach $p \ldots q$, dessen Länge a sein mag, in die Strecken a_1 und a_2 zerfällt, so wird p durch die Kraft $\frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot 1$ und q durch die Kraft $\frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot 1$ beansprucht, so daß die Stabkraft η des belasteten Stabes für die Zwischenstellung in Fig. 870 b bezw. in Fig. 870 c gegeben ist als

$$\eta = \eta_p \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} \pm \eta_q \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2},$$

d. h. η ist die Strecke, welche $P'Q'$ auf der Vertikalen der Belastung abschneidet.

Fig. 870.



Dieselbe Betrachtung gilt nicht bloß für die Stabkräfte, sondern auch für die Auflagerreaktionen bezw. deren Komponenten.

Die Einflußlinien für alle diese Kräfte sind demnach Streckenzüge, deren Ecken auf den Vertikalen der Knoten liegen, welche die Belastung aufnehmen.

Infolgedessen hat man nur für die Stellungen der Last 1 über diesen Knoten die Werte einer Stabkraft u. s. w. zu bestimmen, um deren Einflußlinie zu erhalten.

Wählen wir z. B. einen Stab mn des Untergurtes (U) aus, so ist zur Bestimmung von dessen Stabkraft S gemäß dem Schnitte MN oder $M'N'$ nach der Ritterschen

Methode der Punkt E des Obergurtes als Drehpunkt zu wählen. Vergl. Fig. 871.

Man hat dann bei Wahl des linken Trägerstücks für Gleichgewicht

$$-S \cdot e + Mo = 0 \quad \text{oder} \quad S \cdot e = Mo,$$

falls Mo die, dem Schnitte MN oder $M'N'$ entsprechende Summe der Momente der äußeren Kräfte für E als Drehpunkt bezeichnet, und zwar sind diese äußeren Kräfte hier durch eine, über irgend einem Knoten stehende Belastung vom Werte 1 hervorgerufen.

Hat der Knoten, über dem die Last 1 steht, von AC den Abstand z und von BD den Abstand $l - z$, so haben die Reaktionen in A und B bezw. die Werte $\frac{l-z}{l} \cdot 1$ und $\frac{z}{l} \cdot 1$.

Für den Schnitt MN ist bei Belastung eines links von E gelegenen Knotens

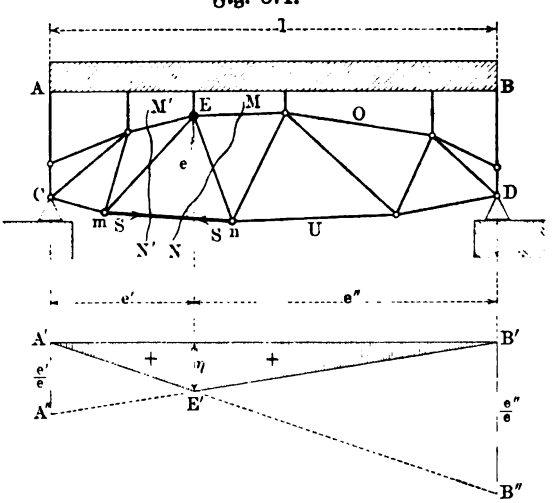
$$Mo = +\frac{l-z}{l} \cdot 1 \cdot e' - 1(e' - z)$$

und bei Belastung eines rechts von E gelegenen Knotens

$$Mo = +\frac{l-z}{l} \cdot 1 \cdot e'.$$

Für $z = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $Mo = 0$ und $S = 0$, für $z = l$ folgt aus der zweiten Gleichung $Mo = 0$ und $S = 0$, für $z = e'$ folgt aus beiden Gleichungen $Mo = \frac{l-e'}{l} \cdot e' = \frac{e' \cdot e''}{l}$ und $S = \frac{e' \cdot e''}{e} \cdot \frac{1}{l}$.

Fig. 871.



Da Mo und S linear durch z bestimmt sind und da S im Stabe stets positiv ist, so ist die graphische Darstellung von S gemäß obigen Gleichungen die gebrochene Gerade $A'E'B'$, welche Fig. 871 b darstellt, für deren Konstruktion man $A'A'' = \frac{e'}{e}$ und $B'B'' = \frac{e''}{e}$ zu machen hat.

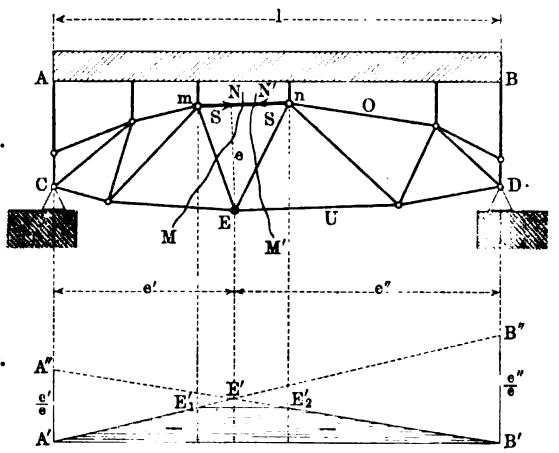
Zunächst geben nur die Punkte der gebrochenen Geraden, welche auf den Vertikalen der belasteten Knoten liegen, Ordinaten der gesuchten Einflußlinie; da aber nach dem oben abgeleiteten Satze die Einflußlinie zwischen den Knoten geradlinig verläuft, so stellen alle Punkte der gebrochenen Geraden solche Ordinaten dar,

d. h. die gebrochene Gerade $A'E'B'$ ist die gesuchte Einflußlinie für den Stab mn.

Da diese Betrachtung für alle Stäbe des unbelasteten Untergurtes (U) gilt, so bezeichnet man diese Linie bezw. die durch sie bestimmte Fläche wohl auch kurz als U-Linie bezw. U-Fläche.

Für einen Stab mn des belasteten Obergurtes (O) gelten zunächst dieselben Betrachtungen gemäß Fig. 872, wobei der Punkt E des Untergurtes als Drehpunkt auftritt. Da S im Stabe hier stets negativ ist, so geben demgemäß die Punkte der gebrochenen Geraden $A'\overline{E}'B'$, welche auf Vertikalen belasteter Knoten liegen, Ordinaten der gesuchten Einflußlinie, also auch z. B. die Punkte E_1' und E_2'; da aber die Einflußlinie für das, durch mn bezeichnete Fach zwischen E_1' und E_2' geradlinig verlaufen muß, so ist hier die zweifach gebrochene Gerade $A'E_1'E_2'B'$ die gesuchte Einflußlinie für den Stab mn.

Fig. 872.



Da diese Betrachtung für alle Stäbe des belasteten Obergurtes (O) gilt, so bezeichnet man diese Linie bezw. die durch sie bestimmte Fläche wohl auch kurz als O-Linie bezw. O-Fläche.

Liegt E' in Fig. 872 auf einer Vertikalen eines belasteten Knotens, was nur eintritt, wenn E auf einer solchen liegt, so ist die Einflußlinie auch für den belasteteten Obergurt durch die einfach gebrochene Gerade $A'E'B'$ gegeben. Dies tritt ein bei den sogen. Ständerfachwerken, in welchen die Stäbe zwischen den Gurten, die sogen. Wandglieder (Streben), senkrecht verlaufen.

Um die Einflußlinie für ein Wandglied (Strebe) zu bestimmen, betrachten wir die Strebe mn in Fig. 873 gemäß dem Schnitte MN. Für E als Drehpunkt gilt bei Lasten vom Werte 1, die über Knoten links von m liegen, falls der belastete Knoten den Abstand z von AC hat,

$$Mo = -\frac{l-z}{l} \cdot 1 \,.\, e' + 1(e' + z) = +z\frac{l+e'}{l}$$

und für entsprechende Lasten rechts von m ebenso

$$Mo = -\frac{l-z}{l} \cdot 1 \,.\, e'.$$

Die erste Gleichung gilt für $z = 0 \ldots p$, falls m den Abstand p von AC hat, während die zweite Gleichung für $z = p' \ldots l$ gilt, falls der

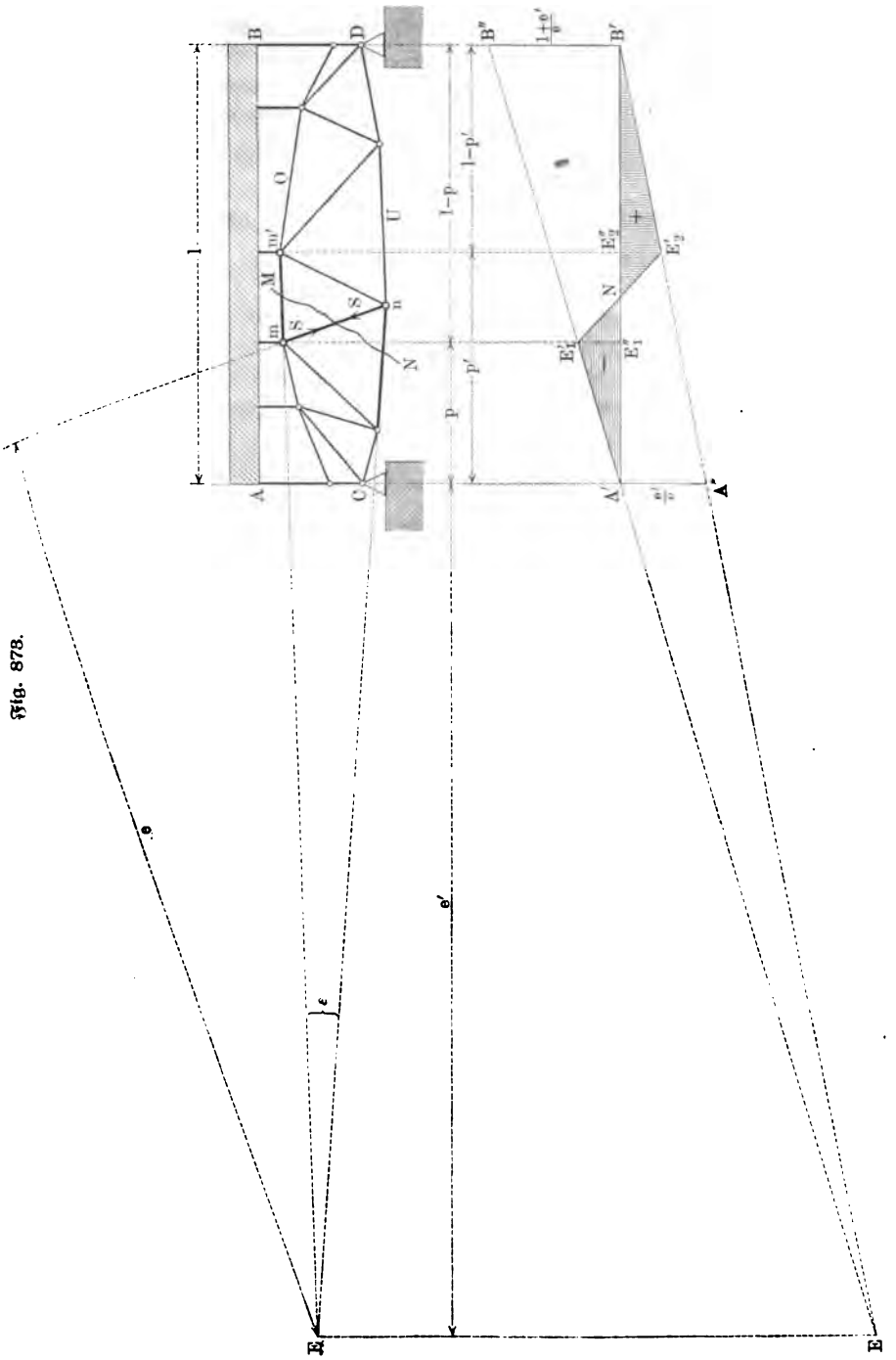


Fig. 878.

auf m folgende Knoten m' von AC den Abstand p' hat. Man sieht, daß $Mo = -e \cdot S$ im ersten Falle positive, im zweiten Falle negative Werte liefert, d. h. also S im Stabe für Belastungen von A aus bis zum Knoten m negativ und für Belastungen vom Knoten m' aus bis B positiv ist.

Für die Vertikale von m ist $Mo = p \cdot \frac{l + e'}{l}$ und $S = -\frac{p(l + e')}{l \cdot e}$, während für die Vertikale von m' gilt $Mo = -\frac{l - p'}{l} \cdot e'$ und $S = +\frac{(l - p')e'}{l.e}$.

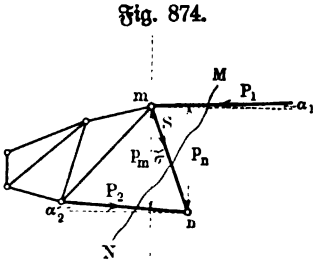
Für $B'B'' = \frac{l + e'}{e}$ giebt $A'B''$ und für $A'A'' = \frac{e'}{e}$ giebt $B'A''$ die entsprechende graphische Darstellung, so daß $A'E_1'$ und $E_2'B'$ Stücke der gesuchten Einflußlinie geben, welche zwischen den Knoten m und m' durch die Strecke $E_1'E_2'$ abgeschlossen ist, so daß sie sich als $A'E_1'NE_2'B'$ darstellt. Die Stelle N, in deren Vertikalen eine Belastung in der Strebe eine Stabkraft vom Werte Null hervorruft, heißt **Einfluß-Nullpunkt**; man hat

$$E_1''N : NE_2'' = E_1'E_1'' : E_2'E_2'' = \frac{p(l + e')}{l.e} : \frac{(l - p')e'}{l.e} = p(l + e') : e'(l - p')$$

und infolgedessen läßt sich N auch leicht am Träger selbst konstruieren (vergl. dazu S. 1041).

Die behandelte Strebe mn fällt nach rechts ab. Für eine nach links abfallende Strebe führt die Untersuchung zu einem entsprechenden Ergebnis, während senkrechte Streben (Ständer) als Grenzfälle von rechts abfallenden oder von links abfallenden Streben betrachtet werden können, wobei auch $E_1'E_2'$ in Fig. 873 vertikal wird (vergl. S. 1034). **Dabei zeigt sich, daß jede Strebe bei einem Schnitt MN durch Lasten des Trägerstückes, dem ihr unterer Endpunkt angehört, auf Zug, und durch Lasten des Trägerstückes, dem ihr oberer Endpunkt angehört, auf Druck beansprucht wird.**

Fig. 874.



Für die Stabkraft S einer Strebe gilt übrigens gemäß Fig. 874, falls man das Gleichgewicht am Knoten m betrachtet,

$$S \sin\sigma + P_2 \cos\alpha_2 - P_1 \cos\alpha_1 = 0,$$

weil sich die Horizontalkomponenten aller inneren Kräfte zerstören müssen, solange die äußeren Kräfte in Vertikalen wirken.

Bezeichnet man das Moment Mo für n als Drehpunkt mit Mo_n und für m als Drehpunkt mit Mo_m, so ist

$$Mo_n - p_n(P_1 \cos\alpha_1) = 0 \quad \text{und} \quad Mo_m - p_m(P_2 \cos\alpha_2) = 0,$$

falls p_n und p_m die Abstände von n und m auf ihrer Vertikalen bezeichnen, d. h. man hat

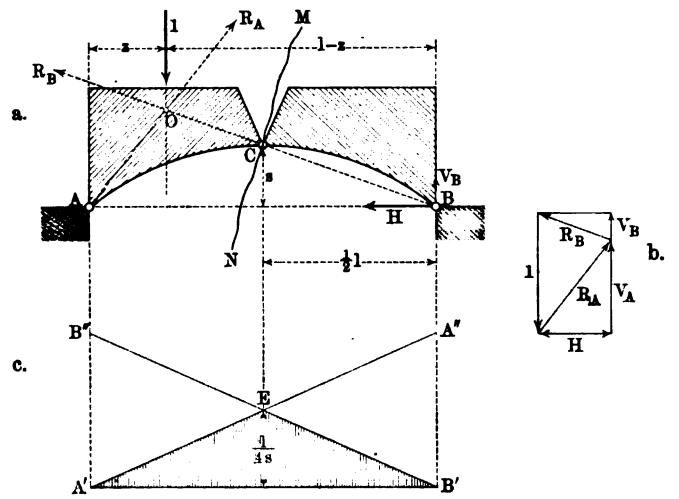
$$S = \frac{1}{\sin\sigma}\left[\frac{Mo_n}{p_n} - \frac{Mo_m}{p_m}\right].$$

Diese Gleichung gilt für beliebige schiefe Lagen von mn, auch in Bezug auf das Vorzeichen von S.

Gemäß vorstehender Betrachtungen lassen sich die Untersuchungen über den Einfluß beweglicher Lasten auf S. 1032 unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen.

Nimmt der Untergurt des Fachwerks die Belastung auf, so gelten entsprechende Überlegungen.

Fig. 875.



Ebenso lassen sich die Einflußlinien für die Reaktionen der Auflager bezw. für deren Komponenten leicht herstellen.

So sind z. B. bei der Fachwerkkonstruktion der Fig. 875 a gemäß Fig. 875 b die Werte R_A und R_B leicht zu bestimmen (vergl. S. 524), woraus zunächst $H_A = H_B = H$ folgt, so daß V_A und V_B zu bestimmen sind, wie bei einem Zweistützenträger. Man hat also

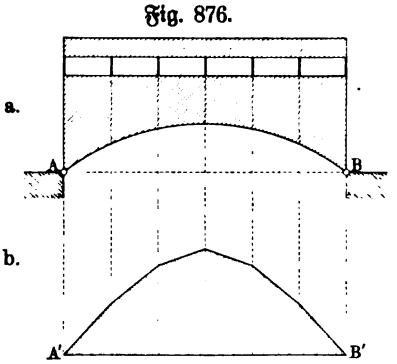
$$V_B = \frac{z}{l} \cdot 1 \quad \text{und} \quad V_A = \frac{l - z}{l} \cdot 1.$$

Setzt man die Momentengleichung, dem Schnitte MN entsprechend, für das rechte Trägerstück an, so liefert die vom linken Trägerstück in C übertragene Kraft keinen Beitrag zum Momente, falls man C zum Drehpunkte nimmt. Es ist dann

$$+ s.H - \frac{l}{2} \cdot V_B = 0 \text{ oder } H = \frac{z}{2s},$$

d. h. bei linksseitiger Belastung gilt für die linke Seite für $z = 0 \cdots \frac{l}{2}$ für H die Gleichung $H = \frac{z}{2s}$, so daß $A'E$ die entsprechende Einflußlinie ist (vergl. Fig. 875 c). Wegen der Symmetrie ist $A'EB'$ die Einflußlinie für H bei der ganzen Konstruktion.

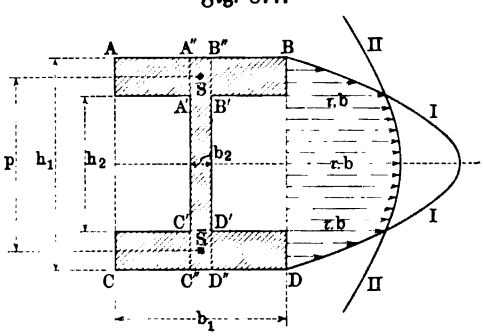
Fig. 876.



Alle diese Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf statisch-unbestimmte Träger ausdehnen, nur ist dann die Bestimmung der Stabkräfte bezw. Reaktionen verwickelter. Beseitigt man z. B. in Fig. 875 das Scheitelgelenk C, so daß ein Träger gemäß Fig. 876a (a. v. S.) entsteht, so entsteht für diesen statisch-unbestimmten Träger, falls die Belastung außerdem durch Zwischenträger aufgebracht wird, eine H-Fläche, wie sie Fig. 876b zeigt.

201. Vollwandige Träger als Grenzgestalten von ebenen Fachwerkträgern. Denkt man sich die Dreiecke eines einfachen Fachwerks der Ebene unendlich klein, so geht dasselbe an der Grenze in einen plattenförmigen Körper über. Sind die Gurte des Fachwerks durch Stäbe von relativ-großem, die Wandglieder durch Stäbe von relativ-kleinem Querschnitte gebildet, so entsteht dabei ein Körper, welcher die Gestalt einer ebenen, beliebig begrenzten Platte (Wand) mit verstärktem Rande (Gurte) hat.

Fig. 877.



Waren die Mittellinien der Gurte des Fachwerks parallele Geraden, so gelangt man dabei zurück zu geraden prismatischen Balken, waren sie nicht parallel, so gelangt man dabei zu Balken von veränderlichen Querschnitten, wobei die Querschnitte in beiden Fällen die mehr oder minder deformierte Gestalt der Fig. 877 zeigen. Während der Steg $A'B'C'D'$ des in Fig. 877 dargestellten Querschnittes, welcher der Wand des Balkens entspricht, gegenüber den anderen beiden Teilen, welche den Gurten entsprechen, zu dem Trägheitsmomente des ganzen Querschnittes und demnach auch zu dem Momente der inneren Kräfte um so weniger beiträgt, je dünner er ist, wird anderseits die Vertikalkraft vornehmlich von dem Stege aufgenommen; letzteres ist aus der graphischen Darstellung der Größe $\tau \cdot b$ in Fig. 877 ersichtlich, welche durch die beiden Parabeln I und II bestimmt wird, wobei I für sich dem vollen Querschnitte $ABCD$ und II für sich einem Querschnitte $A''B''C''D''$ entsprechen würde; in der Höhe der Gurte hat man $b = b_1$, in der Höhe des Steges $b = b_2$ zu setzen, um τ selbst zu erhalten.

Mit einer gewissen Annäherung darf man also hier annehmen, daß die Gurte allein das Moment der äußeren Kräfte aufnehmen, während die Wand allein die Vertikalkraft aufnimmt.

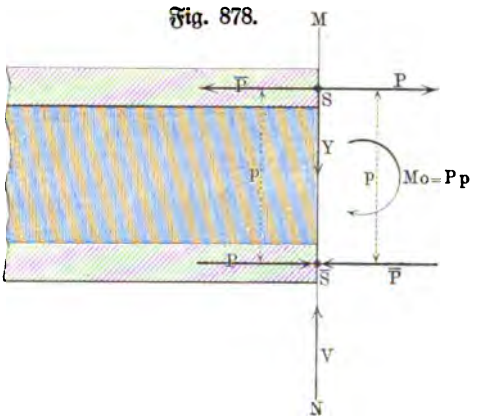
Innerhalb dieser Annäherung ist es zulässig, eine gleichmäßige Verteilung der Spannung $[\sigma]$ über den Gurtquerschnitt $b_1 (h_1 - h_2)$ anzunehmen, während ferner Fig. 877 zeigt, daß auch die Verteilung der Schubspannung $[\tau]$ über den Wandquerschnitt $b_2 h_2$ eine ziemlich gleichmäßige ist. Giebt man noch dem Moment der äußeren Kräfte den Arm p, welcher mit dem Abstande des Schwerpunktes der Gurte übereinstimmt (vergl. Fig. 877 und

Fig. 878), so daß es die Form $P \,.\, p$ erhält, so gilt demnach für $Mo = Pp$ und bei einer Vertikalkraft V

$$\sigma \sim \frac{Mo}{p\, b_1 (h_1 - h_2)} \quad \text{und} \quad \tau \sim \frac{V}{b_2 h_2}.$$

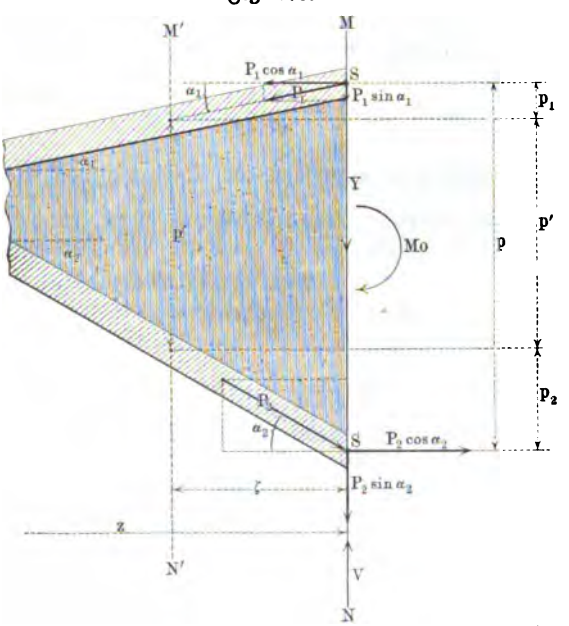
Bei einem solchen Träger, welcher gewissermaßen in die Gurte und in die Wand zerfällt, kann man wie bei einem Fachwerk von den Stabkräften $[\overline{P}]$ und $[P]$ innerhalb der Gurte sprechen; man hat dabei (vergl. Fig. 878) der Kraft $[P]$ am Punkte S den Punkt $\overline{S}$ als Drehpunkt (Knoten) und ebenso der Kraft $[\overline{P}]$ am Punkte $\overline{S}$ den Punkt S als Drehpunkt (Knoten) zuzuordnen, wobei $P = \frac{Mo}{p}$ ist; außerdem ist innerhalb der Blechwand $Y = V$.

Fig. 878.



Träger, welche die bezeichnete Gestalt haben, werden im Gegensatz zu den entsprechenden Fachwerken vollwandige Träger (Blechträger) mit parallelen Gurten genannt, wenn sie aus einer dünnen Blechwand und Kopfplatten (Gurten) durch Winkeleisen (Gurtwinkel) zusammengefügt sind, wobei die Winkeleisen auch zugleich die Kopfplatten (Gurte) bilden können.

Fig. 879.



Man kann nun die obige Betrachtung auch auf verjüngte Balken von ähnlicher Bildung übertragen, welche als vollwandige Träger (Blechträger) mit nicht parallelen Gurten zu bezeichnen sind; dabei ist aber zu bemerken, daß dann die Vertikalkraft zum Teil von den Gurten aufgenommen wird. Hier ist gemäß Fig. 879 für äußere Kräfte $[V]$ und $[Mo]$,

falls $[P_1]$, $[P_2]$ und $[Y]$ die inneren Kräfte bezeichnen, zum Gleichgewichte erforderlich

$$P_1 \cos\alpha_1 = P_2 \cos\alpha_2$$
$$Mo = p\,(P_1 \cos\alpha_1) = p\,(P_2 \cos\alpha_2)$$
$$Y = V - P_1 \sin\alpha_1 - P_2 \sin\alpha_2.$$

Man hat also für die Kräfte $[P_1]$ und $[P_2]$ innerhalb der Gurte

$$P_1 = \frac{Mo}{p \cos\alpha_1} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{Mo}{p \cos\alpha_2}$$

anzusetzen, woraus noch

$$Y = V - \frac{Mo}{p}\,(tng\,\alpha_1 + tng\,\alpha_2)$$

folgt.

Betrachtet man einen Schnitt $M'N'$ im Abstande ζ von MN, der der Höhe p' entspricht, so ist $tng\,\alpha_1 = \frac{p_1}{\zeta}$ und $tng\,\alpha_2 = \frac{p_2}{\zeta}$ und demnach

$$tng\,\alpha_1 + tng\,\alpha_2 = \frac{p_1 + p_2}{\zeta} = \frac{p - p'}{\zeta}$$

und man hat also auch

$$Y = V - \frac{Mo}{p} \cdot \frac{p - p'}{\zeta}.$$

Faßt man p als eine Funktion $\varphi(z)$ von z auf, so geht $\frac{p - p'}{\zeta}$ für $lim\,\zeta = 0$ in die Ableitung $\varphi'(z)$ über; da anderseits auch V, falls man $Mo = f(z)$ setzt, durch $f'(z)$ dargestellt werden kann, so ist für $lim\,\zeta = 0$

$$Y = f'(z) - \frac{f(z)}{\varphi(z)} \cdot \varphi'(z) = \frac{f'(z)\,\varphi(z) - f(z)\,\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Bildet man anderseits die Ableitung von $\Phi(z) = \frac{Mo}{p} = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$, so ist diese $\frac{\varphi(z) f'(z) - f(z)\varphi'(z)}{\varphi^2(z)}$, d. h. man hat

$$Y = \varphi(z) \cdot \Phi'(z) = p \cdot \Phi'(z)$$

für $\Phi(z) = \frac{Mo}{p}$.

Solange $\Phi(z) = \frac{Mo}{p}$ einen konstanten Wert hat, hat die innere Kraft Y, welche man als Wandscherkraft bezeichnet, demnach den Wert Null.

Bei einem gleichmäßig belasteten Zweistützenträger giebt die graphische Darstellung von Mo eine Parabel (vergl. S. 953), und infolgedessen ist für einen solchen $Y = 0$, falls p an jeder Stelle mit der Ordinate dieser Parabel übereinstimmt. Soll der entsprechende Träger ein Balken mit gerader Achse sein, so hat man also für dessen Konstruktion von einer wagerechten Achse aus, senkrecht zu dieser nach oben und nach unten $\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}Mo$ aufzutragen, wobei ein Träger gemäß Fig. 880 entsteht, dessen beide sym-

metrisch gebogenen Gurte Parabeln als Mittellinien haben, während zwischen ihnen eine entsprechend geschnittene Blechwand die Füllung übernimmt.

Neben diesen vollwandigen Parabelträgern konstruiert man auch vollwandige Parabelträger gemäß Fig. 881 a und b, indem man entweder die unteren Gurte gerade macht (a) oder zwei verschiedene Parabeln auf derselben Seite von AB zu einer Sichel (b) verbindet. Bei beiden Konstruktionen ist die Bedingung $p = Mo$ erfüllt, aber die Mittellinien dieser Träger sind gekrümmt, so daß sie überhaupt nicht mehr zu den geraden Balken gehören. Trotzdem läßt sich obige Betrachtung auch auf sie anwenden, da bei ihr weder die Festigkeitsgleichung noch die Formänderungsgleichung aus der Theorie des geraden Balkens benutzt wird; diese Anwendung ist überhaupt gestattet, solange die gemachten einfachen Voraussetzungen (Zerfall in Gurte und Wand und gleichmäßige Verteilung der Spannungen) mit der Erfahrung in hinreichender Übereinstimmung sind.

Fig. 880.

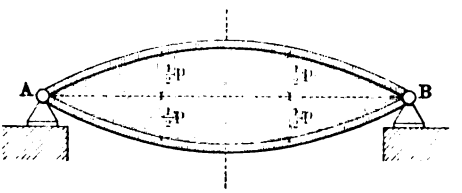
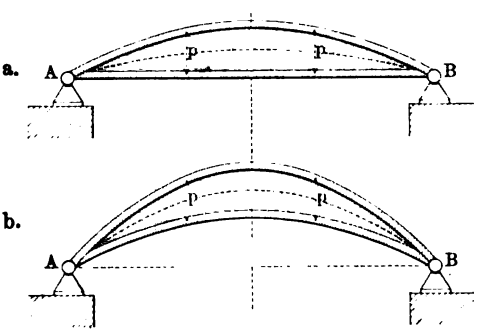


Fig. 881.



Ist dies nicht mehr der Fall, so müssen Trägerformen, wie die in Fig. 881 a und b dargestellten mit Hülfe der Theorie des krummen Balkens behandelt werden, welche im nächsten Abschnitte entwickelt werden soll.

Bei den gleichmäßig belasteten Parabelträgern haben die Stabkräfte (Gurtkräfte) für verschiedene Stellen der Gurte nahezu dieselben Werte, und zwar nehmen sie von der Mitte aus nach den Enden um relativ kleine Größen zu. Eine geringe Änderung in der Krümmung des in Fig. 880 dargestellten Parabelträgers führt diesen in den Pauliſchen Träger über, bei welchem die Stabkräfte (Gurtkräfte) bei gleichmäßiger Belastung für verschiedene Stellen der Gurte in aller Strenge dieselben Werte haben.

Da man die Stabkräfte (Gurtkräfte) solcher vollwandigen Träger so ansehen kann, als wenn sie Stabkräfte in den Gurten eines Fachwerks wären, und da man ebenso ihre Wandscherkraft als Stabkraft eines senkrecht stehenden Diagonalstabes (Ständer) eines Fachwerks betrachten kann, so stimmen die Einflußlinien für diese Kräfte überein mit den Einflußlinien, welche auf S. 1181 u. f. behandelt wurden; man hat dabei nur zu beachten, daß die Stabkräfte der Gurten für jede Stelle tangential gerichtet sind.

Wir gehen noch etwas näher auf die Einflußlinien für die Wandscherkraft ein, welche für die Fig. 873 entsprechende Gestalt des Trägers mit der dort entwickelten Einflußlinie bei lotrechter Stellung von mn genau

übereinstimmt und somit der Einflußlinie für die Vertikalkraft eines Zweistützenträgers entspricht. Für die in Fig. 882 dargestellte Form des Trägers, bei welcher E innerhalb der Trägerfläche liegt, gilt für Belastung, links von dem, links von der Mitte gelegenen Schnitte MN für E als Drehpunkt, da die Auflagerreaktion für AC wieder $\frac{l-z}{l} \cdot 1$ ist,

$$+\frac{l-z}{l} \cdot 1 \,.\, e' - 1(e'-z) - Y \,.\, e = 0 \quad \text{oder} \quad Y = \frac{l-e'}{l \,.\, e} \cdot z,$$

während für Belastungen, rechts vom Schnitte MN, für E als Drehpunkt,

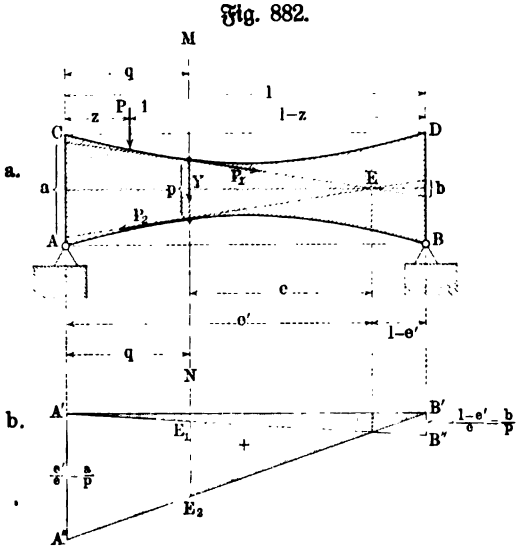
$$\frac{l-z}{l} \cdot 1 \,.\, e' - Y \,.\, e = 0 \quad \text{oder} \quad Y = \frac{l-z}{l \,.\, e} \cdot e'$$

ist, so daß Y in beiden Fällen positiv ist. Die erste Gleichung gilt für $z = 0 \ldots q$ und die zweite für $z = q \ldots l$, falls der Schnitt MN den Abstand q von AC hat. Es ist also hier in Fig. 882b mit

$$A'A'' = \frac{e'}{e} \text{ und } B'B'' = \frac{l-e'}{l}$$

zu konstruieren; schneiden die Tangenten für den Schnitt MN auf den Auflager-Vertikalen bezw. die Strecke a und b ab, so ist $\frac{e'}{e} = \frac{a}{p}$ und $\frac{l-e'}{e} = \frac{b}{p}$. Die Einflußlinie ist also hier $A'E_1E_2B'$, wobei $E_1E_2 = 1$ ist. Liegt der Schnitt MN rechts von der Mitte, so ist Y stets negativ.

Fig. 882.



Während also für Träger gemäß Fig. 873 die Regel bestehen bleibt (vergl. S. 1033), daß für Y das Maximum und Minimum auftritt, wenn der Träger links oder rechts von MN unbelastet ist, tritt für Träger gemäß Fig. 882 das Maximum von Y bei voller Belastung auf.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die vollwandigen Träger der bezeichneten Art als einfache Fachwerke mit unendlich-vielen und unendlich-dicht gelagerten Knoten aufgefaßt werden können.

Während bei den Fachwerken die Stabkräfte in den Gurten von Stab zu Stab sprungweise veränderlich sind, ist ihre Änderung bei den entsprechenden vollwandigen Trägern stetig, und Entsprechendes gilt auch für die Stabkräfte der Wandglieder im Vergleich mit der Wandscherkraft Y der vollwandigen Träger.

Infolgedessen kann man gelegentlich Fachwerkträger mit Vorteil zunächst als vollwandige Träger behandeln, wobei die Über-

tragung der Ergebnisse für die Gurte unmittelbar gegeben ist, während die Stabkräfte für die Wandglieder aus dem Werte der Wandscherkraft Y von Fall zu Fall hergeleitet werden müssen.

202. Die Behandlung räumlicher Fachwerke. Die Theorie des ebenen Fachwerks reicht auch aus, um die räumlichen Fachwerke zu behandeln [1]), welche für die Praxis von Bedeutung sind.

Solche räumlichen Fachwerke entstehen zunächst wegen der Notwendigkeit, ebene Fachwerkträger gegen das Heraustreten ihrer Stäbe aus der Konstruktionsebene zu sichern, wie es z. B. oft wegen des Winddruckes erforderlich ist, oder mit Rücksicht auf das Ausknicken eines ganzen Zuges von gedrückten Stäben.

Außerdem tritt das räumliche Fachwerk als selbständige Konstruktion auf bei Krangerüsten, Kuppeldächern u. s. w.

---

[1]) Vergl. dazu Föppl, Das Fachwerk im Raume bezw. dessen Mechanik, Bd. II, S. 266 f.

Achte Abteilung.

Die Biegung krummer Stäbe.

203. Allgemeines. Die Formeln für die Biegung gerader Stäbe geben auch für Stäbe mit gekrümmter Mittellinie, solange die Krümmung im Verhältnis zur Stablänge eine sehr geringe ist, angenähert richtige Ergebnisse. Diese Annäherung genügt z. B. nicht mehr für den Fall, daß es sich um vollwandige Träger mit gekrümmten Gurten handelt, für welche die Voraussetzungen des Verfahrens im § 201 nicht mehr zulässig sind. Ebenso wenig reichen die Formeln für die Biegung gerader Stäbe aus, um die Beanspruchung und Formänderung von Kettengliedern oder Kettenhaken oder von Federn mit gekrümmter Mittellinie zu beurteilen.

Meist haben die krummen Stäbe, welche in der Technik verwandt werden, eine ebene Kurve als Mittellinie, so daß durch diese eine bestimmte Ebene als Belastungsebene gegeben ist, in Bezug auf welche auch hier ein „Normalfall der Praxis“ eingeführt werden kann.

Bei der Theorie der Federn sind aber auch Stäbe mit gewundenen Mittellinien, welche also nicht ebene Kurven sind, zu betrachten, doch reicht für diese, bei strenger Behandlung sehr verwickelten Fälle im Hinblick auf die Bedürfnisse der Praxis vorläufig noch ein angenähertes Verfahren aus.

204. Der Normalfall der Praxis bei Stäben mit gekrümmter Mittellinie. Wenn der Schwerpunkt einer ebenen Fläche auf einer ebenen Kurve gleitet, so daß dabei die bewegliche Fläche in ihrem Schwerpunkte stets senkrecht zur Kurve bleibt und von deren Ebene stets in einem Hauptschnitte getroffen wird, so entsteht ein besonders einfacher Stab mit gekrümmter Mittellinie.

Wird ein materieller Stab dieser Art von Kräften angegriffen, welche in der Ebene seiner Mittellinie liegen, so lassen sich auf ihn die Untersuchungen, welche im § 145 für den Stab mit gerader Mittellinie durchgeführt wurden, in entsprechender Weise übertragen.

Da die in der Praxis verwandten Stäbe mit gekrümmter Mittellinie in überwiegender Mehrzahl die bezeichneten, verhältnismäßig einfachen Beziehungen darbieten, so sollen diese auch hier unter dem Namen „Normalfall der Praxis“ zusammengefaßt werden.

Dem geraden Stabe gegenüber zeigt sich hier zunächst der Unterschied, daß eine Kraft, welche an einer Stelle A des krummen Stabes senkrecht zu

dessen Mittellinie in deren Ebene angreift, bei der Übertragung an eine andere Stelle B gemäß der Methode der Schnitte dort nicht mehr senkrecht zu der Mittellinie verläuft, wie Fig. 883 zeigt. Demgemäß ist hier neben einem biegenden Momente $[Mo]$ und einer Querkraft $[Q]$, die auf Schub wirkt, im allgemeinen noch eine Kraft $[N]$ zu berücksichtigen, welche zum Querschnitte senkrecht steht.

Wir betrachten zunächst lediglich die Biegung des Stabes. Die naheliegende Annahme, daß auch hier die Mittellinie des Stabes bei der Biegung in der Kraftebene bleibt, hat sich erfahrungsmäßig bewährt, ebenso die weitere Voraussetzung, daß Schichten des Stabes, welche der Kraftebene vor der Biegung parallel waren, dieser auch bei der Biegung parallel bleiben.

Des weiteren sind hier in Bezug auf die Formänderung zwei verschiedene Annahmen gemacht worden, welche beide für die überwiegende Mehrzahl der praktischen Anwendungen zu Ergebnissen führen, welche mit der

Fig. 883.

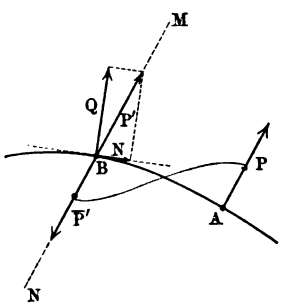
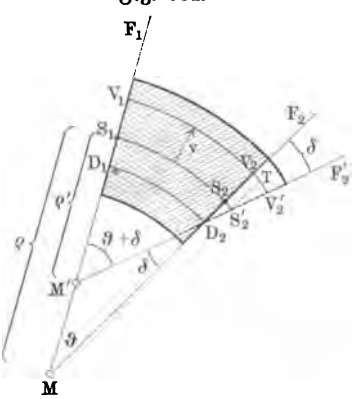


Fig. 884.



Erfahrung in hinlänglicher Übereinstimmung sind, in einzelnen Fällen jedoch auch erhebliche Abweichungen in ihren Ergebnissen zeigen.

Man nimmt entweder an, daß die ursprünglich ebenen Querschnitte auch während der Biegung eben bleiben (Bernoulli), findet aber dann, daß die Biegungsachse eines Querschnittes nicht mehr durch dessen Schwerpunkt geht, oder man nimmt an, daß die Spannungsverteilung nach wie vor dem Ebenengesetze folgt und daß dabei auch die Biegungsachse eines Querschnittes nach wie vor durch dessen Schwerpunkt geht, findet aber dann, daß die Querschnitte nicht mehr eben bleiben können.

In den Aufgaben, welche der Ingenieurbau stellt, und in den meisten Aufgaben, welche der Maschinenbau stellt, ist eine angenäherte Betrachtung, welche mit beiden Annahmen verträglich ist, ausreichend, während bei einzelnen Aufgaben des Maschinenbaus (z. B. Beurteilung der Zughaken) eine genauere Betrachtung erforderlich wird, welche von jeder der beiden Annahmen aus zu anderen Ergebnissen führt.

Die Erfahrung scheint für die Bernoullische Annahme zu sprechen,

für welche sich auch in theoretischer Hinsicht gewichtige Gründe beibringen lassen [1]).

Wir werden infolgedessen der Betrachtung die Annahme von Bernoulli zu Grunde legen und im Anschluß daran die angenäherten Formeln ableiten, welche, beiden Annahmen entsprechend, für die Aufgaben der Praxis meist ausreichen.

Wir betrachten nun in Fig. 884 (a. v. S.) zwei benachbarte Querschnitte F_1 und F_2 vor der Biegung; sie stehen senkrecht auf der Ebene der Mittellinie $S_1 S_2$, welche zur Ebene der Zeichnung genommen ist, und schneiden sich unter dem Winkel ϑ in der Krümmungsachse, welche in M senkrecht zur Ebene der Zeichnung durchtritt, so daß $S_1 M = S_2 M = \varrho$ der gegebene Krümmungsradius der Mittellinie für die betrachtete Stelle ist.

Nach vollendeter Biegung schneiden sich die beiden Querschnitte, der Drehung um δ entsprechend, in einer neuen, in M' durchtretenden Krümmungsachse, so daß $S_1 M' = S_2' M' = \varrho'$ jetzt der Krümmungsradius der Mittellinie ist, während die Biegungsachse in D_2 senkrecht durchtritt, so daß die Faserschicht von $D_1 D_2$ keine Dehnung erleidet.

Für die Mittellinie $S_1 S_2$ bezw. die ganze Mittelschicht ist dann die Dehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{S_2 S_2'}{S_1 S_2} = \frac{S_2 S_2'}{\varrho \,.\, arc\,\vartheta},$$

für eine beliebige Schicht, entsprechend $V_1 V_2$, ist ebenso

$$\varepsilon_v = \frac{V_2 V_2'}{V_1 V_2} = \frac{V_2 V_2'}{(\varrho + v) \,.\, arc\,\vartheta}.$$

Trägt man $S_2 S_2'$ durch die Parallele $S_2' T$ zu $S_2 V_2$ auf $V_2 V_2'$ ab, so ist $V_2 V_2' = S_2 S_2' + T V_2'$ und, da $T V_2' = v \,.\, arc\,\delta$ ist, gilt demnach

$$\varepsilon_v (\varrho + v) \,.\, arc\,\vartheta = \varepsilon_0 \varrho \,.\, arc\,\vartheta + v \,.\, arc\,\delta,$$

woraus

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_0 \varrho + v \cdot \dfrac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta}}{\varrho + v}.$$

folgt.

Für die betrachtete Stelle des Balkens hat $\dfrac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta}$ einen bestimmten Wert C, so daß C für alle Betrachtungen innerhalb eines Querschnittes F_1 oder F_2 eine Konstante ist. Man hat also

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_0 \varrho + C v}{\varrho + v} = \varepsilon_0 + (C - \varepsilon_0) \frac{v}{\varrho + v}.$$

Demnach ist bei Gültigkeit des Gesetzes von Hooke

$$\sigma_v = E \,.\, \varepsilon_v = E \left[\varepsilon_0 + (C - \varepsilon_0) \frac{v}{\varrho + v} \right].$$

---

[1]) Vergl. die entsprechenden v. Bachschen Versuche und die Abhandlung von Prandtl (Münchener Naturforscherversammlung 1899).

Bezeichnet man den Querschnitt einer Faser wieder mit φ, so entspricht der Spannung σ_v für eine Faser die Kraft $\varphi \cdot \sigma_v$.

Solange es sich lediglich um die Biegung handelt, muß wieder

$$\Sigma \sigma_v \cdot \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(\sigma_v \cdot \varphi) v = Mo$$

sein, wobei die Summen über den ganzen Querschnitt zu erstrecken sind.

Die erste Gleichung lautet bei Benutzung des für σ_v entwickelten Wertes

$$\varepsilon_0 \Sigma \varphi + (C - \varepsilon_0) \Sigma \frac{v}{\varrho + v} \cdot \varphi = 0,$$

während die zweite ebenso

$$Mo = E\left[\varepsilon_0 \Sigma v \cdot \varphi + (C - \varepsilon_0) \Sigma \frac{v^2}{\varrho + v} \cdot \varphi\right] \quad . \quad . \quad 470)$$

liefert.

Da $\Sigma \varphi = f$ die Fläche des Querschnittes darstellt und da $\Sigma v \cdot \varphi = 0$ ist, weil die Entfernungen v von einer Achse durch S_1 bezw. S_2 aus gemessen werden, so handelt es sich bloß um die Berechnung der beiden Summen

$$A = \Sigma \frac{v}{\varrho + v} \cdot \varphi \text{ und } B = \Sigma \frac{v^2}{\varrho + v} \cdot \varphi.$$

Da $\frac{v^2}{\varrho + v} = v - \frac{v}{\varrho + v} \cdot \varrho$ ist, so ist

$$B = \Sigma v \cdot \varphi - \varrho \cdot A,$$

d. h. man hat, da $\Sigma v \cdot \varphi = 0$ ist,

$$B = -\varrho \cdot A.$$

Berechnet man also A oder B aus dem gegebenen ϱ und aus den gegebenen Abmessungen des Querschnittes, was auch in verwickelteren Fällen jedenfalls durch graphische Methoden zu erreichen ist, so lassen sich die Werte für ε_0 und $C - \varepsilon_0$ bezw. C bestimmen, und damit ist ε_v und $\sigma_v = E \cdot \varepsilon_v$ gegeben.

Da $B = \Sigma \frac{v^2}{\varrho + v} \cdot \varphi$ ist, so ist $\varrho B = \Sigma \frac{v^2 \cdot \varrho}{\varrho + v} \cdot \varphi = \Sigma \frac{v^2 \varphi}{1 + \frac{v}{\varrho}}$

und demnach geht ϱB in das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r$ über für $lim\, \varrho = \infty$, während B selbst für $\varrho = \infty$ den Wert Null annimmt. Da $B = -\varrho \cdot A$, so hat $A = -\frac{B}{\varrho}$ und auch noch $A\varrho$ den Wert Null für $lim\, \varrho = \infty$; dies zeigt auch der Ausdruck $\varrho A = \Sigma \frac{v \cdot \varrho}{\varrho + v} \cdot \varphi = \Sigma \frac{v\varphi}{1 + \frac{v}{\varrho}}$, da $\Sigma v \varphi$ das Massenmoment des Querschnittes für eine Achse durch den Schwerpunkt ist.

Man hat nun zunächst

$$\varepsilon_0 \cdot f + (C - \varepsilon_0) A = 0$$

und

$$Mo = -E\varrho (C - \varepsilon_0) \cdot A$$

und demnach

$$C - \varepsilon_0 = -\frac{Mo}{E\varrho A} = +\frac{Mo}{EB} \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = -\frac{A(C-\varepsilon_0)}{f} = \frac{Mo}{E\varrho f},$$

woraus noch folgt

$$\frac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta} = C = \frac{1}{Ef}\left[\frac{Mo}{\varrho} + \frac{Mo\,.\,f}{B}\right]$$

oder, da $\varrho\,.\,arc\,\vartheta = S_1 S_2$ ist, wofür Δs geschrieben werden mag,

$$arc\,\delta = \frac{1}{Ef}\left[\frac{Mo}{\varrho^2} + \frac{Mo\,.\,f}{B\varrho}\right]\cdot \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 471\,a)$$

Bei Vernachlässigung von $\frac{Mo}{\varrho^2}$ ist

$$arc\,\delta \sim \frac{Mo}{E(B\varrho)}\cdot \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 471\,b)$$

Ferner ergiebt sich nun

$$\varepsilon_v = \frac{Mo}{E(B\varrho)}\cdot\frac{v}{1+\frac{v}{\varrho}} + \frac{Mo}{E\varrho f}$$

und man hat demnach als Festigkeitsgleichung

$$\sigma_v = E\,.\,\varepsilon_v = \frac{Mo}{B\varrho}\cdot\frac{v}{1+\frac{v}{\varrho}} + \frac{Mo}{\varrho f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 472)$$

Man sieht sofort, daß ε_0 nicht verschwindet und daß also die Biegungsachse ($\varepsilon_0 = 0$) nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht; nur für $\varrho = \infty$ wäre $\varepsilon_0 = 0$, d. h. für den Fall der geraden Mittellinie.

Fig. 885.

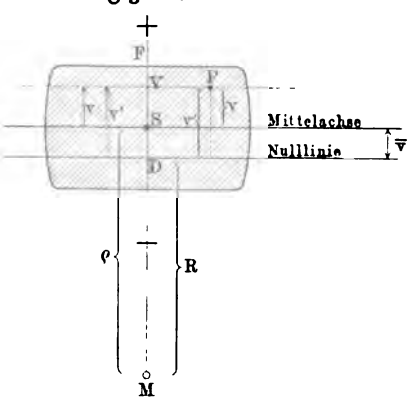
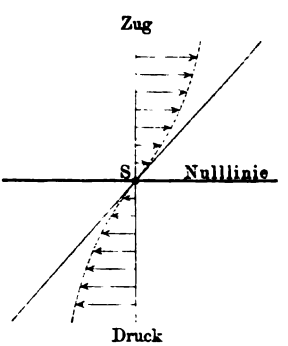


Fig. 886.



Um die Lage der Biegungsachse (Nulllinie) zu finden, hat man ε_v oder σ_v zu annullieren, woraus $\bar{v} = -\varrho\cdot\frac{B}{f\varrho + B}$ folgt, d. h. die Nulllinie liegt um $v = \bar{v}$ entfernt von der durch den Schwerpunkt gehenden Mittellinie, und zwar rückt sie (—) auf M zu.

Bezieht man die Punkte eines Querschnittes auf die Nulllinie (v') statt auf die Mittelachse (v), so ist (vergl. Fig. 885)

$$v' = v + \varrho \frac{B}{f\varrho + B}.$$

Führt man noch den Abstand R der Nulllinie von der Krümmungsachse (M) ein, statt des Abstandes ϱ der Mittelachse von dieser (M), so ist $\varrho + v = R + v'$ und $\varrho = R + \frac{\varrho B}{f\varrho + B}$.

Um ϱ und v für die neue Achse (Nulllinie) durch R und v' zu bestimmen, führt man am besten $A = -\frac{B}{\varrho}$ ein, wodurch sich zunächst

$$v = v' + \varrho \frac{A}{f - A} \quad \text{und} \quad \varrho = R - \varrho \frac{A}{f - A}$$

und demnach auch

$$\varrho = R \cdot \frac{f - A}{f} \quad \text{und} \quad v = v' + R \cdot \frac{A}{f}$$

ergiebt. Mit diesen Werten findet man

$$\varepsilon_{v'} = \frac{Mo}{ER^2(-A)} \cdot \frac{v'}{1 + \frac{v'}{R}} \quad \text{und} \quad \sigma_{v'} = \frac{Mo}{R^2(-A)} \cdot \frac{v'}{1 + \frac{v'}{R}}.$$

Dabei ist $R^2(-A) \sim \mathfrak{T}r$ für relativ-große Werte von R, da

$$R^2(-A) = \varrho^2 \cdot \left(\frac{f}{f - A}\right)^2 \cdot (-A) = (B\varrho)\left(\frac{f}{f - A}\right)^2$$

ist.

Da $\varepsilon_{v'}$ bezw. $\sigma_{v'}$ hier proportional ist zu $\frac{v'}{R + v'}$, so folgt die Verteilung der Dehnungen bezw. Spannungen von der Nulllinie aus nicht dem Ebenengesetze, sie ist vielmehr hyperbolisch (vergl. Fig. 886).

Bildet man noch $\sigma_{w'}$ für die äußerste Faser, so ist

$$\sigma_{v'} = \sigma_{w'} \cdot \frac{v'}{w'} \cdot \frac{R + w'}{R + v'}.$$

Selbstverständlich läßt sich die Gleichung für $\varepsilon_{v'}$ oder $\sigma_{v'}$ unmittelbar ableiten, wenn man von vornherein alles auf die Nulllinie bezieht.

Um auch die Formänderung (ϱ') zu bestimmen, betrachten wir für Fig. 884 die Dehnung ε_0 in der Darstellung

$$\varepsilon_0 = \frac{S_2 S_2'}{S_1 S_2} = \frac{S_1 S_2' - S_1 S_2}{S_1 S_2} = \frac{S_1 S_2'}{S_1 S_2} - 1 = \frac{\varrho' \,.\, arc\,(\vartheta + \delta)}{\varrho \,.\, arc\,\vartheta} - 1,$$

woraus

$$1 + \varepsilon_0 = \frac{\varrho'}{\varrho}\left(1 + \frac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta}\right)$$

folgt.

Da $\frac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta} = C$ und $C = \varepsilon_0 + \frac{Mo}{EB}$ ist, so hat man

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1 + C}{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{C - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{\dfrac{Mo}{EB}}{1 + \dfrac{Mo}{E\varrho f}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{\dfrac{Mo}{E(B\varrho)}}{1 + \dfrac{Mo}{E\varrho f}} \quad \cdots\cdots\cdots 473\,a)$$

Erweitert man $\frac{C - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$ durch $1 - \varepsilon_0$, so erhält man

$$\frac{C - \varepsilon_0 - C \,.\, \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2}{1 - \varepsilon_0^2},$$

woraus, da C und ε_0 sehr kleine Größen sind, bei Streichung der Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{C - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} = C - \varepsilon_0$$

hervorgeht, so daß $1 + \varepsilon_0 \sim 1$ ist. In großer Annäherung ist also

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = 1 + C - \varepsilon_0 = 1 + \frac{Mo}{EB}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{Mo}{E(B\varrho)} \quad \cdots\cdots\cdots 473\,b)$$

Die Gleichung Nr. 473 a) bezw. 473 b) stellt hier die Formänderungsgleichung dar.

Für $\varrho' = \frac{S_1 S_2 (1 + \varepsilon_0)}{arc\,(\vartheta + \delta)}$ und $\varrho = \frac{S_1 S_2}{arc\,\vartheta}$ nimmt diese die Gestalt

$$\frac{arc\,(\vartheta + \delta)}{S_1 S_2 (1 + \varepsilon_0)} = \frac{arc\,\vartheta}{S_1 S_2} + \frac{Mo}{E(B\varrho)}$$

an, so daß sich bei der Annäherung $1 + \varepsilon_0 \sim 1$ auch wieder (vergl. S. 1198) ergiebt für $S_1 S_2 = \Delta s$

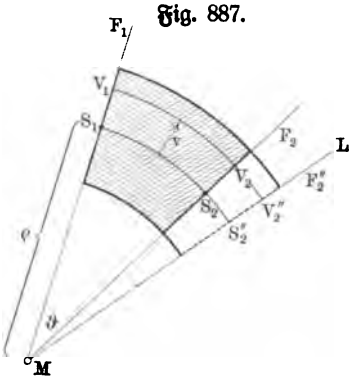
$$arc\,\delta \sim \frac{Mo}{E(B\varrho)} \cdot \Delta s \quad \cdots\cdots\cdots 474)$$

Da $B\varrho$ für $lim\,\varrho = \infty$ in $\mathfrak{Tr}$ übergeht, so stimmt Formel Nr. 473 b) für sehr geringe Krümmungen nahezu überein mit $\frac{1}{\varrho'} = \frac{Mo}{E\mathfrak{Tr}}$, d. h. mit der Gleichung für den geraden Stab.

Wir betrachten nun ferner den Einfluß der Kraft $[N]$, die senkrecht zum Querschnitt wirkt. Bei gleichmäßiger Verteilung der Spannungen über den Querschnitt von der Fläche f, welche erfahrungsmäßig angenommen werden darf, entspricht ihr eine Spannung $\frac{N}{f}$. Da die Fasern der einzelnen Schichten zwischen zwei benachbarten Querschnitten F_1 und F_2 beim Stabe

mit gekrümmter Mittellinie vor der Biegung nicht dieselbe Länge haben, so ist die Verlängerung in den einzelnen Schichten für die konstante Dehnung $\frac{N}{f} \cdot \frac{1}{E}$ verschieden. Stellt Fig. 887 zwei Querschnitte vor der Biegung dar, so haben die Fasern der Schicht bei $V_1 V_2$ die Länge $(\varrho + v)\, arc\, \vartheta$ und demnach die Verlängerung $\frac{N}{f} \cdot \frac{1}{E} (\varrho + v)\, arc\, \vartheta$, d. h. diese Verlängerungen sind für die einzelnen Fasern proportional zu ihrem Abstande von M.

Fig. 887.



Ist $S_2' S_2$ die Verlängerung für $S_1 S_2$, so grenzt demnach die Gerade ML, welche durch S_2' geht, die Verlängerungen für die andern, in Fig. 887 dargestellten Fasern ab. Die Einwirkung von $[N]$ besteht also in einer Drehung des Querschnittes F_2 um die Krümmungsachse durch M. Wendet man demnach auf Fig. 887 die Betrachtungen an, welche bei Fig. 884 gegeben wurden, wobei $S_1 S_2'$ statt $S_1 S_2$ eintritt, so gelangt man zu denselben Ergebnissen in Bezug auf ε_v und σ_v, falls man nur ε_v um $\frac{N}{f} \cdot \frac{1}{E}$ und σ_v um $\frac{N}{f}$ vermehrt.

Man hat also unter Berücksichtigung von N

$$\varepsilon_0 = \frac{Mo}{E\varrho f} + \frac{N}{f} \cdot \frac{1}{E} = \frac{1}{fE}\left[\frac{Mo}{\varrho} + N\right]$$

und

$$\frac{arc\,\delta}{arc\,\vartheta} = C = \varepsilon_0 + \frac{Mo}{EB} = \frac{1}{fE}\left[\frac{Mo}{\varrho} + \frac{Mo \,.\, f}{B} + N\right],$$

während $C - \varepsilon_0$ unverändert bleibt.

Demnach gilt, da $\varrho \,.\, arc\,\vartheta = S_1 S_2$ ist, wofür wieder Δs geschrieben werden mag,

$$arc\,\delta = \frac{1}{fE}\left[\frac{Mo}{\varrho^2} + \frac{Mo \,.\, f}{B\varrho} + \frac{N}{\varrho}\right] \cdot \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad 475\,a)$$

Bei Vernachlässigung von $\frac{Mo}{\varrho^2}$ ist

$$arc\,\delta \sim \left[\frac{Mo}{E(B\varrho)} + \frac{N}{f\varrho E}\right] \cdot \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad 475\,b)$$

Ferner ergiebt sich

$$\sigma_v = \frac{Mo}{B\varrho} \cdot \frac{v}{1 + \frac{v}{\varrho}} + \frac{Mo}{\varrho f} + \frac{N}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 476)$$

Auf ϱ' macht sich der Einfluß von $[N]$ in der Weise geltend, daß in die Formel (vergl. S. 1200)

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1 + C}{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{C - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$$

auch die durch $[N]$ veränderten Werte von C und ε_0 eintreten müssen, d. h. man hat

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{\frac{Mo}{E(B\varrho)}}{1 + \frac{Mo}{E\varrho f} + \frac{N}{fE}} \quad \cdots\cdots 477\,a)$$

Erweitert man $\frac{C - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$ durch $1 - \varepsilon_0$, so ist bei Streichung der Glieder zweiter Ordnung wieder (vergl. S. 1200)

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = 1 + C - \varepsilon_0 = 1 + \frac{Mo}{EB}, \quad \cdots\cdots 477\,b)$$

woraus hervorgeht, wie gering der Einfluß von $[N]$ im allgemeinen auf den Wert von ϱ' ist; demnach gilt auch hier in großer Annäherung der frühere Wert für $arc\,\delta$ gemäß Formel Nr. 474).

Was nun den Einfluß der Schubkraft $[Q]$ anlangt, so erhält man durch eine, der Entwickelung in § 160 entsprechende Betrachtung ohne weiteres für die Schubspannung einer, der Mittelachse des Querschnittes parallelen Schicht,

$$\tau_v = Mo' \cdot \frac{s_v f_v}{-A(\varrho + v)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sin\omega}, \quad \cdots\cdots 478)$$

wobei die alten Bezeichnungen gelten und im besondern x die Breite des Querschnittes an der Schnittstelle und ω den Winkel der Tangente gegen die Horizontale (vergl. S. 883) bezeichnet; der Ausdruck unterscheidet sich von dem früheren nur dadurch, daß $-A(\varrho + v)^2$ für $\mathfrak{Tr}$ eingetreten ist.

Geht man im Gegensatz zu der gegebenen Entwickelung von der Annahme aus, daß auch beim Stabe mit gekrümmter Mittellinie die Spannungsverteilung dem Ebenengesetze folgt, so hat man im Abstande v von der Biegungsachse die Spannung $\sigma_v = \frac{v}{w} \cdot \sigma_w$ anzusetzen. Die Gleichungen $\Sigma\sigma_v \,.\, \varphi = 0$ und $\Sigma\sigma_v \,.\, \varphi \,.\, v = Mo$ zeigen, daß dann die Biegungsachse durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und daß auch die Gleichung $Mo = \sigma_w \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ erhalten bleibt, während die Querschnitte sich gekrümmt haben. Betrachtet man nun ein Stück $S_1 S_2$ der Mittellinie, so muß man F_1 und F_2 in Fig. 884 als deren Normalebenen in S_1 und S_2 auffassen und S_2' mit S_2 zusammenfallen lassen. Man hat dann $S_1 S_2 = \varrho \,.\, arc\,\vartheta = \varrho' arc\,(\vartheta + \delta)$.

Nimmt man nun an, daß der Stab mit gekrümmter Mittellinie ursprünglich aus einem geraden Stabe durch die Einwirkung eines Momentes $[Mo_1]$ entstanden ist und daß nun ein Moment Mo hinzutritt, um ihn weiter zu biegen, so ist nach der Deformationsgleichung des geraden Stabes

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Mo_1}{E\mathfrak{Tr}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{Mo_1 + Mo}{E\mathfrak{Tr}},$$

woraus

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$$

folgt.

Da anderseits $\frac{1}{\varrho'} = \frac{arc(\vartheta + \delta)}{S_1 S_2}$ und $\frac{1}{\varrho} = \frac{arc\,\vartheta}{S_1 S_2}$ ist, so ist auch noch für $S_1 S_2 = \Delta s$ (vergl. S. 1200)

$$\frac{arc\,\delta}{S_1 S_2} = \frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$$

oder

$$arc\,\delta \sim \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \cdot \Delta s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 479)$$

gegeben.

Da jeder gerade Stab, der durch ein Moment $[Mo_1]$ gebogen wird, sofort bei dem Beginn der Einwirkung von $[Mo_1]$ in einen Stab mit gekrümmter Mittellinie übergeht, so ist die ganze Betrachtung zulässig, solange ϱ im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnitts relativ groß ist.

Thatsächlich rechtfertigt die Erfahrung die Verwendung der Theorie des geraden Stabes für krumme Stäbe von geringer Krümmung; die Berücksichtigung von $[N]$ und $[Q]$ hat so zu geschehen, wie oben ausgeführt wurde.

Die ganze Betrachtung wurde durchgeführt für ein Moment $[Mo]$, welches die Krümmung des Stabes zu vermehren, also den Krümmungsradius zu verkleinern bestrebt ist. Sie gilt auch für Momente, welche die Krümmung des Stabes zu vermindern, also den Krümmungsradius zu vergrößern suchen, falls man diese negativ ansetzt. Ebenso ist bei dem Gebrauch der entwickelten Formeln zu berücksichtigen, daß $[N]$ als Zugkraft eingeführt wurde, und daß demnach ein Normaldruck mit negativem Vorzeichen eingeführt werden muß.

205. Bestimmung der Hülfsgrößen A und B für den Normalfall der Praxis. Die abgeleiteten Formeln enthalten die Größen A und B, welche durch die Gleichung $B = -A\varrho$ verbunden sind, und zwar war

$$A = \Sigma \frac{v\varphi}{\varrho + v} \quad \text{und} \quad B = \Sigma \frac{v^2\varphi}{\varrho + v}, \quad \ldots\ldots \quad 480)$$

so daß $\varrho B = \mathfrak{T}r$ für $\varrho = \infty$ ist.

Da A einfacher als B ist, so berechnet man A, und zwar in beliebiger Annäherung, indem man den Querschnitt, parallel zur Mittelachse in schmale Streifen zerlegt und erst für die Streifen der positiven Seite von v und dann für die Streifen der negativen Seite von v die Ausdrücke $\frac{v\varphi}{\varrho + v}$ bildet und die Ergebnisse vereinigt.

Für einzelne Querschnitte läßt sich A verhältnismäßig leicht bestimmen, und zwar für unendlich-schmale Streifen. Als Beispiel mag der rechteckige Querschnitt dienen gemäß Fig. 888 (a. f. S). Zerlegt man $\frac{h}{2}$ in n gleiche Teile, so hat ein Streifen die Fläche $\frac{bh}{2n}$. Nun hat v für den p-ten Streifen

auf der positiven Seite von v den Wert $v = +p \cdot \frac{h}{2n}$, und demnach ist für diesen Streifen

$$\frac{v\varphi}{\varrho + v} = \varphi - \frac{\varrho\varphi}{\varrho + v} = \frac{bh}{2n} - \frac{\varrho}{\varrho + p \cdot \frac{h}{2n}} \cdot \frac{bh}{2n},$$

so daß für die positive Seite von v

$$\Sigma \frac{v\varphi}{\varrho + v} = \frac{bh}{2} - \frac{bh}{2n} \Sigma \frac{\varrho}{\varrho + p \cdot \frac{h}{2n}}$$

ist, wobei $p = 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist.

Fig. 888.

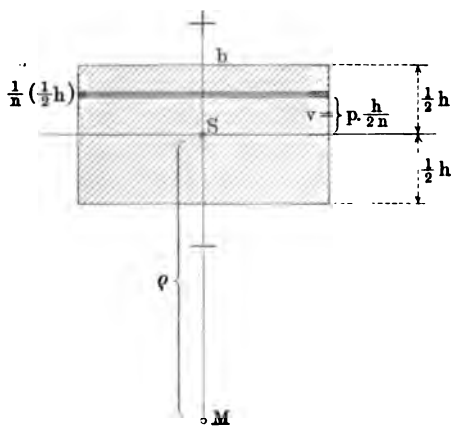
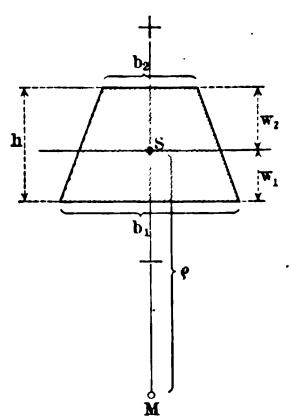


Fig. 889.



Um die Summe auf der rechten Seite auszuführen, setzen wir $\frac{h}{2\varrho} = f$, so daß jene Summe die Form

$$\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{1 + \frac{p}{n} \cdot f}$$

annimmt und demnach für kleine Werte von f als

$$\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{n} \Sigma \left[1 - \frac{p}{n} f + \left(\frac{pf}{n}\right)^2 - \left(\frac{pf}{n}\right)^3 + \cdots\right]$$

dargestellt werden kann, wodurch sich ihr Wert gemäß der schon oft durchgeführten Weise als

$$\frac{bh}{2}(1 - \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{3}f^2 - \cdots)$$

ergiebt.

Für die negative Seite von v ist ebenso für $v = -p \cdot \frac{h}{2n}$ die Summe

$$\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \Sigma \frac{1}{1 - \frac{p}{n} \cdot f}$$

zu bilden, deren Wert

$$\frac{bh}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{3}f^2+\cdots\right)$$

ist.

Für den ganzen Querschnitt gilt demnach

$$\Sigma\frac{v\varphi}{\varrho+v}=\left[\frac{bh}{2}-\frac{bh}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{3}f^2-\cdots\right)\right]+\left[\frac{bh}{2}-\frac{bh}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{3}f^2+\cdots\right)\right]$$

$$=-bh\left(\tfrac{1}{3}f^2+\tfrac{1}{5}f^4+\cdots\right)=-bh\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^4+\cdots\right]$$

Man hat also für das Rechteck

$$A=-bh\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^4+\cdots\right]$$

und

$$B=-A\varrho=+bh\varrho\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2\varrho}\right)^4+\cdots\right].$$

In dritter Annäherung ist also $A=-\frac{1}{12}\frac{bh^3}{\varrho^2}$ und $B=+\frac{1}{12}\frac{bh^3}{\varrho}$, so daß in dieser Annäherung

$$B\varrho=\tfrac{1}{12}bh^3=\mathfrak{Tr}$$

ist.

Unter Verwendung der Reihe für *log nat* läßt sich A auch darstellen als

$$A=bh\left[1-\frac{\varrho}{h}\,log\,nat\,\frac{2\varrho+h}{2\varrho-h}\right].$$

Für den Kreis (r) als Querschnitt ergiebt sich ebenso

$$A=-r^2\pi\left[\tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2+\tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^4+\tfrac{5}{64}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^6+\cdots\right].$$

Fällt für eine Ellipse die Halbachse a in die Ebene der Mittellinie des Stabes, so gilt der für den Kreis entwickelte Wert von A, falls man $r^2\pi$ durch $ab\pi$ und $\frac{r}{\varrho}$ durch $\frac{a}{\varrho}$ ersetzt; Entsprechendes gilt auch, wenn b in die Ebene der Mittellinie des Stabes fällt.

Für ein symmetrisches Trapez folgt ebenso gemäß Fig. 889

$$A=\frac{b_1+b_2}{2}h\left[1-\frac{2\varrho}{(b_1+b_2)h}\left\{\left(b_2+\frac{b_1-b_2}{h}(w_2+\varrho)\right)log\,nat\,\frac{\varrho+w_2}{\varrho-w_1}-(b_1-b_2)\right\}\right].$$

Daraus geht für $b_2=0$ und $w_2=\frac{2}{3}h$ und $w_1=\frac{1}{3}h$ die entsprechende Formel für das gleichschenklige Dreieck hervor.

Mit der Bestimmung von A bezw. B ist auch die Lage der Nullinie gegeben, welche ja in der Richtung auf M zu von der Mittelachse den Abstand $\bar{v}=\frac{\varrho\,.\,B}{f\varrho+B}$ hat. Erweitert man $\bar{v}$ mit ϱ, so ergiebt sich noch

$$\bar{v}\sim\frac{\varrho\,\mathfrak{Tr}}{\mathfrak{Tr}+f\varrho^2}.$$

So ist z. B. für das Rechteck

$$\bar{v} \sim \varrho \frac{h^2}{h^2 + 12\varrho^2}.$$

Ist die Nulllinie in den Querschnitt eingetragen, so läßt sich die Verteilung der Spannungen gemäß der, auf die Nulllinie bezogenen Gleichung

$$\sigma_{v'} = \sigma_{w'} \cdot \frac{v'}{w'} \cdot \frac{R + w'}{R + v'}$$

wieder durch Reduktion der Querschnitte darstellen (vergl. S. 1047).

Für einen Streifen von der Höhe η und der Breite x, welcher den Abstand v' von der Nulllinie hat, entspricht der Spannung $\sigma_{v'}$ die Kraft

$$(\eta x)\,\sigma_{v'} = \left(\eta \cdot \frac{v'}{w'} \cdot \frac{R + w'}{R + v'} \cdot x\right)\sigma_{w'},$$

welche für die reduzierte Breite

$$x' = \frac{v'}{w'} \cdot \frac{R + w'}{R + v'} \cdot x$$

die Gestalt

$$(\eta x')\,\sigma_{w'}$$

annimmt, so daß für den reduzierten Querschnitt mit der konstanten Spannung $\sigma_{w'}$ gerechnet werden darf.

Fig. 890.

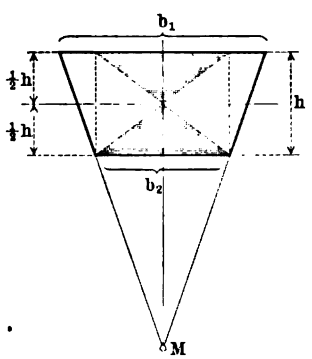
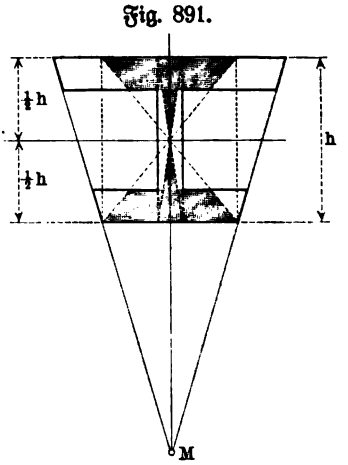


Fig. 891.



Für den reduzierten Querschnitt bleiben demnach die Schlüsse auf S. 1047, welche sich auf den geraden Balken bezogen, auch hier in Geltung.

Faßt man die reduzierte Querschnittsfläche eines krummen Balkens als reduzierte Querschnittsfläche eines geraden Balkens auf, dessen wirkliche Querschnittsfläche für die bei der Reduktion benutzte Nulllinie das Trägheitsmoment Tr hat, so gilt die einfache Festigkeitsgleichung

$$Mo = \frac{\sigma \,.\, Tr}{w}$$

auch in aller Strenge für den krummen Balken.

So hat z. B. der Querschnitt in Fig. 890, falls M in dem Schnitte der nicht parallelen Seiten liegt, die schraffierte Fläche als reduzierte Querschnittsfläche; da diese, als reduzierte Fläche des Querschnittes eines geraden Balkens aufgefaßt, dessen Querschnitt als Rechteck von den Seiten b_2 und h bestimmt (vergl. S. 1047), so ist $Tr = \frac{1}{12} b_2 h^3$ und $w = \frac{1}{2} h$, und es gilt für den krummen Balken der Fig. 890 in aller Strenge

$$Mo = \sigma \cdot \frac{b_2 \,.\, h^2}{6}.$$

Entsprechendes gilt auch für Fig. 891.

Fig. 892 a.

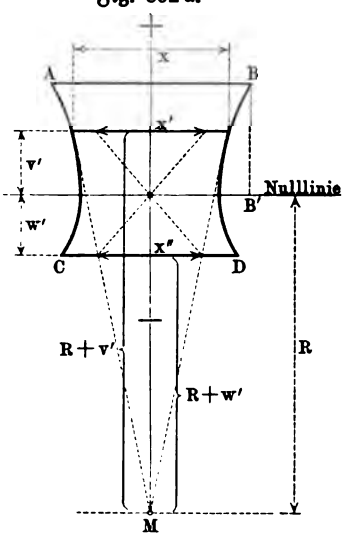
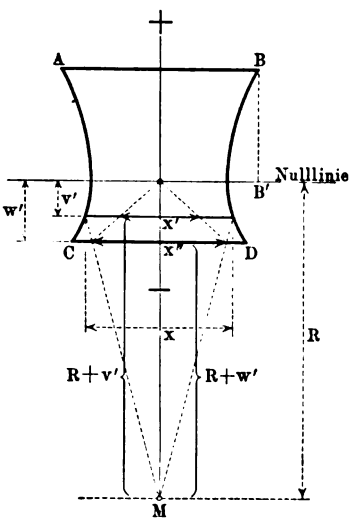


Fig. 892 b.



Um die Reduktion von x auf $x' = \frac{v'}{w'} \cdot \frac{R + w'}{R + v'} \cdot x$ vorzunehmen, bildet man erst $x'' = x \cdot \frac{R + w'}{R + v'}$ und dann $x' = x'' \cdot \frac{v'}{w'}$. Wählt man dabei, wie es üblich ist, als w' den weitesten Abstand der Fasern auf der Seite des Querschnittes, auf welcher M liegt, so ist w' bei den oben getroffenen Festsetzungen als negative Größe einzuführen. Die Reduktion für positive Werte von v' zeigt demgemäß Fig. 892 a, während Fig. 892 b diese Reduktion für negative Werte von v' zeigt; dabei ist $\sigma_{w'}$ die Spannung für CD. Führt man die Spannung für AB ein, so ist BB' als w' einzuführen und dementsprechend zu reduzieren.

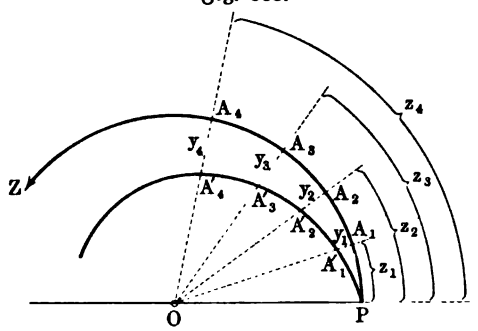
206. Die Bestimmung der Formänderung bei Stäben von geringer Krümmung für den Normalfall der Praxis. Die Formel Nr. 473) ist selbst in der angenäherten, für relativ große Werte von ϱ gültigen Gestalt

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \quad \text{bezw.} \quad arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \cdot \Delta s$$

bei $B\varrho \sim \mathfrak{T}r$ nur selten für Anwendungen unmittelbar geeignet, weil die Ausdrücke für ϱ und ϱ' fast immer sehr verwickelt sind.

Nur für die Formänderungen von Stäben, deren Mittellinie ein Kreisbogen ist, läßt sich eine verhältnismäßig einfache Beziehung zwischen ϱ und ϱ' gewinnen. Ist nämlich der Kreisbogen $PA_1A_2\ldots$ die Mittellinie eines Stabes, die bei der Biegung in die Linie $PA_1'A_2'\ldots$ übergeht, so nimmt $\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}$ die einfache Form $f''(z)$ an, falls man für $PA_1'A_2'\ldots$ den Bogen $PA_1A_2\ldots$ als Z-Linie und die radialen Änderungen $A_1A_1' = y_1$, $A_2A_2' = y_2\ldots$ als zugehörige Ordinaten einführt, so daß $PA_1'A_2'\ldots$ als $y = f(z)$ darstellbar wird.

Fig. 893.

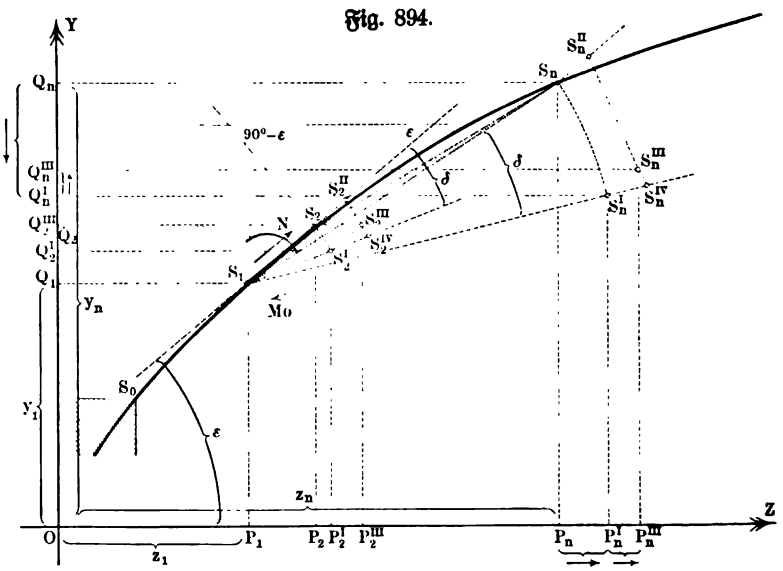


Man hat demnach in diesem Falle

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = f''(z) = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r},$$

wobei natürlich Mo auch als Funktion von z dargestellt werden muß.

Fig. 894.



In allen anderen Fällen ist es zweckmäßig, die Projektionen eines Elementes S_1S_2 der Mittellinie des Stabes auf die Achsen eines rechtwinkligen Kreuzes vor und nach der Formänderung festzustellen und daraus auf die Formänderung des ganzen Stabes zu schließen.

In Fig. 894 stelle $S_1 S_2$ ein Element des Stabes vor der Formänderung dar, welches allein durch die $[Mo]$ entsprechende Biegung in $S_1 S_2^{\mathrm{I}}$ und allein durch die $[N]$ entsprechende Dehnung in $S_1 S_2^{\mathrm{II}}$ übergehen würde, wobei Mo und N bezw. die Werte von Drehungsmoment und Normalkraft für die betrachtete Stelle $S_1 S_2$ bezeichnen.

Projiziert man nun $\triangle S_1 S_2 S_2^{\mathrm{I}}$ auf die Achsen, so ist für ε als Neigungswinkel von $S_1 S_2$ gegen die Z-Achse einerseits

$$S_2 S_2^{\mathrm{I}} \cos\varepsilon = Q_2 Q_2^{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad S_2 S_2^{\mathrm{I}} \sin\varepsilon = P_2 P_2^{\mathrm{I}}$$

und anderseits

$$S_1 S_2 \cos\varepsilon = P_1 P_2 \quad \text{und} \quad S_1 S_2 \sin\varepsilon = Q_1 Q_2.$$

Daraus folgt

$$\cos\varepsilon = \frac{Q_2 Q_2^{\mathrm{I}}}{S_2 S_2^{\mathrm{I}}} = \frac{P_1 P_2}{S_1 S_2} \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon = \frac{P_2 P_2^{\mathrm{I}}}{S_2 S_2^{\mathrm{I}}} = \frac{Q_1 Q_2}{S_1 S_2}$$

und demnach auch

$$Q_2 Q_2^{\mathrm{I}} = P_1 P_2 \cdot \frac{S_2 S_2^{\mathrm{I}}}{S_1 S_2} \quad \text{und} \quad P_2 P_2^{\mathrm{I}} = Q_1 Q_2 \cdot \frac{S_2 S_2^{\mathrm{I}}}{S_1 S_2}$$

Da der Querschnitt des Balkens, welcher auf $S_1 S_2$ vor der Biegung senkrecht steht, nach der Biegung auf $S_1 S_2^{\mathrm{I}}$ senkrecht steht, so bilden $S_1 S_2$ und $S_1 S_2^{\mathrm{I}}$ den Winkel δ, falls sich jener Querschnitt bei der Biegung um δ dreht, und demnach ist $S_2 S_2^{\mathrm{I}} = S_1 S_2 \,.\, arc\,\delta$. Man hat also

$$Q_2 Q_2^{\mathrm{I}} = P_1 P_2 \,.\, arc\,\delta \quad \text{und} \quad P_2 P_2^{\mathrm{I}} = Q_1 Q_2 \,.\, arc\,\delta.$$

Die Bestimmung der Verschiebungen $Q_2 Q_2^{\mathrm{I}}$ und $P_2 P_2^{\mathrm{I}}$ ist, nachdem ursprünglich δ festgestellt wurde, unabhängig von dem Umstande, daß $S_1 S_2$ ein Element darstellt. Denkt man sich nämlich in der Ebene der Zeichnung irgend einen Punkt S_n mit $S_1 S_2$ fest verbunden, während sich $S_1 S_2$ um S_1 in die Lage $S_1 S_2^{\mathrm{I}}$ dreht, so gelangt S_n dabei in eine Lage S_n^{I}, für welche in Beziehung auf S_n dasselbe gilt wie für S_2 in Bezug auf S_2^{I}, da sich hierbei die Strecken $S_1 S_2$ bezw. $S_1 S_2^{\mathrm{I}}$ und $S_1 S_n$ bezw. $S_1 S_n^{\mathrm{I}}$ genau entsprechen.

Bezeichnet man die Projektionen von S_n bezw. S_n^{I} auf die Achsen durch P_n bezw. P_n^{I} und Q_n bezw. Q_n^{I}, so gilt auch für die Komponenten der Verschiebung von S_n relativ zu S_1

$$Q_n Q_n^{\mathrm{I}} = P_1 P_n \,.\, arc\,\delta \quad \text{und} \quad P_n P_n^{\mathrm{I}} = Q_1 Q_n \,.\, arc\,\delta,$$

d. h. man hat bei Berücksichtigung des Sinnes dieser Verschiebungen

$$Q_n Q_n^{\mathrm{I}} = -(x_n - x_1)\, arc\,\delta \quad \text{und} \quad P_n P_n^{\mathrm{I}} = +(y_n - y_1)\, arc\,\delta.$$

Durch die $[N]$ entsprechende Dehnung des Elementes $S_1 S_2$ würde S_2 nach S_2^{II} rücken, falls keine Biegung durch $[Mo]$ in Frage käme, und demnach ist der wahre Ort S_2^{III} von S_2 durch das Parallelogramm $S_2^{\mathrm{I}} S_2 S_2^{\mathrm{II}} S_2^{\mathrm{III}}$ gegeben, da die Verrückung, die der Drehung von $S_2^{\mathrm{I}} S_2^{\mathrm{II}}$ in die Lage $S_2^{\mathrm{I}} S_2^{\mathrm{IV}}$ entspricht, gegenüber den betrachteten Verrückungen verschwindet. Man hat also noch die Projektionen von $S_2^{\mathrm{I}} S_2^{\mathrm{III}}$ oder $S_2 S_2^{\mathrm{II}}$ auf die Achsen zu berücksichtigen, und zwar ist

$$P_2^{\mathrm{I}} P_2^{\mathrm{III}} = S_2^{\mathrm{I}} S_2^{\mathrm{III}} \,.\, \cos\varepsilon = S_2 S_2^{\mathrm{II}} \cdot \frac{P_1 P_2}{S_1 S_2}$$

und

$$Q_2^{\prime} Q_2^{\prime\prime\prime} = S_2^{\prime} S_2^{\prime\prime\prime} \,.\, \sin\varepsilon = S_2 S_2^{\prime\prime} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{S_1 S_2}.$$

Da $\frac{S_2 S_2^{\prime\prime}}{S_1 S_2}$ als Dehnung durch $[N]$ der Spannung $\frac{N}{f}$ proportional $\left(\frac{1}{E}\right)$ ist, so hat man

$$\frac{S_2 S_2^{\prime\prime}}{S_1 S_2} = \frac{N}{f \,.\, E}$$

und auch

$$P_2^{\prime} P_2^{\prime\prime\prime} = P_1 P_2 \cdot \frac{N}{fE} \quad \text{und} \quad Q_2^{\prime} Q_2^{\prime\prime\prime} = Q_1 Q_2 \cdot \frac{N}{fE}.$$

Für S_n findet man natürlich genau dieselben Größen als relative Verschiebungen gegen S_1, so daß man also im ganzen als relative Verschiebungen von S_n in Richtung der Z-Achse hat

$$P_n P_n^{\prime\prime\prime} = +(y_n - y_1)\, arc\,\delta + P_1 P_2 \frac{N}{fE}, \quad \cdots \quad 481\,a)$$

während diese in Richtung der Y-Achse

$$Q_n Q_n^{\prime\prime\prime} = -(z_n - z_1)\, arc\,\delta + Q_1 Q_2 \frac{N}{fE} \quad \cdots \quad 481\,b)$$

beträgt.

Betrachtet man nun alle Elemente eines Stabes zwischen dem festen Punkte S_0 und einem beliebigen Punkte S_n, so ist die relative Verschiebung von S_n gegen S_0, falls man $P_1 P_2 = \zeta$ und $Q_1 Q_2 = \eta$ setzt, in Richtung der Z-Achse gegeben als

$$\Sigma P_n P_n^{\prime\prime\prime} = y_n \,.\, \Sigma\, arc\,\delta - \Sigma y \,.\, arc\,\delta + \Sigma\zeta \cdot \frac{N}{fE}, \quad 482\,a)$$

während sie in Richtung der Y-Achse

$$\Sigma Q_n Q_n^{\prime\prime\prime} = -z_n \,.\, \Sigma\, arc\,\delta + \Sigma z \,.\, arc\,\delta + \Sigma\eta \cdot \frac{N}{fE} \quad \cdots \quad 482\,b)$$

beträgt; dabei ist die Summation ausgedehnt auf alle Elemente Δs zwischen S_0 und S_n, deren Projektionen auf die Achsen bezw. durch ζ und η bezeichnet worden sind.

Für $arc\,\delta$ ist je nach der gewünschten Genauigkeit einer der früher entwickelten Werte (vergl. S. 1198) einzusetzen, und zwar genügt bei flachem Bogen

$$arc\,\delta = \frac{Mo}{E\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s.$$

Bei Anwendungen ist auf die Vorzeichen von $[Mo]$ und $[N]$ zu achten (vergl. S. 1203).

Eine Berücksichtigung von $[Q]$ ist bisher bei Anwendungen im allgemeinen noch nicht erforderlich geworden.

Wegen der Wichtigkeit der Formeln Nr. 482 a) und b) geben wir noch eine andere Ableitung.

Wir denken uns einen beliebig belasteten Stab (Fig. 895) mit krummer Mittellinie in S_n thatsächlich durchschnitten und bringen an der Schnittstelle das Moment $[D]$ und die Normalkraft $[N]$ an, welche den Einfluß des ab-

geschnittenen Teils (rechts von der Figur) darstellt. Für eine beliebige Schnittstelle S ist dann, falls man $[N]$ in $[Z]$ und $[Y]$ zerlegt, bei Berücksichtigung des rechten Teiles der Figur

$$Mo = Z(y_n - y) - Y(z_n - z) + D + \overline{Mo},$$

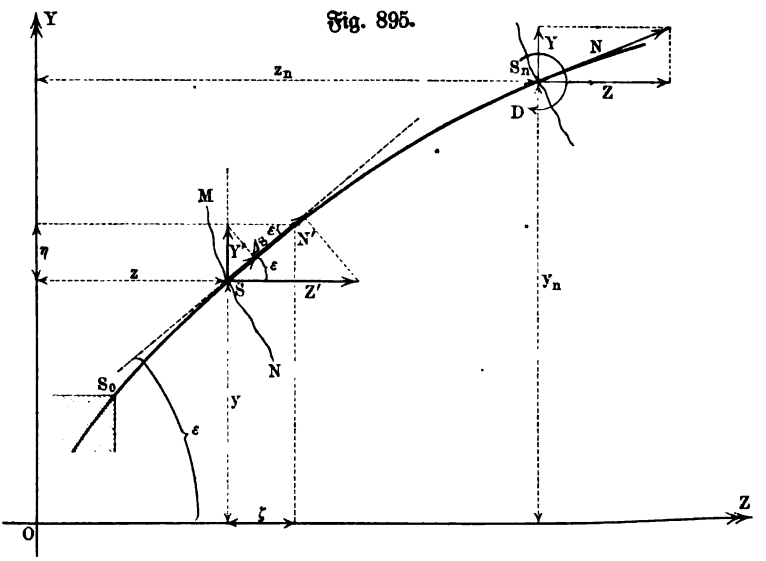
wobei $\overline{Mo}$ das Moment der Belastung zwischen S_n und S bezeichnet.

Um $[N]$ für die Schnittstelle zu bestimmen, projizieren wir $[Z]$ und $[Y]$ auf die Tangente in S, wobei sich die Komponenten $+ Z\cos\varepsilon$ und $+ Y\sin\varepsilon$ ergeben, so daß

$$N = + Z\cos\varepsilon + Y\sin\varepsilon + \overline{N}$$

ist, falls $\overline{N}$ die Normalkraft ist, welche die Belastung zwischen S_n und S in S erzeugt.

Fig. 895.



Da $\cos\varepsilon = \frac{\zeta}{\Delta s}$ und $\sin\varepsilon = \frac{\eta}{\Delta s}$ ist, so hat man auch

$$N = + \frac{Z \cdot \zeta}{\Delta s} + \frac{Y \cdot \eta}{\Delta s} + \overline{N}.$$

Wir berechnen nun die Formänderungsarbeit für ein bei S gelegenes Element, welche $[Mo]$ und $[N]$ entspricht.

Da $[N]$ senkrecht zum Querschnitt wirkt, so ist die Formänderungsarbeit, welche der Spannung $\sigma = \frac{N}{f}$ entspricht, für die Volumeinheit gegeben (vergl. S. 867) als

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \tfrac{1}{2}\frac{N^2}{f^2 E}$$

und hat demnach für ein bei S gelegenes Element Δs den Wert

$$\tfrac{1}{2}\frac{N^2}{f^2 E}(f \cdot \Delta s) = \tfrac{1}{2}\frac{N^2}{f E} \cdot \Delta s.$$

Anderseits wäre die Arbeit der Biegung für ein Volumelement wieder gegeben (vergl. S. 1072) als

$$\tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\cdot \Delta s,$$

falls nur Biegung allein vorläge.

Thatsächlich leisten $[N]$ und $[Mo]$ gleichzeitig eine bestimmte Arbeit. Denkt man sich zuerst $[N]$ allein in Wirksamkeit, so ist demnach noch zu berücksichtigen, daß bei einer darauf folgenden, durch $[Mo]$ bewirkten Drehung um $arc\,\delta$ der Angriffspunkt einer Spannung $[\sigma]$, welche von der Biegungsachse den Abstand v' hat, den Weg $v' \,.\, arc\,\delta$ beschreibt. Bezeichnet φ einen Flächenstreifen des Querschnitts im Abstande v' von der Biegungsachse, so wird also der Angriffspunkt der Kraft $[\varphi \,.\, \sigma]$ im Abstande v' um $v' \,.\, arc\,\delta$ verschoben, wobei die Arbeit $(\varphi\sigma)v' \,.\, arc\,\delta$ geleistet wird.

Außer den oben aufgestellten Ausdrücken für die Formänderungsarbeit eines Volumelementes ist also für dieses noch der Betrag

$$\Sigma(\varphi\sigma)v' \,.\, arc\,\delta = \sigma \,.\, arc\,\delta \,.\, \Sigma\varphi v'$$

zu berücksichtigen, wobei sich die Summation auf den ganzen Querschnitt bezieht. Geht man zur Mittelachse des Querschnittes (v) über, welche dessen Schwerpunkt enthält, so ist $v' = v + \dfrac{B\varrho}{B + f\varrho}$ zu setzen, so daß

$$\Sigma\varphi v' = \Sigma\varphi v + \frac{B\varrho}{B + f\varrho}\cdot\Sigma\varphi$$

ist. Da $\Sigma\varphi v = 0$ und $\Sigma\varphi = f$ ist, so ist

$$\Sigma(\varphi\sigma) \,.\, v'\,arc\,\delta = \sigma \,.\, arc\,\delta \cdot \frac{B\varrho}{B + f\varrho}\cdot f = N \,.\, arc\,\delta \cdot \frac{B\varrho}{B + f\varrho}\cdot$$

Da $B\varrho \sim \mathfrak{T}\mathfrak{r}$, so ist dieser Betrag jedenfalls für relativ große Werte von ϱ zu vernachlässigen.

Man hat also in großer Annäherung als Formänderungsarbeit für ein Volumelement

$$\tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\cdot\Delta s + \tfrac{1}{2}\frac{N^2}{Ef}\cdot\Delta s,$$

so daß diese für den Stab von S_0 bis S_n durch

$$\Sigma\tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\cdot\Delta s + \Sigma\tfrac{1}{2}\frac{N^2}{Ef}\cdot\Delta s \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 483)$$

dargestellt wird, wobei die Summation auf alle Elemente zwischen S_0 und S_n auszudehnen ist.

Wenn man diese Formänderungsarbeit partiell nach Z, Y und D ableitet, so erhält man bezw. die beiden Verschiebungen des Angriffspunktes S_n von $[Z]$ und $[Y]$ und die Drehung, welche $[D]$ entspricht.

Bildet man Mo^2, so ist dessen partielle Ableitung nach Z

$$2(y_n - y)\,[Z(y_n - y) - Y(x_n - x) + D + \overline{Mo}] = 2(y_n - y) \,.\, Mo.$$

Ebenso ergiebt sich bei partieller Ableitung von Mo^2 nach Y

$$-2(z_n - z)\,Mo$$

und bei partieller Ableitung von Mo^2 nach D

$$2 \,.\, Mo.$$

Bildet man N^2, so ergiebt sich bei partieller Ableitung nach Z

$$+2 \,.\, N \cdot \frac{\zeta}{\Delta s}$$

und bei partieller Ableitung nach Y

$$+2 \,.\, N \cdot \frac{\eta}{\Delta s},$$

während die partielle Ableitung von N nach D, welches nicht in N enthalten ist, verschwindet.

Für die Verschiebung von S_n in Richtung von $[Z]$ ergiebt sich also

$$\Sigma (y_n - y) \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s + \Sigma \zeta \cdot \frac{N}{fE}, \quad \ldots \quad 484\,a)$$

während sich für die Verschiebung von S_n in Richtung von $[Y]$

$$-\Sigma (z_n - z) \cdot \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s + \Sigma \eta \cdot \frac{N}{fN} \quad \ldots \quad 484\,b)$$

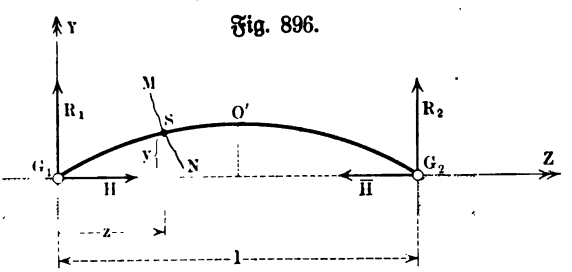
ergiebt; außerdem folgt für die Drehung

$$\Sigma\, arc\,\delta = \Sigma \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s \quad \ldots \quad 484\,c)$$

Führt man den Wert für $arc\,\delta$ aus Nr. 484 c) in die beiden ersten Gleichungen ein, so entstehen wieder die Gleichungen Nr. 482 a) und b).

207. Der flache prismatische Bogenträger, der in einer Vertikalebene in zwei Gelenken von gleicher Höhenlage ruht. Wenn für vollwandige Bogenträger die angenäherten Annahmen des § 201 nicht mehr ausreichen, so hat man sie als krumme Stäbe zu behandeln. Für die Anordnung der Fig. 896, bei welcher G_1 und G_2 Gelenke bezeichnen, sind die Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$ genau so aus der Belastung zu bestimmen, als wenn es sich um einen Zweistützenträger mit Auflagerung in G_1 und G_2 handelte; dagegen sind für die Feststellung der statisch-unbestimmten Reaktionen $[H]$ und $[\overline{H}]$, für welche $H = \overline{H}$ gilt, die Formeln des vorigen Paragraphen erforderlich.

Fig. 896.



Bei einem Schnitt MN in S ergiebt sich für das linke Balkenstück

$$Mo = \overline{Mo} + y \,.\, H,$$

falls man das Moment der Belastung und der Reaktion R_1 durch $\overline{Mo}$ bezeichnet.

Da die Komponenten der Kräfte, welche senkrecht zu den Querschnitten stehen, bei einem flachen Bogen angenähert den Wert H haben, so darf man $N \sim H$ setzen; dabei ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß H hier eine Druckkraft ist und daher negative Dehnungen erzeugt.

Wir fassen nun die Punkte G_1 und G_2 auf als die bisher eingeführten Punkte S_0 und S_n und denken uns demnach G_1 festgehalten, während G_2 relative Verrückungen gegen G_1 zeigen kann. Thatsächlich ist eine Änderung in der Höhenlage von G_2 gegen G_1 nicht zu berücksichtigen, während ein Ausweichen der Widerlager um λ in wagerechter Richtung, also eine Verschiebung von G_2 gegen G_1 um λ in Richtung der Z-Achse mit in Rechnung gezogen werden soll. Unter diesen Voraussetzungen behält die Vertikalkoordinate von G_2 stets den Wert Null, so daß $y_n = 0$ ist in Gleichung Nr. 482 a) oder Nr. 484 a).

Diese Gleichung lautet also hier für $arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}_r} \cdot \Delta s$ unter Voraussetzung eines prismatischen Stabes für $N \sim -H$

$$\lambda = -\frac{1}{E\mathfrak{T}_r} \Sigma y \,.\, Mo \,.\, \Delta s - \frac{H}{fE} \Sigma \zeta$$

oder bei Einführung des Wertes von Mo

$$\lambda = -\frac{1}{E\mathfrak{T}_r} \Sigma y \,.\, \overline{Mo} \,.\, \Delta s - \frac{H}{E\mathfrak{T}_r} \Sigma y^2 \,.\, \Delta s - \frac{H}{fE} \cdot \Sigma \zeta.$$

Bei flachen Bogen läßt sich Δs mit dessen Projektion ξ auf die Z-Achse vertauschen, so daß dann

$$\lambda = -\frac{1}{E\mathfrak{T}_r} \Sigma y \,.\, \overline{Mo} \,.\, \zeta - \frac{H}{E\mathfrak{T}_r} \Sigma y^2 \,.\, \zeta - \frac{H}{fE} \cdot \Sigma \zeta$$

wird.

Fig. 897.

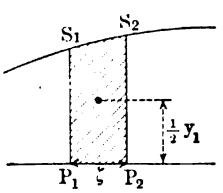
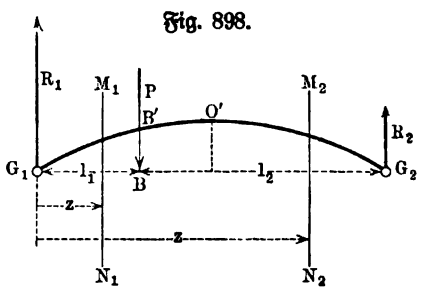


Fig. 898.



Im letzten Gliede giebt die Summation $\Sigma \zeta = l$ ohne weiteres $\frac{H}{fE} \cdot l$, während sich das vorletzte Glied durch das Massenmoment der Fläche F zwischen $G_1 O' G_2$ und $G_1 G_2$ in Bezug auf die Horizontale $G_1 G_2$ darstellen läßt, welches durch $\mathfrak{M}_h$ bezeichnet werden mag. Betrachtet man nämlich einen Streifen gemäß Fig. 897, so hat dessen Fläche an den Grenzen den Wert $y_1 \zeta$, während das Massenmoment für die Horizontale $P_1 P_2$ den Wert $\frac{1}{2} y_1 (y_1 \zeta) = \frac{1}{2} y_1^2 \zeta$ hat; demnach liefert die Summation für alle Elemente ζ das betreffende Moment für die ganze Fläche zwischen $G_1 O' G_2$ und $G_1 G_2$, und zwar doppelt.

Man hat also, falls man noch $\zeta = \frac{1}{n} l$ setzt,

$$E\mathfrak{T}r \,.\, \lambda = -\Sigma y \,.\, \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} - H \,.\, 2\mathfrak{M}_b - \frac{H\mathfrak{T}r}{f} \cdot l.$$

Demnach erhält man für die Reaktion H den Wert

$$H = \frac{-\Sigma y \,.\, \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} - \lambda \,.\, E\mathfrak{T}r}{2\mathfrak{M}_b + \frac{\mathfrak{T}r}{f} \cdot l} \quad \ldots\ldots \quad 485)$$

Um $\Sigma y \,.\, \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n}$ für verschiedene Arten der Belastung auszuführen, betrachten wir zunächst eine Einzellast $[P]$ gemäß Fig. 898, wobei $R_1 = \frac{l_2}{l} \cdot P$ und $R_2 = \frac{l_1}{l} \cdot P$ ist.

Für einen Schnitt zwischen G_1 und B ist demnach

$$\overline{Mo} = -\frac{l_2}{l} \cdot P \,.\, x,$$

während man für einen Schnitt zwischen B und G_2 hat

$$\overline{Mo} = -\frac{l_2}{l} \cdot P \,.\, x + P(x - l_1) = -\frac{Pl_1}{l}(l - x).$$

Für $G_1 B$ ist also für die Summation Σ im Zähler von H zu bilden

$$P\frac{l_2}{l} \cdot \Sigma y \,.\, x \,.\, \xi.$$

Da $y\xi$ einen Flächenstreifen gemäß Fig. 897 bezeichnet, so ist $x(y\xi)$ dessen Massenmoment in Bezug auf die Vertikale durch G_1 und demnach stellt $\Sigma yx\xi$ das entsprechende Massenmoment der Fläche $G_1 B' B$ dar, welches durch $\mathfrak{M}_v^{(1)}$ bezeichnet werden mag.

Man hat also

$$\frac{Pl_2}{l} \Sigma y \,.\, x \,.\, \xi = \frac{Pl_2}{l} \cdot \mathfrak{M}_v^{(1)}.$$

Für BG_2 ist ebenso die Summe

$$\Sigma \frac{Pl_1}{l}(l - x) \,.\, y \,.\, \xi$$

zu bilden, welche bei unmittelbarer Ausführung oder auch mit Rücksicht auf eine neue Z-Achse in der Richtung $G_2 B$ zu dem Ergebnisse

$$\frac{Pl_1}{l} \cdot \mathfrak{M}_v^{(2)}$$

führt, falls man das Massenmoment der Fläche $G_2 B' B$ in Bezug auf die Vertikale durch G_2 mit $\mathfrak{M}_v^{(2)}$ bezeichnet.

Man hat also für eine Einzellast P

$$\Sigma y \,.\, \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} = -\frac{P}{l}\left(l_2 \,.\, \mathfrak{M}_v^{(1)} + l_1 \,.\, \mathfrak{M}_v^{(2)}\right)$$

zu setzen, wobei $\mathfrak{M}_v^{(1)}$ das Moment der Fläche $G_1B'B$ in Bezug auf die Vertikale durch G_1 und $\mathfrak{M}_v^{(2)}$ das Moment der Fläche $G_2B'B$ in Bezug auf die Vertikale durch G_2 bezeichnet.

Bei gleichmäßiger Belastung ($Q = l\gamma$) ist $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}Q$ und

$$\overline{Mo} = -z\frac{Q}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma z^2.$$

Man hat also hier

$$\Sigma y\left(-z\frac{Q}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma z^2\right)\zeta$$

für die ganze Strecke $G_1G_2 = l$ zu bilden, was

$$\Sigma y \,.\, \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} = -\tfrac{1}{2}Q \,.\, \mathfrak{M}_v + \tfrac{1}{2}\gamma \mathfrak{Tr}_v$$

liefert, falls man das Massenmoment der ganzen Fläche $G_1O'G_2$ für die Vertikale durch G_1 mit $\mathfrak{M}_v$ und das Trägheitsmoment derselben Fläche für diese Vertikale durch $\mathfrak{Tr}_v$ bezeichnet.

Für einen Parabelbogen von der Pfeilhöhe h und der Spannweite l ist

$$\mathfrak{M}_v = (\tfrac{2}{3}lh) \,.\, \tfrac{2}{5}h = \tfrac{4}{15}lh^2$$

gegeben, da der Flächenschwerpunkt (vergl. S. 431) um $\frac{2}{5}h$ von G_1G_2 absteht.

Da die Gleichung der Parabel für das gewählte Kreuz durch

$$y = \frac{4h}{l^2} \cdot z(l - z)$$

gegeben ist, so ist für eine Einzellast $[P]$

$$\mathfrak{M}_v^{(1)} = \frac{4h}{l^2}\left(\tfrac{1}{3}ll_1^3 - \tfrac{1}{4}l_1^4\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_v^{(2)} = \frac{4h}{l^2}\left(\tfrac{1}{3}ll_2^3 - \tfrac{1}{4}l_2^4\right).$$

Ferner ist für gleichmäßige Belastung

$$\mathfrak{M}_v = \tfrac{1}{3}l^2h \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_v = \tfrac{1}{5}hl^3.$$

Die Bestimmung dieser Hülfsgrößen, welche demnach für die Parabel auf rechnerischem Wege sehr einfach ist, läßt sich für andere Kurven jedenfalls auf graphischem Wege stets erreichen.

Für den flachen Parabelbogen ergiebt sich demnach bei einer Einzellast $[P]$ für Σ im Zähler von H

$$-\frac{P}{l} \cdot \frac{4h}{l^2}\left(\tfrac{1}{3}l_2l_1^3l + \tfrac{1}{3}l_1l_2^3l - \tfrac{1}{4}l_2l_1^4 - \tfrac{1}{4}l_1l_2^4\right)$$

$$= -\tfrac{1}{3}Pl_1l_2h\left(1 + \frac{l_1l_2}{l^2}\right).$$

Für $l_1 = \frac{1}{p}l$ ist $l_2 = l\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ und $\frac{l_1l_2}{l^2} = \frac{p-1}{p^2}$; man hat für $p = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots\ \infty$ die Tabelle

$$1 + \frac{l_1l_2}{l^2} = 1{,}25;\ 1{,}22;\ \ldots\ 1{,}00.$$

Bei der gewählten Annäherung ist es genau genug, mit dem Mittelwerte 1,2 zu rechnen, so daß man hat

$$\Sigma \sim -\tfrac{2}{5} P l_1 l_2 h.$$

Damit ergiebt sich

$$H = \frac{\tfrac{2}{5} P l_1 l_2 h - \lambda \, . \, E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\tfrac{8}{15} l h^2 + l \cdot \dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{f}}.$$

Geben die Gelenke G_1 und G_2 nicht nach, so ist $\lambda = 0$ und man hat dann

$$H = \tfrac{8}{4} P \frac{l_1 l_2}{l h \left(1 + \tfrac{15}{8} \cdot \dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{h^2 f}\right)}.$$

Setzt man $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = f \, . \, t^2$, so ist $\dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{h^2 f} = \left(\dfrac{t}{h}\right)^2$; man ersieht daraus, daß für kleine Werte von $t : h$ schon das zweite Glied in der Entwickelung des Nenners nach $t : h$ vernachlässigt werden kann, und man hat in diesem Falle

$$H \sim \tfrac{3}{4} P \frac{l_1 l_2}{l h}.$$

Für den flachen Parabelbogen ergiebt sich ebenso bei gleichmäßiger Belastung für Σ im Zähler von H

$$-\tfrac{1}{2} Q \, . \, \tfrac{1}{3} l^2 h + \tfrac{1}{2} \gamma \, . \, \tfrac{1}{5} h l^3 = -\tfrac{1}{15} Q \, . \, l^2 h.$$

Demnach ist hier

$$H = \frac{+\tfrac{1}{15} Q l^2 h - \lambda E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\tfrac{8}{15} l h^2 + l \cdot \dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{f}},$$

Geben die Gelenke G_1 und G_2 nicht nach, so ist $\lambda = 0$ und man hat dann

$$H = \frac{Q l}{8 h \left(1 + \tfrac{15}{8} \cdot \dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{h^2 f}\right)},$$

und für kleine Werte von $t : h$ wieder

$$H \sim \frac{Q l}{8 h}.$$

Nachdem H bestimmt ist, hat man Mo für jede Stelle des Balkens gegeben.

Für bewegliche Lasten sind die Einflußlinien genau so zu bestimmen, wie früher.

Flache Bogen lassen sich angenähert als flache Parabelbogen auffassen, so daß die entwickelten Formeln überhaupt für flache Bogen brauchbar sind.

208. Der flache prismatische Bogenträger ohne Gelenke, der in einer Vertikalebene eingespannt ist, bei gleicher Höhe der Einspannungspunkte. Wir betrachten nun einen gelenklosen Bogen, der beiderseits eingespannt ist,

wie es Fig. 899 zeigt. Für einen Schnitt MN bei S ergiebt sich hier

$$Mo = \overline{Mo} - R_1 x + D_1 + Hy,$$

falls $\overline{Mo}$ das Moment der Belastung ausschließlich der Reaktion R_1 bezeichnet.

Hier sind die drei Größen R_1, D_1 und H statisch-unbestimmt, während nach deren Bestimmung R_2, D_2 und $\overline{H}$ auf statischem Wege gegeben sind.

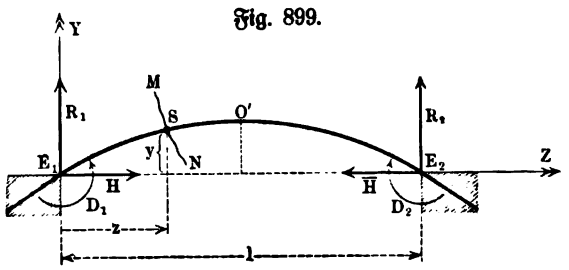
Da die Enden bei E_1 und E_2 fest eingespannt sind, so hat die Summe der Drehungen von Querschnitt gegen Querschnitt bei der Biegung den Wert Null, d. h. es ist für $arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \cdot \Delta s$

$$1) \quad \Sigma arc\,\delta = \Sigma \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \cdot \Delta s = 0.$$

Für eine wagerechte Verschiebung λ von E_2 gegen E_1 gilt ebenso wie im vorigen Paragraph gemäß Nr. 482 a) bei einem prismatischen Stabe

$$2) \quad \lambda = -\frac{1}{E\mathfrak{T}r} \Sigma y \,.\, Mo \,.\, \Delta s - \frac{H}{fE} \cdot \Sigma \xi.$$

Fig. 899.



Außerdem gilt für die vertikale Verschiebung von E_2 gegen E_1, welche wieder den Wert Null haben soll, gemäß Nr. 482 b), da $x_n = l$ ist,

$$3) \quad 0 = -l \,.\, \Sigma arc\,\delta + \Sigma x \cdot \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r} \cdot \Delta s - \frac{H}{fE} \cdot \Sigma \eta.$$

Da aber $\Sigma arc\,\delta = 0$ ist und da auch der gesamte Höhenunterschied $\Sigma \eta = 0$ ist, so bleibt von Nr. 3) nur das mittlere Glied übrig.

Da $\Sigma \xi = l$ ist, so gilt also

$$1) \quad \Sigma Mo \,.\, \xi = 0,$$

$$2) \quad \lambda = -\frac{1}{E\mathfrak{T}r} \Sigma y \,.\, Mo \,.\, \xi - \frac{Hl}{fE},$$

$$3) \quad \Sigma x \,.\, Mo \,.\, \xi = 0,$$

falls man flache Bogen behandelt, für welche $\Delta s \sim \xi$ ist.

Die drei Gleichungen lassen sich auch gewinnen, wenn man die Formänderungsarbeit des ganzen Stabes mit Hülfe von $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ bestimmt und deren partielle Ableitungen nach R_1, H und D_1 bildet, wobei zu berücksichtigen ist, daß sich E_1 und E_2 gegeneinander um λ verschieben.

Führt man in diese Gleichungen den Wert von Mo ein, so giebt deren erste für $\xi = \frac{l}{n}$

$$-\Sigma R_1 z \cdot \frac{l}{n} + \Sigma D_1 \frac{l}{n} + \Sigma H y \frac{l}{n} + \Sigma \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} = 0,$$

wobei die Summen auf die ganze Länge $E_1 E_2 = l$ zu erstrecken sind; die Ausführung giebt unmittelbar

$$1) \quad -\tfrac{1}{2} R_1 l^2 + D_1 l + H \,.\, \mathfrak{F} + \Sigma \overline{Mo} \cdot \frac{l}{n} = 0,$$

falls man die Fläche zwischen $E_1 O' E_2$ und $E_1 E_2$ durch $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Die zweite Gleichung liefert für $\xi = \frac{l}{n}$

$$-\Sigma R_1 z y \cdot \frac{l}{n} + \Sigma D_1 y \frac{l}{n} + \Sigma H y^2 \frac{l}{n} + \Sigma \overline{Mo} \,.\, y \cdot \frac{l}{n} + \frac{H \mathfrak{Tr} l}{f} = -\lambda \,.\, E \mathfrak{Tr}.$$

Da $\Sigma z \left(y \frac{l}{n}\right)$ das Massenmoment von $\mathfrak{F}$ für die Vertikale durch E_1 darstellt, welches $\mathfrak{M}_v$ heißen mag, und da ferner $\Sigma y \left(y \frac{l}{n}\right)$ das doppelte Massenmoment von F für die Horizontale $E_1 E_2$ darstellt, welches $\mathfrak{M}_h$ heißen mag, so ergiebt sich

$$2) \quad -R_1 \mathfrak{M}_v + D_1 \,.\, \mathfrak{F} + 2 H \mathfrak{M}_h + \Sigma \overline{Mo} \,.\, y \cdot \frac{l}{n} + \frac{H \mathfrak{Tr} l}{f} = -\lambda E \mathfrak{Tr}.$$

Die dritte Gleichung liefert für $\xi = \frac{l}{n}$

$$-\Sigma R_1 z^2 \cdot \frac{l}{n} + \Sigma D_1 z \frac{l}{n} + \Sigma H y z \frac{l}{n} + \Sigma \overline{Mo} \cdot z \frac{l}{n} = 0,$$

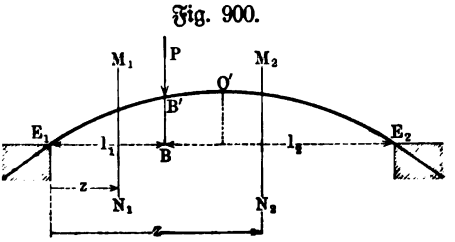
woraus wieder unmittelbar folgt

$$3) \quad -\tfrac{1}{3} R_1 l^3 + \tfrac{1}{2} D_1 l^2 + H \mathfrak{M}_v + \Sigma \overline{Mo} \,.\, z \frac{l}{n} = 0.$$

Aus den drei Gleichungen ersten Grades für R_1, D_1 und H folgen diese Größen unmittelbar und zwar bedeutet dabei

$\overline{Mo}$ das Moment der Belastung,
$\mathfrak{F}$ die Fläche zwischen $E_1 O' E_2$ und $E_1 E_2$,
$\mathfrak{M}_h$ das Moment dieser Fläche in Bezug auf die Horizontale $E_1 E_2$,
$\mathfrak{M}_v$ das Moment dieser Fläche in Bezug auf die Vertikale durch E_1.

Fig. 900.



Entsprechende Gleichungen gelten natürlich für das rechte Auflager, d. h. für die Größen R_2, D_2 und H, welche aber nach Feststellung von R_1, D_1 und H bereits auf rein statischem Wege gegeben sind.

Für eine Einzellast $[P]$ (vergl. Fig. 900) haben die von $\overline{Mo}$ abhängigen Ausdrücke die folgenden Werte. Für einen Schnitt zwischen E_1 und B ist

$$\overline{Mo} = 0,$$

während für einen Schnitt zwischen B und E_2 gilt

$$\overline{Mo} = (z - l_1)P.$$

Man hat also für 1) zu bilden

$$\Sigma P(z - l_1) \cdot \frac{l}{n},$$

wobei die Summation auf die Strecke BE_2 zu erstrecken ist; setzt man $z - l_1 = z'$, so ergiebt sich unmittelbar

$$\Sigma P(z - l_1) \frac{l}{n} = \tfrac{1}{2} P l_2^2.$$

Für 2) ist ebenso zu bilden

$$\Sigma P(z - l_1) y \frac{l}{n},$$

wobei die Summation auf die Strecke BE_2 zu erstrecken ist; setzt man $z - l_1 = z'$, so ergiebt sich

$$\Sigma P(z - l_1) y \frac{l}{n} = P \,.\, \mathfrak{M}_v^{(2)},$$

falls man durch $\mathfrak{M}_v^{(2)}$ das Massenmoment der Fläche über l_2 in Bezug auf die Vertikale durch B bezeichnet.

Für 3) ist ebenso zu bilden

$$\Sigma P(z - l_1) z \frac{l}{n},$$

wobei die Summation auf die Strecke BE_2 zu erstrecken ist; dabei ergiebt sich ohne weiteres

$$\Sigma P(z - l_1) z \frac{l}{n} = \tfrac{1}{6} P l_2^2 (3l - l_2).$$

Für gleichmäßige Belastung der Horizontale haben die von $\overline{Mo}$ abhängigen Ausdrücke folgende Werte. Für irgend einen Schnitt (z) ist, wenn $Q = l\gamma$ ist,

$$Mo = \tfrac{1}{2} \gamma z^2.$$

Man hat also für 1)

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \gamma z^2 \cdot \frac{l}{n} = \tfrac{1}{6} \gamma l^3 = \tfrac{1}{6} Q l^2.$$

Ebenso ist für 2)

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \gamma z^2 \,.\, y \frac{l}{n} = \tfrac{1}{2} \gamma \,.\, \mathfrak{Tr}_v,$$

falls $\mathfrak{Tr}_v$ das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf die Vertikale durch E_1 bezeichnet.

Endlich ist für 3)

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \gamma z^2 \cdot z \frac{l}{n} = \tfrac{1}{8} \gamma l^4 = \tfrac{1}{8} Q l^3.$$

Für einen Parabelbogen ist bei einer Pfeilhöhe h und einer Spannweite l

$$\mathfrak{F} = \tfrac{2}{3} h l,$$
$$\mathfrak{M}_v = \tfrac{2}{3} h l \,.\, \tfrac{2}{5} h = \tfrac{4}{15} h^2 l,$$

$$\mathfrak{M}_v = \tfrac{2}{3} hl \cdot \frac{l}{2} = \tfrac{1}{3} hl^2,$$

$$\mathfrak{T}r_v = \tfrac{1}{30} hl^3 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3} hl) l^2 = \tfrac{1}{5} hl^3,$$

$$\mathfrak{M}_v^{(2)} = h \frac{l_2^3 (2l - l_2)}{3 l^2}.$$

Man hat also bei einem flachen Parabelbogen für eine Einzellast

1) $-\tfrac{1}{2} R_1 l^2 + D_1 l + H \cdot \tfrac{2}{3} hl + \tfrac{1}{2} P l_2^2 = 0,$

2) $-R_1 \tfrac{1}{3} hl^2 + D_1 \cdot \tfrac{2}{3} hl + 2H \cdot \tfrac{4}{15} h^2 l + \frac{Ph}{3 l^2} l_2^3 (2l - l_2) + \frac{H \cdot \mathfrak{T}r\, l}{f} = -\lambda E \mathfrak{T}r,$

3) $-\tfrac{1}{3} R_1 l^3 + \tfrac{1}{2} D_1 l^2 + H \cdot \tfrac{1}{3} hl^2 + \tfrac{1}{6} P l_2^2 (3l - l_2) = 0.$

Daraus folgt für $\lambda = 0$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{P l_2^2 (l + 2 l_1)}{l^3} \\ D_1 &= \frac{P l_1 l_2^2}{l^3} \left(l - \frac{\frac{5}{2} l_1}{1 + \frac{45}{4} \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2}} \right) \\ H &= \tfrac{15}{4} \frac{P l_2^2 l_1^2}{l^3 h \left(1 + \frac{45}{4} \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 486\,a)$$

Die Werte für R_2 und D_2 gehen durch gegenseitige Vertauschung von l_1 und l_2 aus den Werten für R_1 und D_1 hervor. Die Reaktionen R_1 und R_2 haben dieselben Werte wie bei einem eingespannten geraden Stabe mit wagerechter Lagerung.

Ebenso hat man bei einem flachen Parabelbogen für gleichmäßige Belastung

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \tfrac{1}{2} Q \\ D_1 &= D_2 = \frac{Ql}{12} \cdot \frac{\frac{45}{4} \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2}}{1 + \frac{45}{4} \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2}} \\ H &= \frac{Ql}{8h \left(1 + \frac{45}{4} \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 486\,b)$$

Die erste Gleichung, welche auch unmittelbar angesetzt werden kann, zeigt, daß im Sonderfalle gleichmäßiger Belastung nur eine zweifache statische Unbestimmtheit vorliegt; Entsprechendes gilt überhaupt für symmetrische Bogen mit symmetrischer Belastung.

Mit der Bestimmung von R_1, D_1 und H ist das Moment für jede Stelle gegeben.

Über die Konstruktion der Einflußlinien bei beweglichen Belastungen ist den früheren Erörterungen nichts hinzuzufügen.

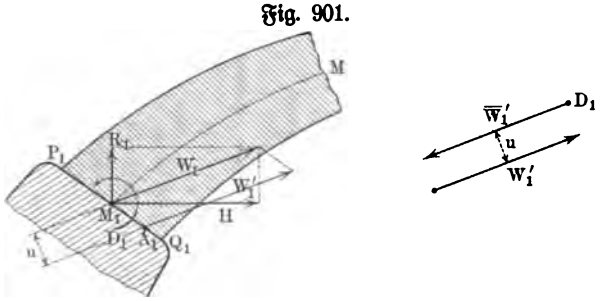
Flache Bogen lassen sich angenähert als flache Parabelbogen

auffassen, so daß die entwickelten Formeln auch überhaupt für flache Bogen benutzt werden dürfen.

209. Das Gewölbe als System von Balken mit krummer Mittellinie. Ein Gewölbe, dessen Teile sich mit vollen Flächen gegeneinander und gegen die Widerlager stützen, läßt sich als eine Reihe nebeneinander gelagerter Bogenträger ohne Gelenke auffassen, welche beiderseits eingespannt sind, so daß die Betrachtungen des § 208 ohne weiteres auf Gewölbe mit flachen Mittellinien übertragen werden können.

Wir veranschaulichen dies wieder an dem Beispiel des gewöhnlichen Gewölbes (Tonnengewölbe). Denkt man sich aus diesem, senkrecht zur Achse der Leibungen, durch zwei Ebenen vom Abstande 1 ein Stück herausgeschnitten und für dieses als Balken die (krumme) Mittellinie bestimmt, welche durch $M_1 M$ in Fig. 901 dargestellt werden mag, so ist durch die Angabe von $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ für den Endpunkt M_1 der Mittellinie alles übrige bestimmt. Bildet man aus $[R_1]$ und $[H]$ die Resultante $[W_1]$ und giebt man dem Werte von $[D_1]$ die Form $W_1' \cdot u$, so giebt die Vereinigung von $[D_1]$ und $[W_1]$ den Punkt A_1, in welchem die Reaktion $[W_1']$ vom Werte W_1 das Widerlager $P_1 Q_1$ angreift. Man sieht daraus, daß statt der Angabe von $[D_1]$ auch die Angabe der Lage von A_1 eintreten kann, und umgekehrt.

Fig. 901.



Da eine entsprechende Betrachtung für jede Fuge gilt, so bestimmt die Angabe von $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$, aus welcher die entsprechenden Werte für jede andere Fuge auf statischem Wege folgen, auch für jede Fuge die Richtung und die Größe und den Angriffspunkt des in ihr übertragenen Druckes, d. h. die Drucklinie bezw. die Stützlinie des Gewölbes ist völlig bestimmt, falls für die Fuge am Widerlager $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ gegeben sind bezw. für irgend eine Fuge die entsprechenden Größen.

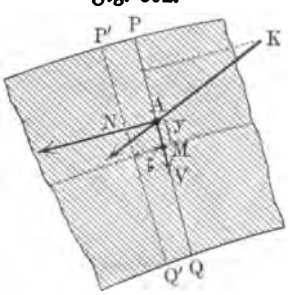
Demnach werden die früheren Betrachtungen über die Stützlinien eines Gewölbes (vergl. S. 580 u. f.) auf Grund dieser Betrachtung ergänzt. In dem damals ausgeführten Falle des symmetrisch belasteten Tonnengewölbes blieb der Wert des Horizontalschubes $[H]$ und die Lage von dessen Angriffspunkt in der Scheitelfuge und damit auch die Gestalt und die Lage der thatsächlich auftretenden Stützlinie innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt, und es wurde hinzugefügt, daß diese Unbestimmtheit sich erst auf Grund des elastischen Verhaltens des Materiales heben lasse. Während das damals durchgeführte Beispiel eine zweifache statische Unbestimmtheit zeigte, entsprechend dem beiderseits eingespannten, symmetrischen Bogenträger mit sym-

metrischer Belastung, liegt im allgemeinen bei Gewölben, wie schon der Fall des unsymmetrisch belasteten Tonnengewölbes zeigt, eine dreifache statische Unbestimmtheit vor, entsprechend dem allgemeinen Falle des beiderseits eingespannten Bogenträgers; diese dreifache Unbestimmtheit wird durch die Größen $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ bezw. durch entsprechende Größen genauer dargestellt. Ebenso stellt sie sich in dem arithmetischen Ausdruck für die Stützlinie $y = f(x)$ dar, da bei gegebener Belastung nur $\varphi(x)$ für $f''(x) = \frac{\varphi(x)}{H}$ gegeben ist, so daß neben H noch zwei Integrationskonstanten als zunächst unbestimmte Größen auftreten.

Die Bestimmung von $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ läßt sich, wie schon angegeben, in formeller Hinsicht stets durch die Theorie des krummen Balkens erledigen, dennoch häufen sich die Schwierigkeiten der Rechnung, falls die Mittellinie des Gewölbes nicht eine relativ flache Kurve ist.

Für derartige Untersuchungen ist dann ein von Winkler abgeleiteter Satz von praktischer Bedeutung, der für flache Gewölbe von konstanter Stärke folgendermaßen hergeleitet werden kann.

Fig. 902.



Wird, wie Fig. 902 zeigt, in einer, senkrecht zur Mittellinie stehenden Fuge PQ der Druck $[K]$ in A übertragen, so läßt sich $[K]$ für die Fuge in eine Normalkomponente $[N]$ und in eine in die Fuge fallende Komponente $[V]$ zerlegen, so daß für die Fuge PQ in Bezug auf M für $AM = y$ die Kräfte $[N]$, $[V]$ und das Moment $[Mo] = [Ny]$ im Sinne der Theorie des krummen Balkens in Rechnung zu stellen sind. Sieht man, wie bisher, von dem Einfluß von $[V]$ ab, so ist die Formänderungsarbeit für ein Volumenelement bei PQ nur durch $[N]$ und $[Mo] = [Ny]$ bestimmt.

Denken wir uns das Volumenelement bei PQ durch einen benachbarten Querschnitt bestimmt, welcher mit PQ auf der Mittellinie den Abstand ζ bestimmt, so ist das entsprechende Volumen angenähert durch

$$d \,.\, 1 \,.\, \zeta$$

gegeben, falls man $PQ = d$ setzt und falls der aus dem Gewölbe ausgeschnittene Balken die Breite 1 hat.

Man hat demnach als Formänderungsarbeit für ein Volumenelement

$$\tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathrm{r}} \cdot \zeta + \tfrac{1}{2}\frac{\left(\frac{N}{f}\right)^2}{E} \cdot d \,.\, 1 \,.\, \zeta$$

oder, da $f = d \,.\, 1$ und $\mathfrak{T}\mathrm{r} = \frac{1 \,.\, d^3}{12}$ ist, auch

$$\frac{N^2}{2Ed} \cdot \zeta\left[\frac{12\,y^2}{d^2} + 1\right].$$

Bildet man diesen Ausdruck für alle Elemente der Mittellinie, so erhält man bei Summation dieser Ausdrücke die gesamte Formänderungsarbeit A, welche für die thatsächlich vorhandenen Werte von $[N]$, $[V]$ und $[Mo]$ zu einem Minimum wird.

Bei relativ flachen Gewölben zeigen die Werte von $[H]$ für die verschiedenen Stützlinien, welche zunächst als möglich erscheinen, nur geringe Unterschiede, und infolgedessen kann, da die Fugen, wie PQ, überdies gegen die Vertikale nur eine relativ geringe Abweichung zeigen, hier mit einem Mittelwert von N gerechnet werden, so daß bei konstanter Stärke (d) des Gewölbes A zugleich mit

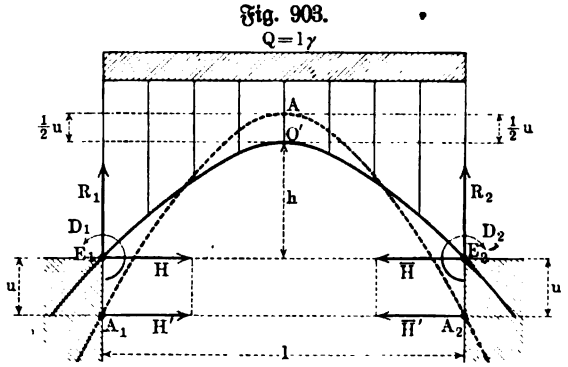
$$\Sigma\left(\frac{12\,y^2}{d^2}+1\right), \text{ d. h. mit } \Sigma y^2$$

ein Minimum wird.

Die thatsächlich auftretende Stützlinie eines Gewölbes verläuft demnach so, daß ihre Abweichung (Σy^2) von der Mittellinie möglichst gering ist.

Dies ist der Inhalt des Winklerschen Satzes, dessen allgemeine Gültigkeit und genauere Fassung natürlich durch weitergehende Betrachtungen dargethan werden muß.

Fig. 903.



Was die genauere Fassung anlangt, so ist zu bemerken, daß der Einfluß der Normalkräfte $[N]$, welchen eine Veränderung der ursprünglichen Mittellinie entspricht, noch eine besondere Berücksichtigung fordert.

Wählt man nämlich im Hinblick auf den Winklerschen Satz als Mittellinie eines Gewölbes eine, bei der gegebenen Belastung zunächst als möglich erscheinende Stützlinie, so müßte diese bei der Ausführung des Gewölbes in konstanter Stärke dessen thatsächliche Stützlinie werden, wenn nicht durch die Normalkräfte $[N]$ eine Abweichung der thatsächlichen Stützlinie von der Mittellinie bedingt würde.

Um diese Abweichung der Stützlinie von der Mittellinie infolge des Einflusses von $[N]$ beurteilen zu können, betrachten wir zunächst einen gleichmäßig belasteten flachen paraboliſchen Träger, wie er auf S. 1221 behandelt wurde. Streicht man in dem Ansatze der entsprechenden Entwickelungen das Glied mit N, so erhält die Größe $\frac{45}{4}\frac{\mathfrak{T}r}{fh^2}$ in den Schlußformeln den Wert Null. Bezeichnet man diese Größe, durch welche der Einfluß von $[N]$ dargestellt wird, mit ν, so ist nach den früheren Entwickelungen (vergl. S. 1221)

$$R_1=\tfrac{1}{2}Q,\quad H=\frac{Ql}{8h(1+\nu)}\quad\text{und}\quad D_1=\frac{Ql}{12}\cdot\frac{\nu}{1+\nu}.$$

Giebt man D_1 die Form $u \,.\, H$, so ist $u = \frac{2}{3} h \,.\, \nu$, so daß bei einer Vereinigung von $[H]$ und $[D_1]$ der Angriffspunkt A_1 der Resultante vom Werte H in A_1 liegt für $E_1 A_1 = \frac{2}{3} h\nu$. Für einen Schnitt durch den Scheitel O' ist

$$Mo = -R_1 \frac{l}{2} + (\tfrac{1}{2} Q) \frac{l}{4} + H(h + \tfrac{2}{3} h\nu) = -H \,.\, \tfrac{1}{3} h\nu.$$

Um dieses Moment durch eine horizontale Kraft vom Werte H darzustellen, hat man für diese den Angriffspunkt A so zu wählen, daß $O'A = \frac{1}{3} h\nu$ ist.

Die parabolische Stützlinie geht also hier durch die Punkte A_1, A und A_2 und ist also gegen E_1 und E_2 um $\frac{2}{3} h\nu$ gesenkt und gegen O' um $\frac{1}{3} h\nu$ gehoben. Vergl. Fig. 903.

Für $\nu = 0$ fällt die Stützlinie $A_1 A A_2$ mit der Parabel $E_1 O' E_2$ zusammen, so daß also die Mittellinie des Trägers für $\nu = 0$ zugleich dessen Stützlinie ist.

Faßt man Fig. 903 auf als Vertikalschnitt durch ein Gewölbe, dessen Mittelfläche in $E_1 O' E_2$ durchtritt, so ist die Mittellinie $E_1 O' E_2$ auch hier Stützlinie für $\nu = 0$, während die wirkliche Stützlinie, dem Werte von ν entsprechend, sich im Scheitel um $\frac{1}{3} h\nu$ darüber erhebt und an den Widerlagern um $\frac{2}{3} h\nu$ darunter senkt.

Bei einem Gewölbe von konstanter Stärke d ist für einen Streifen von der Breite 1 wieder $f = d \,.\, 1$ und $\mathfrak{T}r = \dfrac{1 \,.\, d^3}{12}$ und also

$$\nu = \tfrac{45}{4} \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{f h^2} = \tfrac{15}{16} \frac{d^2}{h^2} \sim \frac{d^2}{h^2}.$$

Man hat demnach im Scheitel die Verschiebung $\frac{1}{8} \frac{d^2}{h}$ und an den Widerlagern die Verschiebungen $\frac{2}{3} \frac{d^2}{h}$ für die Stützlinie einzuführen, wobei d die konstante Stärke des Gewölbes und h die Pfeilhöhe seiner Mittellinie bezeichnet.

Man überträgt diese Ergebnisse in der Praxis auch auf entsprechende Gewölbe von veränderlicher Stärke und berechnet mit deren Mittelwerte d die Größe ν.

Da ferner flache Bogen in einer gewissen Annäherung als flache Parabelbogen angesehen werden können, so pflegt man in der Praxis das durch vorstehende Untersuchung bezeichnete Verfahren überhaupt auf flache Gewölbe auszudehnen, welche angenähert gleichmäßig belastet sind. Man zeichnet demgemäß zunächst eine Stützlinie, welche durch die Mitten der Scheitelfuge und der beiden Kämpferfugen geht, und leitet aus dieser durch Änderung ihrer Bestimmungsstücke andere Stützlinien ab, welche sich der Mittellinie möglichst anschließen. Unter diesen wählt man (nach Augenmaß) die günstigste aus und verlegt ihren Scheitel um $\frac{1}{8} \frac{d^2}{h}$ nach oben, ihre Schnitte mit den Widerlagern um $\frac{2}{3} \frac{d^2}{h}$ nach unten: die Stützlinie, welche durch die hiermit

bezeichneten drei Punkte geht, wird als die thatsächliche Stützlinie angesehen.

Ist die thatsächliche Stützlinie gefunden, so lassen sich die Spannungen im Gewölbe leicht bestimmen.

Würde die thatsächliche Stützlinie genau mit der Mittellinie zusammenfallen, so würden die Drucke von Fuge zu Fuge in deren Schwerpunkten, d. h. centrisch übertragen, so daß die Berechnung der Spannungen sehr einfach wäre. Wegen des Einflusses von $[N]$ werden die Drucke aber im allgemeinen excentrisch (y) übertragen, so daß bei voller Fugenauflagerung die Spannung in irgend einer Fuge (d) bestimmt ist durch

$$\sigma = \frac{N}{d \,.\, 1} \pm \frac{6 \,.\, Ny}{d^3},$$

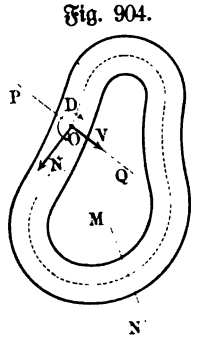
während sich bei centrischer Beanspruchung ($y = 0$) für diese Spannung der Wert $\frac{N}{d}$ ergäbe.

Bei der ganzen Betrachtung ist vorausgesetzt, daß die Materialien eines Gewölbes dem Gesetze von Hooke folgen. Da diese Voraussetzung nur in sehr beschränktem Maße zutrifft, so sind die Ergebnisse der Untersuchung auch nur als Annäherungen zu betrachten.

Giebt man einem Gewölbe Gelenke an den beiden Widerlagern, so ist es als Bogenträger gemäß § 207 aufzufassen und stellt demnach eine einfache statisch-unbestimmte Konstruktion dar; fügt man noch ein Scheitelgelenk hinzu, so geht es in eine statisch-bestimmte Konstruktion über, beides unter der Voraussetzung, daß man dabei die möglichen Fehler des Materials und die Ungenauigkeiten in der Montierung, sowie den Einfluß der Temperatur u. s. w., welche bisher überhaupt vernachlässigt wurden, nicht berücksichtigt.

210. Der Ring als Balken mit krummer Mittellinie und Röhren als Systeme von Ringen. Wenn die Mittellinie eines prismatischen Ringes durch eine ebene geschlossene Kurve gebildet wird, wie es Fig. 904 zeigt, so kann man sich den Ring an einer Stelle PQ durchschnitten denken und ihn dann als einen Balken mit krummer Mittellinie auffassen, der auf beiden Seiten von PQ fest eingespannt ist.

Fig. 904.



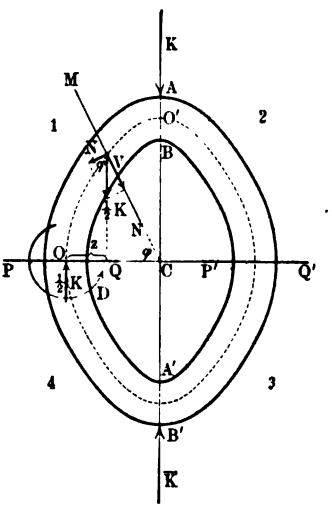
Liegen die angreifenden Kräfte in der Ebene der Mittellinie, so reichen die bisher entwickelten Formeln aus, um für jede Schnittstelle MN die dort vorhandenen Spannungen und Formänderungen zu ermitteln.

Hat man nämlich durch den Schnitt PQ eine Normalkraft $[N]$, die in O senkrecht zu PQ steht, eine Kraft $[V]$, welche innerhalb PQ durch O geht, und ein Moment $[D]$, welches um O dreht, zerstört, so kann man diese Größen genau so verwenden, wie die Größen $[R_1]$, $[H]$ und $[D_1]$ in § 208.

Nimmt man sie zunächst als bekannt an, so lassen sich die entsprechenden Werte für einen beliebigen Schnitt MN mit ihrer Hülfe darstellen, so daß man dann durch die Gleichungen auf S. 1221 oder durch die Ableitungen der Formänderungsarbeit zu ihrer Bestimmung gelangt.

Für den doppelt-symmetrischen Ring der Fig. 905 hat man für den Schnitt PQ bei der angegebenen (symmetrischen) Belastung als Einwirkung auf den linken oberen Teil

Fig. 905.



$$N = \tfrac{1}{2}K \quad \text{und} \quad V = 0,$$

weil sich einerseits $[K]$ gleichmäßig auf PQ und $P'Q'$ verteilen muß und weil innerhalb PQ mit einer Kraft $[V]$, welche auf Teil 1 wirkt, eine Gegenkraft $[\overline{V}]$ auftreten müßte, welche auf Teil 4 wirkt, während sich Teil 1 und Teil 4 thatsächlich in demselben Zustande befinden.

Wegen der Symmetrie liegt also hier eine einfache statische Unbestimmtheit vor, welche sich lediglich auf $[D]$ bezieht.

Um $[D]$ zu bestimmen, beachten wir, daß die Formänderung von Teil 1 so vor sich geht, daß AB und PQ dabei zu einander senkrecht bleiben und daß also für alle Querschnitte zwischen PQ und AB die Summe der Drehungswinkel (δ) der einzelnen Querschnitte den Wert Null hat. Für einen Schnitt MN ist

$$Mo = D - \tfrac{1}{2}K \,.\, \varepsilon \quad \text{und} \quad V = \tfrac{1}{2}K \,.\, \sin\varphi \quad \text{und} \quad N = \tfrac{1}{2}K \,.\, \cos\varphi.$$

Benutzt man die angenäherte Formel

$$arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s,$$

so ist also für $\varphi = 0^0 \ldots 90^0$

$$0 = \Sigma\, arc\,\delta = \Sigma \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s = \frac{1}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Sigma (D - \tfrac{1}{2}K\varepsilon)\,\Delta s$$

zu bilden, woraus sich der Wert von D ergiebt.

Dabei sind Δs und ε durch die Art der Mittellinie bestimmt, so daß eine graphische Ausführung der Summation stets in beliebiger Annäherung möglich ist und demnach auch D stets gefunden werden kann.

Ist die Mittellinie ein Kreis vom Radius r, so zerlegen wir den Quadranten zwischen PQ und AB in n Teile von der Größe ϑ, so daß $\varphi = p \,.\, \vartheta$ und $\Delta s = r \,.\, arc\,\vartheta$ wird, während außerdem $\varepsilon = r(1 - \cos\varphi)$ ist. Man hat also in diesem Falle

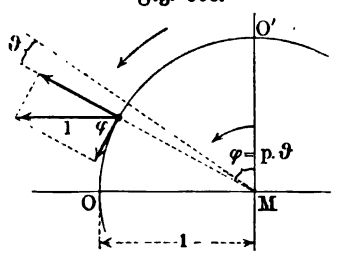
$$\Sigma\, r\,[D - \tfrac{1}{2}Kr(1 - \cos\varphi)] \,.\, arc\,\vartheta = 0$$

oder

$$(D - \tfrac{1}{2}Kr)\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}Kr \,.\, \Sigma \cos(p \,.\, \vartheta) \,.\, arc\,\vartheta = 0.$$

Um die letzte Summation auszuführen, betrachten wir die Arbeit einer Kraft [1], welche in Fig. 906 parallel zu OM ist für den Weg $\overset{\frown}{O'O}$ ihres Angriffspunktes auf einem Kreise vom Radius 1. Da nur die tangentiale Komponente $\cos\varphi$ Arbeit leistet, so ist diese Arbeit bei $\varphi = p\,.\,\vartheta$ darstellbar

Fig. 906.



als $\Sigma\cos(p\vartheta)\,.\,arc\,\vartheta$ für $\varphi = 0^0 \ldots 90^0$, während sie anderseits unmittelbar als 1 gegeben ist, da sich der Angriffspunkt von [1] in der Richtung von [1] um die Strecke 1 verschiebt. Man hat also

$$(D - \tfrac{1}{2}Kr)\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}Kr = 0,$$

woraus

$$D = +\tfrac{1}{2}Kr\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = +0{,}18\,Kr$$

folgt; der Pfeil von $[D]$ in Fig. 905 ist also richtig, d. h. die vorhandene Krümmung wird in O verstärkt.

Demnach gilt allgemein

$$Mo = +0{,}18\,Kr - \tfrac{1}{2}Kr(1 - \cos\varphi) = -0{,}32\,Kr + \tfrac{1}{2}Kr\cos\varphi$$

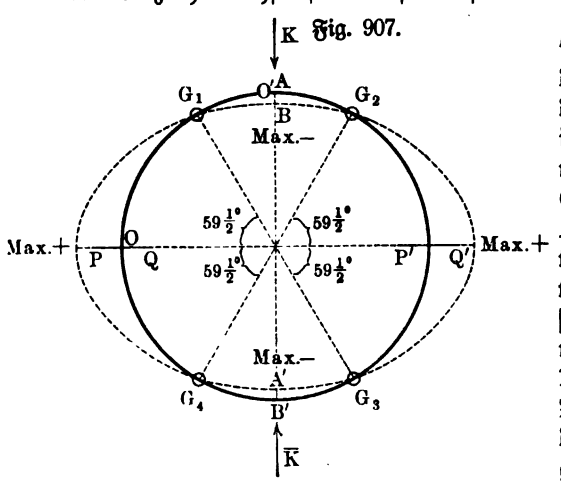
für $\varphi = 0^0 \ldots 90^0$.

In A ist ($\varphi = 90^0$)

$$Mo = -0{,}32\,Kr.$$

Der Vorzeichenwechsel für Mo findet für $M = 0$ bei $\varphi = 59^0\,28'$ statt.

Fig. 907.



Mit Rücksicht auf die symmetrischen Verhältnisse der Fig. 907 sind demnach die Stellen G_1, G_2, G_3, G_4 in Bezug auf Biegung spannungslos und können durch Gelenke ersetzt werden; in PQ und $P'Q'$ treten positive, in AB und $A'B'$ treten negative Maxima von $[Mo]$ auf, von denen die negativen gefährlicher sind. Unter dem Einfluß dieser Momente nimmt der Ring die in Fig. 907 punktiert gezeichnete Form an. Für die Maximalspannung in A gilt $\sigma \sim \dfrac{Mo\,.\,w}{\mathfrak{T}r}$.

Berücksichtigt man den Einfluß von $[N]$, so gilt gemäß Nr. 475 b) für $B\varrho \sim \mathfrak{T}r$, da $[K]$ eine Druckkraft ist,

$$arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}\cdot\Delta s - \frac{K}{2frE}\cos\varphi\,.\,\Delta s.$$

Für $\Sigma arc\,\delta = 0$ ist noch die Summation

$$-\frac{1}{f\varrho E}\Sigma N \,.\, \Delta s = \frac{K}{2frE}\Sigma cos\,\varphi \,.\, \Delta s = \frac{K}{2fE}\Sigma cos\,(p\vartheta) \,.\, arc\,\vartheta$$

auszuführen.

Da die Summation wieder 1 liefert, so ist bei Berücksichtigung von $[N]$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r}{E\mathfrak{T}r}(D - 0{,}18\,Kr) - \frac{K}{2fE} = 0,$$

woraus

$$D = 0{,}18\,Kr + \frac{K\,.\,\mathfrak{T}r}{\pi fr}$$

folgt.

Für einen Ring von kreisförmigem Querschnitt (R) ist $\mathfrak{T}r = \frac{1}{4}\pi R^4 = \frac{1}{4}R^2\,.\,f$, so daß hier

$$\frac{K\,.\,\mathfrak{T}r}{\pi fr} = \tfrac{1}{4}\frac{K\,.\,R^2}{\pi r}$$

ist, wonach der Einfluß $(R^2 : r)$ von N beurteilt werden kann.

Man hat hier allgemein

$$Mo = -0{,}32\,Kr + \frac{K\,.\,\mathfrak{T}r}{\pi fr} + \tfrac{1}{2}Kr\,cos\,\varphi.$$

In A ist jetzt $(\varphi = 90^0)$

$$Mo = -0{,}32\,Kr + \frac{K\,.\,\mathfrak{T}r}{\pi fr},$$

d. h. $[N]$ verändert die Spannung in A, für welche

$$\sigma \sim \frac{Mo\,.\,w}{\mathfrak{T}r}$$

gilt.

Um die Verlängerung λ des wagerechten Durchmessers für den Ring zu bestimmen, denken wir ihn rechts von AB eingespannt und betrachten die wagerechte Verschiebung von O, welche $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Für sie gilt gemäß Formel Nr. 482 a)

$$\tfrac{1}{2}\lambda = \Sigma(y_n - y)\,arc\,\delta + \Sigma\xi\cdot\frac{N}{fE}.$$

Für die Achsen der Fig. 905 ist $y = r\,.\,sin\,\varphi$, während y_n als Vertikalkoordinate von O den Wert Null hat.

Für $arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}\cdot\Delta s$ und $N = 0$ ist also

$$\tfrac{1}{2}\lambda \sim -\frac{r}{E\mathfrak{T}r}\Sigma Mo\,.\,sin\,\varphi\,.\,\Delta s = +\frac{Kr^2}{E\mathfrak{T}r}\Sigma(0{,}32 - \tfrac{1}{2}cos\,\varphi)\,sin\,\varphi\,.\,\Delta s$$

$$= \frac{Kr^2}{E\mathfrak{T}r}[0{,}32\,\Sigma sin\,\varphi\,.\,\Delta s - \tfrac{1}{4}\Sigma sin\,2\varphi\,.\,\Delta s].$$

Für $\varphi = p\,.\,\vartheta$ und $\Delta s = r\,.\,arc\,\delta$ sind also für $\varphi = 0^0 \ldots 90^0$ die Summationen

$$\Sigma sin\,(p\vartheta)\,.\,arc\,\vartheta \quad \text{und} \quad \Sigma sin\,(2p\vartheta)\,.\,arc\,\vartheta$$

auszuführen, welche gemäß Fig. 906 für $\varphi = 90^0 - \psi$ beide 1 liefern. Demnach ist

$$\tfrac{1}{2}\lambda \sim \frac{Kr^3}{E\mathfrak{T}r}(0{,}32 - \tfrac{1}{4}) = 0{,}07\,\frac{Kr^3}{E\mathfrak{T}r},$$

woraus

$$\lambda \sim 0{,}14\,\frac{Kr^3}{E\mathfrak{T}r}$$

folgt.

Für einen Ring von kreisförmigem Querschnitt (R) hat man z. B. $\mathfrak{T}r = \frac{1}{4}R^4\pi$ zu setzen.

Für eine genauere Behandlung der Aufgabe muß man in $\Sigma\, arc\,\delta = 0$ für $arc\,\delta$ den Wert der Formel Nr. 475 a) einführen, so daß für $\Delta s = r\,.\,arc\,\vartheta$

$$\frac{1}{fE}\,\Sigma\left(\frac{Mo}{r} + \frac{Mof}{B} + N\right) arc\,\vartheta = 0$$

ist. Führt man $Mo = D - \frac{1}{2}Kr(1 - cos\,\varphi)$ und $N = -\frac{K}{2}cos\,\varphi$ in diese Formel ein, so ergiebt sich auf demselben Wege wie oben

$$D = \tfrac{1}{2}Kr\left(1 - \frac{2}{\pi(1+\nu)}\right)$$

für $\nu = \dfrac{B}{fr}$.

Da $\nu = \dfrac{Br}{fr^2} \sim \dfrac{\mathfrak{T}r}{fr^2}$ ist, so ist $\dfrac{1}{1+\nu} \sim 1 - \nu + \nu^2 \pm \cdots$ und man hat in erster Annäherung

$$D = \tfrac{1}{2}Kr\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}18\,Kr$$

und in zweiter Annäherung

$$D = \tfrac{1}{2}Kr\left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2\,\mathfrak{T}r}{\pi fr^2}\right) = 0{,}18\,Kr + \frac{K\,\mathfrak{T}r}{\pi fr},$$

was den oben gewonnenen Werten entspricht.

Für eine genauere Beurteilung der Spannung ist nun

$$Mo = \tfrac{1}{2}Kr\left(1 - \frac{2}{\pi(1+\nu)}\right) - \tfrac{1}{2}Kr(1 - cos\,\varphi)$$

in die Formel Nr. 476) für σ_v einzuführen, so daß

$$\sigma_v = \tfrac{1}{2}\frac{K}{f}\left[-\frac{2}{(1+\nu)\pi} + \frac{1}{\nu}\left(-\frac{2}{(1+\nu)\pi} + cos\,\varphi\right)\frac{v}{r+v}\right]$$

ist.

Für $v = 0$ ergiebt sich

$$\sigma_0 = -\frac{K}{f}\cdot\frac{1}{(1+\nu)\pi},$$

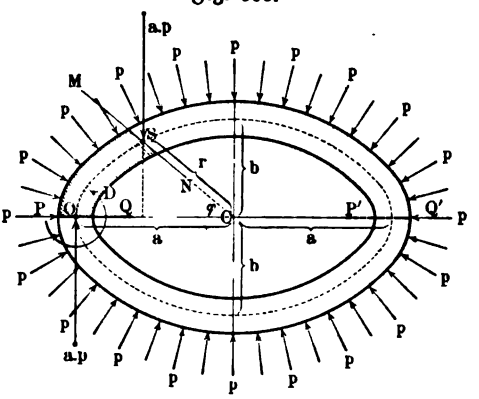
d. h. in der Mittellinie ist die Spannung unabhängig von φ, so daß in ihr also eine konstante Druckspannung (—) herrscht.

Für $cos\,\varphi = \dfrac{2}{(1+\pi)\nu}$ wird ein Querschnitt bezeichnet, in welchem σ_v für jeden Wert von v den konstanten Wert σ_0 erhält.

Für $\sigma_v = 0$ stellt sich v als Funktion von φ dar, d. h. die Stellen $\sigma_v = 0$ bilden in den Schnitten der Fig. 905 Kurven, und zwar ziehen sich diese von Punkten des äußeren und von Punkten des inneren Randes nach der Mittellinie zu, ohne diese zu berühren.

Für weitere Ausführungen muß man die Art des Querschnittes einführen, woraus sich $v = \frac{B}{fr}$ ergiebt.

Fig. 908.



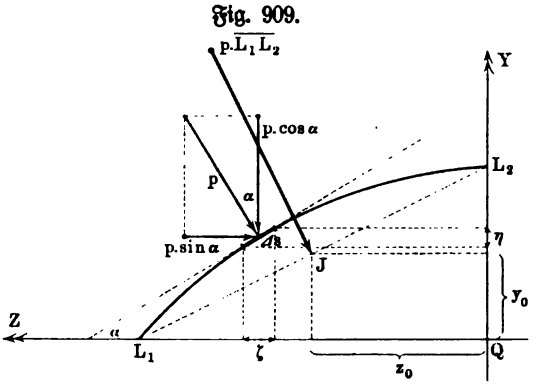
Man findet, daß im allgemeinen der Querschnitt AB am gefährlichsten ist und auf der Innenseite durch tangentiale Zugspannungen zerstört wird, falls K zu groß ist.

Gemäß dieser Betrachtung sind die angenäherten Ergebnisse im Eingange dieses Paragraphen zu beurteilen.

Die Betrachtung des ganzen Paragraphen gilt auch für ein Stück einer Röhre, welches senkrecht zu deren Achse durch zwei Parallelebenen ausgeschnitten ist, solange dieses angenähert als Ring aufgefaßt werden kann.

Bei gleichmäßig verteiltem Druck von der Spannung p auf ein Röhrenstück von der Breite 1, dessen Mittelschnitt in Fig. 908 dargestellt ist, hat man für den Schnitt $PQ \ldots P'Q'$ die Projektion der gedrückten Fläche (vergl. Bd. II, S. 15 f.) auf die Ebene $PQ \ldots P'Q'$ als Druckfläche einzuführen, d. h. $2a \,.\, 1$, so daß der entsprechende Druck $(2a \,.\, 1)p$ beträgt. Wegen der gleichmäßigen Verteilung dieses Druckes auf PQ und $P'Q'$ ist in O die Reaktion $[ap]$ anzusetzen und außerdem ein Moment $[D]$.

Fig. 909.



Für einen beliebigen Schnitt MN ist dann für das Stück zwischen PQ und MN die Resultierende der Druckkräfte für die Elemente der Fläche zwischen PQ und MN zu bestimmen.

Stellt L_1L_2 ein beliebiges Stück der Mittellinie der Röhre dar (vergl. Fig. 909), so läßt sich der Druck $p(1 \,.\, \Delta s)$ für ein Element Δs zerlegen in die Komponenten $p \cos\alpha \,.\, \Delta s = p \,.\, \zeta$ und $p \,.\, \sin\alpha \,.\, \Delta s = p \,.\, \eta$, so daß die Resultanten des Drucks in der Richtung L_2Q durch $\Sigma p \,.\, \zeta = p \,.\, L_1Q$ und in der Richtung L_1Q durch $\Sigma p \,.\, \eta = p \,.\, L_2Q$ gegeben sind. Die

Kräfte in der Richtung L_2Q haben für Q als Drehpunkt das Moment $\Sigma(p \,.\, \zeta)z = \frac{1}{2}p \,.\, \overline{L_1Q}^2$, so daß die Resultante $p \,.\, L_1Q$ von Q den Abstand $z_0 = \frac{1}{2}L_1Q$ hat; ebenso ergiebt sich $y_0 = \frac{1}{2}L_2Q$ für den Abstand der andern Resultante von Q. Demnach geht die Resultante vom Werte $p\sqrt{\overline{L_1Q}^2 + \overline{L_2Q}^2} = p \,.\, L_1L_2$ durch die Mitte J der Sehne L_1L_2 und steht auf dieser senkrecht.

Demnach hat man in Fig. 908 für S als Drehpunkt das Moment des Drucks auf das Ringstück zwischen PQ und MN anzusetzen als

$$(p \,.\, OS) \,.\, \tfrac{1}{2}OS = \tfrac{1}{2}p \,.\, (r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi).$$

Man hat also für S

$$\begin{aligned} Mo &= D - ap(a - r\cos\varphi) + \tfrac{1}{2}p \,.\, (r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi) \\ &= D - \tfrac{1}{2}p(a^2 - r^2). \end{aligned}$$

Die Gleichung $\Sigma arc\,\delta = 0$ für $\varphi = 0^0 \ldots 90^0$ liefert wieder den Wert von D.

Für den Kreis als Mittellinie ($r = a$) ist natürlich $Mo = D$. Hier ist $\Sigma arc\,\delta = 0$ bei genauem Ansatze durch

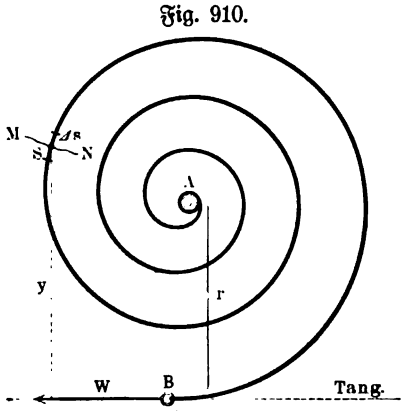
$$\Sigma\left(D \cdot \frac{B + fr}{Br} - rp\cos\varphi\right) arc\,\vartheta = 0$$

bestimmt.

Für Zugkräfte gilt Entsprechendes.

211. Federn mit krummer Mittellinie. Die bisherigen Betrachtungen von Stäben, deren Mittellinie eine ebene Kurve ist, reichen für gewisse Federn, welche als krumme Stäbe mit gewundener Mittellinie aufgefaßt werden können, nicht mehr aus. Anstatt aber auf die äußerst verwickelte Theorie der Stäbe mit gewundener Mittellinie einzugehen, pflegt man sich für die Praxis mit einer sehr rohen Annäherung zu begnügen, was sich dadurch rechtfertigt, daß bislang noch keine ausschlaggebenden Versuche vorliegen, um die Theorie von Stäben mit gewundener Mittellinie sachgemäß zu prüfen.

Fig. 910.



Man pflegt die Federn, deren Zweck es ist, Arbeit aufzuspeichern, in Biegungsfedern und in Drehungsfedern einzuteilen, je nachdem sie hauptsächlich auf Biegung oder hauptsächlich auf Torsion beansprucht werden.

In den Anwendungen bezw. Übungen zu diesem Abschnitte kommen die Biegungsfedern und die Drehungsfedern zur Sprache, welche unmittelbar oder mittelbar durch die Theorie des geraden Stabes behandelt werden können, so daß es sich hier darum handelt, die Biegungsfeder, welche als ebene Spiralfeder bezeichnet wird, die gewundene Biegungsfeder und die gewundenen Drehungsfedern zu behandeln.

1. Die ebene Spiralfeder. Diese Feder ist (vergl. Fig. 910) in der Mitte A an einer drehbaren Spindel befestigt, mit deren Hülse sie „aufgezogen", d. h. in einen ganz bestimmten Spannungszustand versetzt werden kann, da sie außerdem noch bei B befestigt ist.

Erfahrungsmäßig übt die gespannte Feder in B einen tangentialen Zug aus, dem die Reaktion $[W]$ entspricht.

Zerschneidet man die Feder in gespanntem Zustande durch MN, so wirkt an dem äußeren Teile der Feder nur die Kraft $[W]$ am Arme y, so daß für S als Moment $W \,.\, y$ in Wirkung ist. Für die Krümmungsänderung eines Elementes bei S gilt demnach nach Gleichung Nr. 479)

$$arc\,\delta = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\,\Delta s = \frac{Wy}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Delta s.$$

Hat man beim Aufziehen der Feder eine Drehung vom Winkel α beschrieben, so ist

$$arc\,\alpha \sim \Sigma\, arc\,\delta$$

und man hat also

$$arc\,\alpha = \frac{W}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \Sigma y \,.\, \Delta s.$$

Da $\Sigma y \,.\, \Delta s$ das Massenmoment der Feder in Bezug auf die durch $[W]$ bestimmte Gerade ist, so hat man bei einer Federlänge l für $AB = r$ in einer gewissen Annäherung

$$\Sigma y \,.\, \Delta s \sim l \,.\, r$$

und demnach auch

$$arc\,\alpha \sim \frac{W}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot lr.$$

Um die Formänderungsarbeit zu bestimmen, beachten wir, daß die zum Aufziehen nötigen Kräfte an der Spindel in dem Augenblick, als das Aufziehen vollendet war, mit $[W]$ im Gleichgewichte standen und daß sie infolgedessen, abgesehen von einer Kraft durch A, ein Moment $Mo = Wr$ darstellten, dessen Arbeit der Drehung $arc\,\alpha$ entspricht und das demnach den Betrag $Wr \,.\, arc\,\alpha$ hat. Die entsprechende Formänderungsarbeit ist also

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\, Wr\, arc\,\alpha \sim \tfrac{1}{2}(Wr)^2 \cdot \frac{l}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Um diese mit der größten Spannung, welche in der Feder auftritt, in Beziehung setzen zu können, muß man die Stelle der Feder, an welcher diese auftritt, kennen. Entspräche sie dem Schnitte MN, so wäre für diese Stelle das Moment Wy anzusetzen, und man hätte in Annäherung

$$W \,.\, y = \sigma_{max} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w}.$$

Für y geben etwa die Grenzen $0 \ldots 2r$ den möglichen Spielraum an. Man pflegt $y = r$ zu setzen, so daß

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot \frac{l\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 487)$$

wird.

Für einen rechteckigen Querschnitt, bei welchem h der Ebene der Spiralfeder parallel ist, während b auf ihr senkrecht steht, ist $\mathfrak{T}r = \frac{bh^3}{12}$ und $w = \frac{h}{2}$, so daß

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot \frac{bhl}{3} = \tfrac{1}{6}\frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot V$$

ist, falls das Volumen der Feder durch V bezeichnet wird.

Föppl setzt $y = 2r$ und erhält infolgedessen für das Rechteck [1])

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{24}\frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot V.$$

Natürlich ist $\sigma_{max} \leqq k_b$ zu halten, so daß bei Ausnutzung des Materials für die Feder mit rechteckigem Querschnitt gilt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}\frac{k_b^2}{E} \cdot V.$$

Man hat noch

$$W = \frac{\sigma_{max}}{r} \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 488)$$

und für die sogenannte Federung, d. h. für die Verschiebung des Angriffspunktes von $[W]$

$$r \,.\, arc\,\alpha = \frac{W}{E\mathfrak{T}r} lr^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 489)$$

2. Die gewundene Biegungsfeder. Handelt es sich um eine Spiralfeder, deren Mittellinie eine gemeine Schraubenlinie ist, so kann man angenähert annehmen, daß diese bei entsprechender Beanspruchung wie die ebene Spiralfeder von einem Radius r_1 zu einem Radius r_2 übergeht. Sind ursprünglich die beiden Enden der Feder um einen Winkel α_1 gegeneinander verdreht, so gilt für die Länge l der Feder $l \sim r_1\, arc\,\alpha_1$; geht α_1 beim Spannen in α_2 über, so ist die Länge der Feder ebenso gegeben durch $r_2\, arc\,\alpha_2$.

Demnach gilt für die Änderung der Verdrehung

$$\Sigma\, arc\,\delta = arc\,\alpha_2 - arc\,\alpha_1 \sim l\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Gemäß S. 1203 gilt angenähert

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{Mo}{E\mathfrak{T}r}$$

und demnach ist auch

$$\Sigma\, arc\,\delta \sim \frac{l \,.\, Mo}{E\mathfrak{T}r}.$$

Wird die gespannte Feder durch eine Kraft W am Arme r gehalten, so gilt also für die Formänderungsarbeit wieder

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(Wr)^2 \frac{l}{E\mathfrak{T}r}.$$

[1]) Vergl. Mechanik III, S. 243.

Führt man $Wr = \sigma_{max} \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ ein, so gilt also auch wieder

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot \frac{l \mathfrak{T}r}{w^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 490)$$

Für einen Kreis (R) als Querschnitt ist $\mathfrak{T}r = \frac{1}{4}\pi R^4$ und $w = R$, so daß

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot \frac{l R^2 \pi}{4} = \tfrac{1}{8} \frac{\sigma_{max}^2}{E} \cdot V$$

ist, falls man das Volumen der Feder mit V bezeichnet.

Auch hier ist

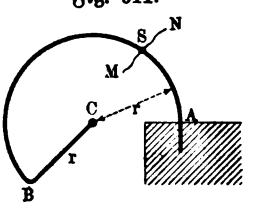
$$W = \frac{\sigma_{max}}{r} \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 491)$$

und die Federung

$$r(arc\,\alpha_2 - arc\,\alpha_1) = \frac{W}{E \mathfrak{T}r} \cdot l r^2 \quad \ldots \ldots \quad 492)$$

3. **Gewundene Drehungsfedern.** Wenn ein krummer Stab, dessen Mittellinie eine ebene Kurve ist, senkrecht zu deren Ebene außerhalb der Mittellinie belastet wird, so geht die Mittellinie unter Verdrehung der Querschnitte gegeneinander in eine gewundene Kurve über.

Fig. 911.



In Fig. 911 sei ein Stab von kreisförmiger Mittellinie AB mit einem radialen Hebelansatze BC dargestellt, so daß ABC in der Ebene der Zeichnung liegt. Wird C senkrecht zur Ebene der Zeichnung durch $[P]$ belastet, so wirkt für den Schnitt MN in S eine Schubkraft $[P]$ und außerdem im Querschnitte von S das Paar $[Pr]$. Berücksichtigt man nur letzteres von Querschnitt zu Querschnitt, so entspricht der Verdrehung bei einer Länge $\overset{\frown}{AB} = l$ eine bestimmte Formänderungsarbeit.

Für einen geraden Stab von der Länge l gilt unter gleichen Umständen für diese Formänderungsarbeit (vergl. S. 1107) bei einem Kreise (ϱ) als Querschnitt für $V = \varrho^2 \pi l$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} \cdot V \quad \ldots \ldots \ldots \quad 493)$$

und bei einem Rechteck (b, h) als Querschnitt, falls $h > b$ ist, für $V = bhl$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{4}{15} \frac{b^2 + h^2}{h^2} \cdot \frac{k_d^2}{G} \cdot V \quad \ldots \ldots \quad 494)$$

falls das Material ($\sigma_{max} = k_d$) ausgenutzt wird.

Außerdem gilt für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$\tau_{max} = \frac{2}{\pi} \frac{Mo}{\varrho^3}$$

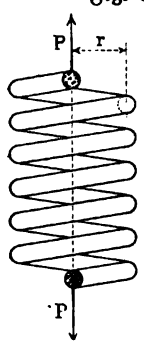
und für das Rechteck (b, h) als Querschnitt, falls $h > b$ ist,

$$\tau_{max} = \tfrac{9}{2} \frac{Mo}{b^2 h}.$$

Man nimmt nun an, daß die damit bestimmten Werte von $\mathfrak{A}$ auch für den krummen Stab $\overset{\frown}{AB}$ der Fig. 911 angenähert in Geltung sind.

Sieht man von der Biegung des Hebels BC ab, so ist die Senkung oder Hebung s von C allein durch diese Formänderungsarbeit bedingt. Da sich bei dieser Senkung oder Hebung s von C der Angriffspunkt der Kraft $[P]$ um s verschiebt, so ist hierfür die Arbeit $P \cdot s$ anzusetzen, von welcher $\frac{1}{2} Ps$ auf die Formänderungsarbeit fällt. Man hat also

Fig. 912.



$$\tfrac{1}{2} Ps = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad s = \frac{2\mathfrak{A}}{P}.$$

Man überträgt nun vorstehende Betrachtung in der Praxis zunächst auf Spiralfedern, deren Mittellinie eine gemeine Schraubenlinie ist, indem man bei n Umgängen $l \sim n \cdot 2r\pi$ setzt (vergl. Fig. 912).

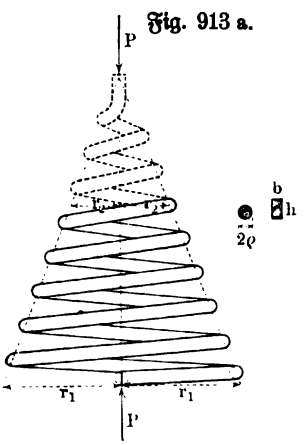
Man hat dann für den Kreis (ϱ) als Querschnitt $V \sim \varrho^2 \pi \cdot n \cdot 2r\pi$ und für das Rechteck (b, h) als Querschnitt $V \sim bh \cdot n \cdot 2r\pi$. Unter dieser Voraussetzung gilt für die cylindrische Spiralfeder von n Umgängen mit einem Kreise (ϱ) als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = n \frac{\pi^2}{2} \frac{k_d^2}{G} \cdot \varrho^2 r \quad \text{und} \quad s = \frac{2\mathfrak{A}}{P} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 495\,\text{a})$$

oder, unter Berücksichtigung von $k_d = \frac{2}{\pi} \frac{Mo}{\varrho^3}$ für $Mo = Pr$, auch

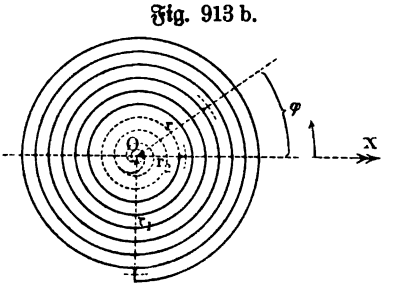
$$P = \frac{\pi}{2} k_d \cdot \frac{\varrho^3}{r} \quad \text{und} \quad s = 4n \frac{r^3}{\varrho^4} \cdot \frac{P}{G} \cdot \cdot \cdot \cdot 495\,\text{b})$$

Fig. 913 a.



Ebenso gilt für die cylindrische Spiralfeder von n Umgängen mit einem Rechteck als Querschnitt (b, h), falls $h > b$ ist,

Fig. 913 b.



$$\mathfrak{A} = \tfrac{8}{45} n\pi \cdot \frac{k_d^2}{G} \cdot r \cdot \frac{b}{h} (b^2 + h^2) \quad \text{und} \quad s = \frac{2\mathfrak{A}}{P} \cdot \cdot 496\,\text{a})$$

oder, unter Berücksichtigung von $k_d = \frac{9}{2} \cdot \frac{Mo}{b^2 h}$ für $Mo = Pr$, auch

$$P = \tfrac{2}{9} k_d \frac{b^2 h}{r} \quad \text{und} \quad s = 7{,}2\, n \pi r^3 \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot \frac{P}{G} \quad \cdot \cdot 496\,\text{b})$$

Ferner überträgt man in der Praxis die Entwickelung auch auf **Spiralfedern**, deren Mittellinie **Schraubenlinie eines Kegelmantels** ist; diese Federn heißen auch kurz **Kegelfedern** (Fig. 913).

Für eine Stelle der Mittellinie, welche von der Achse ihres Kegelmantels den Abstand r hat, ist $Mo = P \cdot r$ und demnach beträgt die Verdrehung eines Querschnittes an der betrachteten Stelle, auf die Einheit reduziert, angenähert für den Kreis (ϱ) als Querschnitt (vergl. S. 1108)

$$arc\,\varepsilon = \frac{2}{\pi \varrho^4} \cdot \frac{Mo}{G}$$

und für das Rechteck (b, h) als Querschnitt (vergl. S. 1109)

$$arc\,\varepsilon = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot \frac{Mo}{G}.$$

Für ein Element Δs der Mittellinie an der betrachteten Stelle beträgt die Verdrehung $\Delta s \cdot arc\,\varepsilon$ und demnach ist die entsprechende Formänderungsarbeit

$$\tfrac{1}{2} Mo \cdot arc\,\varepsilon \cdot \Delta s.$$

Bei dem angenäherten Verfahren ist es zulässig, das Element Δs durch seine Projektion auf eine Ebene, senkrecht zur Achse des Kegels, zu ersetzen.

Projiziert man die Mittellinie auf diese Ebene, so entsteht (vergl. Fig. 913 b) eine Spirale, welche, auf ihren Mittelpunkt als Pol bezogen, eine bestimmte Gleichung

$$r = f(\varphi)$$

in Polarkoordinaten hat.

Ersetzt man Δs durch ein Element dieser Spirale, welches als $r \cdot arc\,\vartheta$ angesetzt werden kann, so ist die Formänderungsarbeit für ein Volumenelement der Feder,

$$\tfrac{1}{2} Mo \cdot arc\,\varepsilon \cdot r \cdot arc\,\vartheta,$$

und man hat also, da $Mo = Pr$ ist, für den Kreis (ϱ) als Querschnitt dafür

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{P^2}{G \varrho^4} \cdot r^3 arc\,\vartheta$$

und für das Rechteck (b, h) als Querschnitt

$$1{,}8 \frac{(b^2 + h^2) \cdot P^2}{b^3 h^3 G} \cdot r^3 arc\,\vartheta$$

anzusetzen.

Um die gesamte Formänderungsarbeit A zu berechnen, ist in beiden Fällen $\Sigma r^3 \cdot arc\,\vartheta$ zu bilden, wobei die Summation auf alle Elemente der Spirale auszudehnen ist, welche Projektion der Mittellinie der Feder ist.

Für die Spirale kann man als Gleichung in Polarkoordinaten

$$r = r_1 \cdot \frac{arc\,\varphi}{n_1\, 2\pi}$$

ansetzen, falls man vom Mittelpunkte aus nach Verlauf von n_1 Windungen zu dem Radius r_1 gelangt.

Wenn die Projektion der Feder vom Mittelpunkt der Spirale ausgeht und beim Radius r_1 endet, so ist

$$\Sigma r^3 \,.\, arc\,\vartheta = \frac{r_1^3}{(n_1 \,.\, 2\pi)^3}\,\Sigma\, arc^3\varphi \,.\, arc\,\vartheta$$

bei $\varphi = p \,.\, \vartheta$ und $\vartheta = \dfrac{2\,n_1\pi}{m}$ für $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m$ zu bilden mit $lim\, m = \infty$, wobei man unmittelbar

$$\tfrac{1}{4} r_1^3 \,.\, n_1\, 2\,\pi$$

erhält, so daß für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} n_1 \frac{P^2 r_1^3}{G\,\varrho^4}$$

und für das Rechteck $(b,\ h)$ als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = 0{,}9 \,.\, \pi \,.\, n_1 \frac{P^2 (b^2 + h^2) r_1^3}{G b^3 h^3}$$

ist.

Da sich als Länge der Projektion der Mittellinie $l_1 = \tfrac{1}{2} r_1 \,.\, n_1\, 2\,\pi$ ergiebt, so gilt für den Kreis (ϱ) als Querschnitt auch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi} \frac{P^2 r_1^2 l_1}{G\,\varrho^4}$$

und für das Rechteck $(b,\ h)$ als Querschnitt auch

$$\mathfrak{A} = 0{,}9 \frac{P^2 r_1^2 (b^2 + h^2) l_1}{G b^3 h^3}.$$

Sieht man l_1 als Annäherung für die Länge der Mittellinie der Feder an, so ist das Volumen V für den Kreis (ϱ) als Querschnitt durch $V = l_1 \varrho^2 \pi$ und für das Rechteck $(b,\ h)$ als Querschnitt durch $V = l_1 b h$ gegeben, so daß für den Kreis (ϱ) auch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,\pi^2} \cdot \frac{P^2 r_1^2}{G \,.\, \varrho^6} \cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 497)$$

und für das Rechteck $(b,\ h)$ auch

$$\mathfrak{A} = 0{,}9 \frac{P^2 r_1^2 (b^2 + h^2)}{G b^4 h^4}\, V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 498)$$

gilt.

Bei Ausnutzung des Materials $(\sigma_{max} = k_d)$ gilt für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$Mo = P r_1 = \tfrac{1}{2}\,\pi\,\varrho^3 \,.\, k_d \quad \ldots\ldots\ldots \quad 499)$$

und für das Rechteck $(b,\ h)$ als Querschnitt, falls $h > b$ ist,

$$Mo = P r_1 = \tfrac{2}{9}\, b^2 h\, k_d \quad \ldots\ldots\ldots \quad 500)$$

so daß für den Kreis (ϱ) auch noch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{8}\ \frac{k_d^3}{G} \cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 501)$$

und für das Rechteck (b, h) auch noch

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{45}\frac{k_d^2}{G}\cdot\frac{b^2+h^2}{h^2}\cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 502)$$

gesetzt werden kann.

Da wieder für eine Senkung oder Hebung s des Angriffspunktes von P gilt

$$\tfrac{1}{2}Ps = \mathfrak{A},$$

so ist die Federung

$$s = \frac{2\mathfrak{A}}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 503)$$

auch gegeben.

Wenn die Projektion der Feder von einem Radius r_2 der Spirale ausgeht und bei einem Radius r_1 der Spirale endet, wobei $r_1 > r_2$ ist, so stellt sich die Arbeit $\mathfrak{A}$ als der Unterschied der Arbeiten für zwei Federn der behandelten Art dar, deren eine durch $r = 0 \ldots r_1$ und deren andere durch $r = 0 \ldots r_2$ bestimmt ist, wobei aber σ_{max} durch $Mo = Pr_1$ festzustellen ist (vergl. Fig. 913). Sind die Umläufe für die beiden Federn bezw. n_1 und n_2, so gilt für die Kegelstumpffeder, bei welcher $r = r_2 \ldots r_1$ ist, für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{G\varrho^4}(r_1^3 n_1 - r_2^3 n_2).$$

Da $r = r_1\cdot\frac{arc\,\varphi}{2\pi n_1}$ ist, so ist $r_2 = r_1\cdot\frac{2\pi n_2}{2\pi n_1}$, d. h. es ist $n_2 : n_1 = r_2 : r_1$. Für $n_1 - n_2 = n$ ergiebt sich also

$$n_1 = n\cdot\frac{r_1}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad n_2 = n\cdot\frac{r_2}{r_1 - r_2}$$

und demnach ist

$$r_1^3 n_1 - r_3^2 n_2 = n\frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1 - r_2} = n(r_1^2 + r_2^2)(r_1 + r_2).$$

Man hat also für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}n\frac{P^2}{G\varrho^4}(r_1^2 + r_2^2)(r_1 + r_2)$$

und ebenso für das Rechteck (b, h) als Querschnitt

$$\mathfrak{A} = 0{,}9\,.\,\pi n\frac{P^2(b^2+h^2)}{Gb^3h^3}(r_1^2 + r_2^2)(r_1 + r_2).$$

Setzt man $l_1 - l_2 = l$, so ist l die Länge der Kegelstumpffeder und zwar hat man

$$l = \pi(r_1 n_1 - r_2 n_2) = n\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}\pi = n(r_1 + r_2)\pi$$

und demnach ergiebt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi}\frac{P^2(r_1^2 + r_2^2)l}{G\varrho^4} \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{A} = 0{,}9\frac{P^2(r_1^2 + r_2^2).(b^2 + h^2)l}{Gb^3h^3}.$$

Führt man das Volumen der Kegelstumpffeder $V = l\varrho^2\pi$ bezw. lbh ein, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{P^2(r_1^2 + r_2^2)}{G\varrho^6} \cdot V \quad \ldots \ldots \quad 504)$$

bezw.

$$\mathfrak{A} = \frac{0{,}9\, P^2(r_1^2 + r_2^2)(b^2 + h^2)}{G b^4 h^4} \cdot V \quad \ldots \quad 505)$$

Da für die Kegelstumpffeder σ_{max} im Kreise vom Radius r_1 auftritt, so ist bei Ausnutzung des Materials für den Kreis (ϱ) als Querschnitt

$$Mo = Pr_1 = \tfrac{1}{2}\pi\varrho^3 k_d \quad \ldots \ldots \quad 506)$$

und für das Rechteck (b, h) als Querschnitt

$$Mo = Pr_1 = \tfrac{2}{9} b^2 h k_d \quad \ldots \ldots \quad 507)$$

so daß auch noch für die Kegelstumpffeder

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{8} \frac{k_d^2}{G} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2} \cdot V \quad \ldots \ldots \quad 508)$$

bezw.

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{45} \frac{k_d^2}{G} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{b^2 + h^2}{h^2} \cdot V \quad \ldots \quad 509)$$

gilt.

Für $r_2 = 0$ erhält man wieder die Formeln der einfachen (vollen) Kegelfeder, für $r_1 = r_2$ die Formeln der cylindrischen Spiralfeder.

Neunte Abteilung.

Plattenförmige Körper.

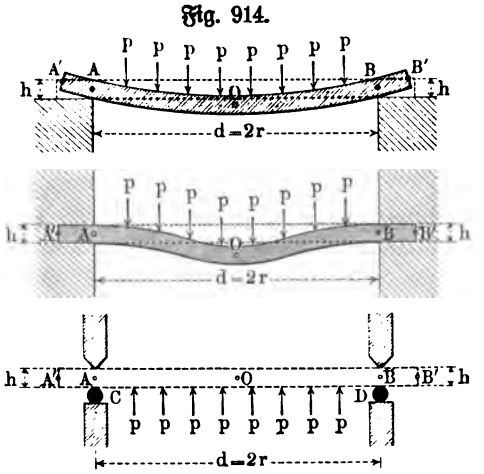
212. Allgemeines. Ein gerades Prisma, dessen Höhe gegen die Abmessungen der Grundfläche relativ klein ist, wird als eine ebene Platte bezeichnet. Die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Grundflächen, welche auf diesen senkrecht steht, heißt Achse der Platte, eine Parallelebene zu den Grundflächen, welche von diesen gleichen Abstand hat, wird Mittelschicht der Platte genannt.

Denkt man sich eine ebene Platte beliebig gebogen, und zwar so, daß dabei je zwei Punkte der ursprünglichen Grundflächen, welche vor der Biegung auf einer Normalen der Mittelschicht lagen, auch nach der Biegung auf einer solchen liegen und von der Mittelschicht die ursprünglichen Abstände behalten, so gelangt man zu der Vorstellung einer krummen Platte.

Materielle Körper, welche die Gestalt einer ebenen oder krummen Platte haben, werden als plattenförmige Körper bezeichnet.

Von plattenförmigen Körpern kommen in der Praxis hauptsächlich einerseits ebene Platten von bestimmter Grundfläche vor, anderseits Hohlcylinder und Hohlkugeln.

Fig. 914.



213. Ebene Platten. Die Grundflächen ebener Platten, welche in der Technik Bedeutung haben, sind meist Kreise oder Ellipsen oder Rechtecke.

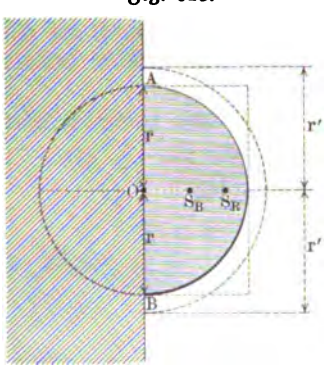
Man hat diese Platten, ihrer Verwendung entsprechend, zu behandeln für gleichmäßige Belastung oder für eine Einzellast in der Achse (Mittelbelastung), und zwar bei Befestigungen, wie sie Fig. 914 a, b, c für eine kreisförmige Platte in einem Achsenschnitt darstellen.

Die Befestigung gemäß Fig. 914 a, welche der des Zweistützenträgers entspricht, heißt eine freie Auflagerung, während eine Befestigung gemäß Fig. 914 b als Einspannung bezeichnet wird; zwischen beiden steht die Befestigung gemäß Fig. 914 c, in welcher C und D Querschnitte eines Dichtungsringes aus weichem Kupfer bezeichnen, welcher sich bei der Beanspruchung der Platte durch einen Druck von unten (z. B. durch eine Flüssigkeit in einem Preßkolben) ziemlich stark abplattet.

Die theoretischen Untersuchungen solcher ebenen Platten, welche zum ersten Male von Grashof[1]) in befriedigender Weise angebahnt worden sind, werden äußerst verwickelt. Ihre Ergebnisse sind aus mehreren Gründen unsicher, namentlich auch, weil man über die Verteilung der Auflagerreaktion am Plattenrande von Fall zu Fall bestimmte Annahmen machen muß, deren experimentelle Prüfung bisher nur in sehr beschränktem Umfange möglich war. Dies gilt selbst für die kreisförmige Platte.

Hier ist zwar sicher eine gleichmäßige Verteilung der Auflagerreaktion über den Umfang einer, zur Achse senkrechten Kreisfläche vorhanden, solange die Belastungen ringsum symmetrisch zur Achse liegen, aber der Radius dieser Kreisfläche ist für Fig. 914 b nur durch die Grenzen OA und OA' bezw. OB und OB' bestimmt und Entsprechendes gilt auch für Fig. 914 a und c mit Rücksicht auf die thatsächlich eintretenden Formänderungen des Materials längs der aneinander gepreßten Berührungsflächen.

Fig. 915.



Durch die grundlegenden experimentellen Untersuchungen v. Bachs[2]) sind für die, in der Technik verwendeten Platten bei den üblichen Belastungen die gefährlichen Schnitte bestimmt worden, senkrecht zu welchen die größten Spannungen auftreten; außerdem hat v. Bach im Anschluß an diese Untersuchungen ein angenähertes Verfahren angegeben, diese größten Spannungen zu bestimmen.

Für die kreisförmige Platte mit gleichmäßiger Belastung haben die Versuche v. Bachs eine Bestätigung der nahe liegenden Annahme gegeben, daß die größten Spannungen senkrecht zu irgend einem Achsenschnitt liegen. Denkt man nun die Platte nach der Biegung unter Erhaltung ihrer Formänderung so eingemauert, wie es Fig. 915 andeutet, so kann man die freie Hälfte der Platte als einen kreisförmig verjüngten Balken von rechteckigem Querschnitt auffassen, der in dem zu AB gehörigen Achsenschnitte die Breite $d = 2r$ und die Höhe h hat, falls h die Dicke der Platte bezeichnet.

Ist p die Spannung der gleichmäßigen Belastung, so beträgt diese selbst für die freie Halbkreisfläche $\frac{1}{2} r^2 \pi \,.\, p$ und zwar ist für sie der Schwerpunkt

[1]) Theorie der Elasticität und Festigkeit.
[2]) Elasticität und Festigkeit.

S_B dieſer Halbkreisfläche als Verdichtungspunkt (dynamiſches Centrum) anzuſetzen; da $OS_B = \frac{4}{3\pi} r$ iſt, ſo beträgt für AB das Moment der Belaſtung $\frac{1}{2} r^2 \pi \cdot \frac{4}{3\pi} r \,.\, p = \frac{2}{3} r^3 \,.\, p$. Verteilt ſich die Reaktion $R = \frac{1}{2} r^2 \pi \,.\, p$ der Belaſtung gleichmäßig auf eine Halbkreislinie vom Radius r', ſo iſt deren Schwerpunkt S_R der Verdichtungspunkt für dieſe Reaktion; da $OS_R = \frac{2}{\pi} r'$ iſt, ſo beträgt für AB das Moment der Reaktion $\frac{1}{2} r^2 \pi \cdot \frac{2}{\pi} r' \,.\, p = r^2 r' \,.\, p$. Das geſamte Moment der äußeren Kräfte, welches zugleich das Moment der inneren Kräfte für den AB entſprechenden Achſenſchnitt darſtellt, iſt demnach

$$Mo = p\,(r^2 r' - \tfrac{2}{3} r^3).$$

Nimmt man nun mit v. Bach an, daß hier das Moment der inneren Kräfte angenähert nach der Feſtigkeitsgleichung des geraden Balkens beſtimmt werden kann, ſo ergiebt ſich

$$\sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim p\,(r^2 r' - \tfrac{2}{3} r^3),$$

wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{2r \,.\, h^2}{6}$ iſt.

Man hat dann, da hier σ den Größtwert der auftretenden Spannung bezeichnet,

$$\sigma_{max} \sim \frac{p\,(3 r r' - 2 r^2)}{h^2}.$$

Für den Fall der Fig. 914 a wäre bei Vernachläſſigung der Formänderungen des Materials an den Berührungsflächen $r = r'$ und alſo

$$\sigma_{max} \sim \frac{p r^2}{h^2}.$$

v. Bach hat ſeine Formel durch Verſuche geprüft, wobei ſich ergab, daß

$$\sigma_{max} = \varphi \cdot \frac{p r^2}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 510)$$

zu ſetzen iſt für $\varphi = 0{,}8$ bis $1{,}2$, wobei der kleinere Wert von φ der Einſpannung und der größere Wert der freien Auflagerung entſpricht.

Föppl hat in ſeiner Mechanik [1]) eine genauere Theorie der kreisförmigen Platte entwickelt und im Anſchluß daran die Annahme v. Bachs geprüft, wobei ſich ergiebt, daß dieſe Annahme für σ thatſächlich angenähert die größte Anſtrengung des Materials im Mittelſchnitt liefert, obwohl die Spannungsverteilung im Achſenſchnitt eine ganz andere iſt als in dem betreffenden Schnitte eines rechteckigen Balkens.

Bei Mittelbelaſtung $[P]$ in O hat für die kreisförmige Platte für AB das Moment von $[P]$ den Wert Null, während das Reaktionsmoment

[1]) Bd. III, S. 327 u. f.

den Wert $\frac{P}{2} \cdot \frac{2}{\pi} r' = \frac{P r'}{\pi}$ hat; in diesem Falle erhält man nach demselben Verfahren

$$\sigma_{max} \sim \frac{3 P r'}{\pi r h^2},$$

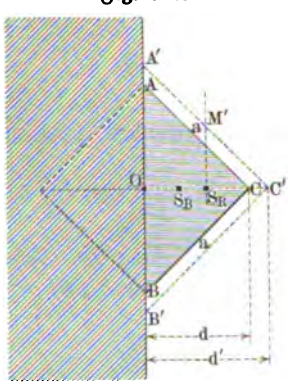
woraus für $r = r'$ sich ergiebt $\sigma_{max} \sim \frac{3 P}{\pi h^2}$.

Genauere Untersuchungen zeigen, daß hier darauf Rücksicht genommen werden muß, daß $[P]$ thatsächlich nicht in O angreift, sondern in einer kleinen Kreisfläche vom Radius r_0, welche O konzentrisch umgiebt. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ergiebt sich hier bei freier Auflagerung ($r = r'$) gemäß Fig. 914 a)

$$\sigma_{max} \sim \frac{9}{2\pi}\left(1 - \tfrac{2}{3}\frac{r_0}{r}\right)\frac{P}{h^2} \quad \cdots\cdots 511)$$

Auch die größte Durchbiegung (y), welche in O stattfindet, kann angenähert, gemäß dem Vergleiche v. Bachs mit dem geraden Balken, bestimmt werden. Man findet für gleichmäßige Belastung bei Kontrolle durch entsprechende Versuche

Fig. 916.



$$y_{max} = \psi \frac{r^4 p}{h^3 E} \quad \cdots 512)$$

für $\psi = 0{,}17$ bis $0{,}60$, wobei der kleinere Wert von ψ wieder der Einspannung und der größere der Auflagerung entspricht.

Ebenso ergiebt sich bei freier Auflagerung ($r = r'$) für Mittelbelastung

$$y_{max} = \psi \frac{r^2 P}{h^3 E} \quad \cdots 513)$$

mit $\psi = 0{,}4$ bis $0{,}5$.

Durch die Versuche v. Bachs ist ferner festgestellt, daß eine quadratische Platte bei gleichmäßiger Belastung senkrecht zu einem diagonalen Achsenschnitt die größten Spannungen zeigt. Wendet man gemäß Fig. 916 auf eine solche Platte das Verfahren v. Bachs an, so ist bei gleichmäßiger Belastung $OS_B = \frac{d}{3}$, falls die halbe Diagonale durch d bezeichnet wird, während die Belastung selbst $\frac{1}{2} a^2 p$ ist. Über die Verteilung der Reaktion auf die Randlinie $A'C'B'$ braucht man hier nichts Genaueres zu wissen; da auf $A'C'$ jedenfalls $\frac{1}{4} a^2 p$ zur Verteilung kommt und da die Verteilung über $A'C'$ symmetrisch zur Mitte M' erfolgt, so ist das Moment der Reaktion für $A'C'$ jedenfalls $\frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} d'$ und hat also für $A'C'$ und $C'B'$ den Wert

$$\tfrac{1}{4} a^2 d' p.$$

Man hat also hier

$$Mo = \frac{p}{2}\left(\frac{a^2 d'}{2} - \frac{a^2 d}{3}\right).$$

Nach v. Bachs Annahme gilt wieder

$$\sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim \frac{p}{2}\left(\frac{a^2 d'}{2} - \frac{a^2 d}{3}\right),$$

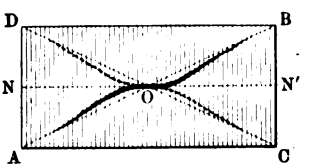
wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{(2d)\,h^2}{6}$ ist.

Man hat für $d = d'$

$$\sigma_{max} = \tfrac{1}{4}\frac{p a^2}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 514)$$

Für eine rechteckige Platte mit verschiedenen Seiten (a, b) zeigen die Versuche v. Bachs bei gleichmäßiger Belastung, daß der Schnitt, senkrecht zu welchem die größten Spannungen auftreten, nicht mehr eben ist, daß er vielmehr in der Mitte der Platte mit der längeren Mittellinie NN' zusammenfällt und dann beiderseits in eine der Diagonalen AB oder CD einbiegt, wie es Fig. 917 a andeutet. Sieht man auch hier, wie beim Quadrate, einen diagonalen Achsenschnitt als den Schnitt an, in welchem durchschnittlich σ_{max} auftritt, so läßt sich auch hier das Verfahren v. Bachs anwenden.

Fig. 917 a.



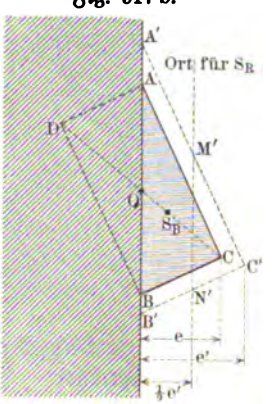
Für die Belastung $\frac{1}{2}ab \,.\, p$, welche sich in S_B verdichtet, ist gemäß Fig. 917 b für AB der Arm $\frac{1}{3}e$ einzuführen, während sich die Reaktion R für $A'C'$ in M' und die Reaktion R' für $C'B'$ in N' verdichtet, so daß deren Moment für AB

$$\tfrac{1}{2}(R + R')\,e'$$

ist; da $R + R' = \frac{1}{2}abp$ ist, so braucht man über die Verteilung der Reaktionen nichts Genaueres zu wissen. Man hat also hier

$$Mo = \tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}abe' - \tfrac{1}{3}abe).$$

Fig. 917 b.



Nach v. Bachs Annahme gilt wieder

$$\sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim \tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}abe' - \tfrac{1}{3}abe),$$

wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{(2d)\,h^2}{6}$ für d als halbe Diagonale ist. Da $e \,.\, 2d = ab$ ist, so gilt für $e = e'$

$$\sigma_{max} \sim \tfrac{1}{2}\,p \cdot \frac{a^2 b^2}{h^2 (a^2 + b^2)}.$$

Mit Rücksicht auf Versuche ist hier zu setzen

$$\sigma_{max} \sim \tfrac{1}{2}\,\varphi p \cdot \frac{a^2 b^2}{h^2 (a^2 + b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 515)$$

für $\varphi = 0{,}75$ bis $1{,}125$.

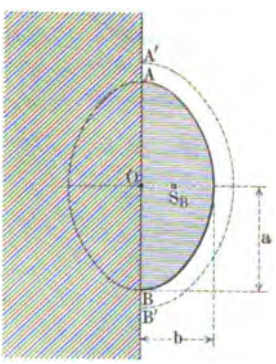
Bei Mittelbelastung gilt für die rechteckige Platte ebenso

$$\sigma_{max} = \tfrac{2}{3}\varphi \cdot \frac{abP}{h^2(a^2+b^2)} \quad \cdots\cdots \quad 516)$$

für $\varphi = 1{,}75$ bis $2{,}00$.

Für elliptische Platten stellen die Versuche v. Bachs bei gleichmäßiger Belastung wieder unzweifelhaft fest, daß die größten Spannungen senkrecht zu einem Achsenschnitt durch die große Achse auftreten. Bei gleichmäßiger Belastung ist $OS_B = \frac{4}{3\pi}b$, so daß für AB als Belastungsmoment $\frac{ab\pi}{2} \cdot p \cdot \frac{4}{3\pi}b = \frac{2}{3}ab^2p$ anzusetzen ist. Macht man mit v. Bach in Bezug auf die Verteilung der Reaktion $\frac{2}{3}ab^2p$ auf die Randlinie der Ellipse die (allerdings ziemlich willkürliche) Annahme, daß die Reaktion in jedem Punkte der Randlinie dem Krümmungshalbmesser der Ellipse für diesen Punkt proportional ist, so gelangt man zu der Formel

Fig. 918.



$$\sigma_{max} = \varphi \frac{2a^2b^2}{h^2(a^2+b^2)} \cdot p \quad \cdot \quad 517)$$

für $\varphi = 0{,}667 \ldots 1{,}125$, wobei wieder der kleinere Wert von φ der Einspannung und der größere Wert von φ der freien Auflagerung entspricht. Bei einer anderen Annahme über die Verteilung der Reaktion gelangt man natürlich zu anderen Formeln; so gelangt z. B. Föppl[1]) durch andere Betrachtungen für denselben Fall zu der Formel

$$\sigma_{max} = \varphi \cdot \frac{(3a - 2b)b^2}{h^2 a} \cdot p.$$

Für ebene Böden von Cylindern mit Krempung hat v. Bach noch die Formel abgeleitet

$$\sigma_{max} = p\left[\mu \cdot \frac{\varrho}{h} + \psi\left(\frac{r - 0{,}5\,\varrho\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)}{h}\right)^2\right] \quad \cdot \cdot \quad 518)$$

wobei h die Bodenstärke, ϱ den inneren Wölbungshalbmesser der Krempung und r den inneren Halbmesser des Bodens bedeutet, während p den inneren Überdruck in Atmosphären bezeichnet. Dabei sind μ und ψ Koeffizienten, welche durch Versuche festgestellt werden müssen; für flußeiserne, in die Hohlcylinder eingenietete Böden ist z. B. $\mu = 0{,}5$ und $\psi = 0{,}333$ bis $0{,}375$.

Für alle Formeln gilt natürlich

$$\sigma_{max} \leqq k_b,$$

wobei k_b die zulässige Biegungsanstrengung bezeichnet.

[1]) Mechanik, Bd. III, S. 302 u. f.

214. Kreisförmige Hohlcylinder und Hohlkugeln mit dünnen Wandungen. Wenn die Dicke der Wandung eines kreisförmigen Hohlcylinders relativ klein ist gegenüber dem äußeren Radius, so kann man den Hohlcylinder bei bestimmten Belastungsarten, wie im § 210 durchgeführt wurde, als ein System von aneinander gelagerten Stäben mit kreisförmiger Mittellinie ansehen.

Haben dünnwandige Hohlcylinder entweder auf der Innenfläche oder auf der Außenfläche einen gleichmäßig verteilten Druck auszuhalten, so kann man sich auch mit folgender angenäherten Betrachtung begnügen.

Die beiderseits an den beiden Stirnflächen anliegenden Teile der Mantelfläche haben wegen der üblichen Befestigung geringere Spannungen auszuhalten als das Mittelstück des Cylinders, welches die Länge l haben mag. Für dieses darf man annehmen, daß sich die Spannungen angenähert gleichmäßig im Materiale verteilen.

Bezeichnet man den mittleren Radius des Hohlcylinders mit r und die Dicke der Wandung mit d, so hat ein Achsenschnitt, der sich aus zwei Rechtecken zusammensetzt, die Fläche $2ld$, während ein Schnitt, senkrecht zur Achse angenähert die Fläche $2r\pi d$ hat.

Bei einem inneren Überdruck von der Spannung p_2 ist für letzteren Schnitt der Druck $r^2\pi p_2$ in Rechnung zu stellen, welchem bei gleichmäßiger Verteilung die in der Achsenrichtung auftretende Spannung

$$\sigma_a = \frac{r^2\pi p_2}{2r\pi d} = \tfrac{1}{2} p_2 \frac{r}{d}$$

entspricht.

Der gesamte Druck auf den Achsenschnitt steht senkrecht zu diesem, und infolgedessen ist die Projektion der gedrückten Fläche, welche der innere Mantel des halben Hohlcylinders ist, auf den Achsenschnitt als Druckfläche einzuführen (vergl. S. 1231). Man hat also $2rlp_2$ als Druck, und demnach ist bei gleichmäßiger Verteilung die in tangentialer Richtung in der Mantelfläche auftretende Spannung

$$\sigma_t = \frac{2rlp_2}{2ld} = p_2 \frac{r}{d}.$$

Da $\sigma_t = 2\sigma_a$ ist, so ist $\sigma_t \leqq k_1$ zu halten, falls k_1 die zulässige Zugspannung bezeichnet, woraus noch folgt

$$d \geqq r \frac{p_2}{k_1}.$$

Eigentlich müßte statt σ_t unter Berücksichtigung der Querdehnungen die entsprechende Anstrengung (reduzierte Spannung) eingeführt werden, deren Wert etwas kleiner ist als σ_t, doch wird die Formel bei der vorliegenden Annäherung dadurch nicht genauer, zumal sie für die Praxis doch noch umgestaltet werden muß. Bei wirklichen Ausführungen von Rohren oder cylindrischen Kesseln hat man nämlich mit Rücksicht auf das Rosten des Materials u. s. w. die Formel

$$d = d_0 + r \frac{p_2}{k_1}$$

zu benutzen, in welcher d_0 für Schmiedeeisen, Kupfer u. s. w. erfahrungsmäßig festzustellende Minimalwerte für die Dicke d bezeichnet, welche der Spannung $p_2 = 0$ entsprechen.

Bei einem äußeren Überdruck von der Spannung p_1 gilt Entsprechendes. Man findet

$$d \geqq r \frac{p_1}{k_2},$$

wobei k_2 die zulässige Anstrengung für Druck bezeichnet.

Für Hohlkugeln mit dünner Wandung ist nur ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel zu betrachten, für den bei gleichmäßiger Verteilung eines Druckes von der Spannung p als Druckkraft $r^2\pi p$ einzuführen ist, während seine Fläche angenähert als $2r\pi d$ anzusetzen ist, falls r wieder den mittleren Radius und d die Stärke der Wandung bezeichnet. Man hat hier bei Annahme gleichmäßiger Verteilung des Druckes

$$\sigma = \frac{r^2\pi p}{2r\pi d} = \tfrac{1}{2} p \frac{r}{d}$$

und

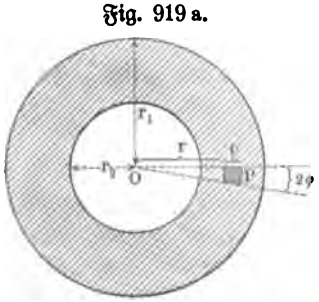
$$d \geqq \tfrac{1}{2} r \frac{p}{k},$$

d. h. man erhält dieselben Ergebnisse wie für den Cylinder, falls man ihn senkrecht zur Achse schneidet.

Die genauere Verteilung der Spannungen im Material wird im nächsten Paragraphen untersucht werden; dabei wird sich zeigen, daß deren Maximum stets an der Innenfläche des Hohlraumes auftritt und zwar in tangentialer Richtung.

215. Kreisförmige Hohlcylinder mit dicken Wandungen. Die angenäherten Betrachtungen des vorigen Paragraphen sind nicht mehr zulässig, wenn die Wandstärke eines kreisförmigen Hohlcylinders oder einer Hohlkugel relativ groß ist in Bezug auf die Abmessung des äußeren Radius. In diesem Falle ist eine genauere Untersuchung der Spannungsverteilung im Innern des Materials erforderlich, welche hier für den kreisförmigen Hohlcylinder bei gleichmäßig verteiltem Druck auf seine innere und äußere Oberfläche durchgeführt werden soll, und zwar unter der Voraussetzung, daß der Einfluß der Formänderung der, den Cylinder an den Stirnseiten abschließenden Böden auf die Cylinderwandung vernachlässigt werden darf.

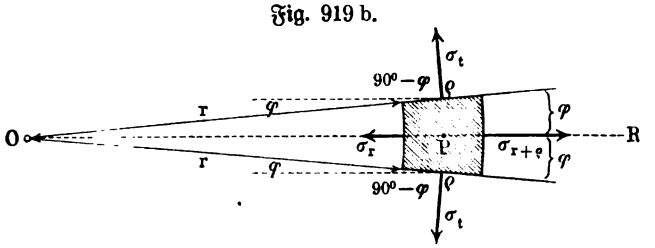
Fig. 919 a.



Aus der Symmetrie des Körpers folgt bei der vorausgesetzten gleichmäßigen Druckverteilung, daß für jeden Punkt P des Materiales das Kreuz der Hauptspannungen durch die Achsenrichtung des Cylinders, durch die radiale Richtung und die, zu beiden senkrechte tangentiale Richtung bestimmt wird, während anderseits die gesamte Formänderung hauptsächlich von der radialen

Formänderung abhängt. Um ein Volumenelement gemäß den Richtungen der Hauptspannungen abzugrenzen, führen wir zwei Achsenschnitte ein, welche den Winkel 2φ bilden, ferner zwei Cylinder von den Radien r und $r + \varrho$ und zwei Schnitte, senkrecht zur Achse im Abstande ζ. Da sich der betrachtete Hohlcylinder in der Achsenrichtung erfahrungsmäßig wie ein gezogener oder gedrückter gerader Stab verhält, so erfordern nur die Hauptspannungen, senkrecht zur Achsenrichtung, eine besondere Betrachtung. In Fig. 919 b ist die Projektion eines Volumenelementes auf eine Ebene senkrecht zur Achse dargestellt, unter dem Einflusse der entsprechenden Spannungen, während zugleich Fig. 919 a die Lage dieses Elementes innerhalb des Cylinders

Fig. 919 b.



darstellt. Die Spannungen σ_t in tangentialer Richtung liefern für die radiale Richtung OP die Komponenten $\sigma_t \,.\, cos\,(90^0 - \varphi) = \sigma_t \,.\, sin\,\varphi$, während sich die Kräfte für ihre Komponenten, senkrecht zu OP, aufheben. Für die Richtung OP erfordert also das Gleichgewicht der Kräfte, da $[\sigma_t]$ für die Fläche $\zeta \,.\, \varrho$, $[\sigma_r]$ für die Fläche $\zeta \,.\, r\,arc\,2\varphi$ und $[\sigma_{r+\varrho}]$ für die Fläche $\zeta \,.\, (r + \varrho)\,arc\,2\varphi$ in Ansatz zu bringen ist,

$$2\,\sigma_t\,sin\,\varphi\,(\zeta\,\varrho) + \sigma_r(\zeta\,r\,arc\,2\varphi) = \sigma_{r+\varrho}[\zeta\,(r + \varrho)\,arc\,2\varphi],$$

d. h. es ist

$$\sigma_t = \frac{(r + \varrho)\,\sigma_{r+\varrho} - r\sigma_r}{\varrho} \cdot \frac{arc\,2\varphi}{2\,sin\,\varphi}.$$

Da $\frac{1}{2}\,arc\,2\varphi = arc\,\varphi = sin\,\varphi$ für $lim\,\varphi = 0$ ist, so gilt also

$$\sigma_t = \frac{(r + \varrho)\,\sigma_{r+\varrho} - r\sigma_r}{\varrho}$$

für $lim\,\varrho = 0$, d. h. σ_t ist die Ableitung der Funktion $r\sigma_r$ nach r.

Um diese Gleichung auszunutzen, stellen wir σ_t und σ_r mit Hülfe der Dehnung ε_t und ε_r dar, welche in tangentialer und radialer Richtung auftreten. Bezeichnen wir die konstante Spannung, welche in der Achsenrichtung auftritt, durch σ_a, so gilt gemäß S. 875

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r + \sigma_a}{m}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_t + \sigma_a}{m}\right),$$

wobei m der Koeffizient der Querdehnung des Materiales ist.

Daraus folgt

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1}\,(m \,.\, \varepsilon_t + \varepsilon_r) + \frac{\sigma_a}{m - 1}$$

und

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}(m \cdot \varepsilon_r + \varepsilon_t) + \frac{\sigma_a}{m - 1}.$$

Um die Ableitung von $r\sigma_r$ zu bilden, bezeichnen wir $r\varepsilon_r$ durch $\varphi(r)$ und $r\varepsilon_t$ durch $\psi(r)$, so daß

$$r\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}[m\varphi(r) + \psi(r)] + r \cdot \frac{\sigma_a}{m - 1}$$

ist. Da σ_t sich als Ableitung dieses Ausdruckes darstellt, so hat man, da $\varepsilon_r = \frac{\varphi(r)}{r}$ und $\varepsilon_t = \frac{\psi(r)}{r}$ ist, demnach die Gleichung

$$m\frac{\psi(r)}{r} + \frac{\varphi(r)}{r} = m\varphi'(r) + \psi'(r)$$

oder

$$-m\left[\frac{\psi(r)}{r} - \varphi'(r)\right] = \frac{\varphi(r)}{r} - \psi'(r).$$

Um für die Funktionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ weitere Beziehungen zu erhalten, beachten wir, daß diese Formänderungen des Hohlcylinders lediglich durch radiale Verschiebungen seiner Punkte bestimmt sind. Ändert sich $OP = r$ in Fig. 919 in der Richtung OP infolge des Einflusses der äußeren Kräfte um $f(r)$, so ändert sich $r + \varrho$ um $f(r + \varrho)$, und demnach ist die Änderung für ϱ gegeben als $f(r + \varrho) - f(r)$. Das Verhältnis dieser Änderung zur ursprünglichen Länge ϱ giebt für $lim\,\varrho = 0$ die Dehnung in Richtung des Radius; diese ist demnach

$$\frac{f(r + \varrho) - f(r)}{\varrho}$$

für $lim\,\varrho = 0$, d. h. sie ist die Ableitung von $f(r)$ nach r und man hat also

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \varepsilon_r = f'(r).$$

Um ε_t durch $f(r)$ auszudrücken, beachten wir, daß ein Bogen vom Radius r und einem Centriwinkel δ von dem Werte $r \cdot arc\,\delta$ zu dem Werte $[r + f(r)] \cdot arc\,\delta$ übergeht, wenn r sich um $f(r)$ ändert, so daß sich die entsprechende Dehnung als

$$\frac{f(r) \cdot arc\,\delta}{r \cdot arc\,\delta} = \frac{f(r)}{r}$$

darstellt; demnach gilt

$$\frac{\psi(r)}{r} = \varepsilon_t = \frac{f(r)}{r}$$

und man sieht, daß

ist. $$\psi(r) = f(r) \quad \text{und} \quad \varphi(r) = rf'(r)$$

Da $\frac{\varphi(r)}{r} = f'(r)$ und da $\psi'(r) = f'(r)$ ist, so verschwindet die rechte Seite der, oben für $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ aufgestellten Gleichung, so daß diese übergeht in

$$\frac{\psi(r)}{r} - \varphi'(r) = 0.$$

Man hat also für die Bestimmung von $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ die beiden Gleichungen [1])

$$\frac{\psi(r)}{r} - \varphi'(r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(r)}{r} - \psi'(r) = 0,$$

woraus durch Subtraktion

$$\frac{\varphi'(r) - \psi'(r)}{\varphi(r) - \psi(r)} = -\frac{1}{r}$$

entsteht.

Da die linke Seite dieser Gleichung die Ableitung von $log \,.\, nat\,[\varphi(r) - \psi(r)]$ und die rechte Seite die Ableitung von $-log \,.\, nat\,(r)$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} log \,.\, nat\,[\varphi(r) - \psi(r)] &= -log \,.\, nat\,(r) + log \,.\, nat\, C \\ &= log \,.\, nat\,(Cr^{-1}), \end{aligned}$$

wobei C eine Integrationskonstante bezeichnet, oder

$$\varphi(r) = \psi(r) + Cr^{-1}$$

oder auch

$$r \,.\, \varepsilon_r = r \,.\, \varepsilon_t + C \,.\, r^{-1}$$

und

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t + C \,.\, r^{-2}.$$

Da $\varepsilon_r = f'(r)$ und $r\varepsilon_t = f(r)$ ist, so ist ε_r die Ableitung von $r\varepsilon_t$ nach r, d. h. man kann für ε_r setzen $\varepsilon_t + r \,.\, \varepsilon_t'$, falls man die Ableitung von ε_t nach r durch ε_t' bezeichnet, und demnach ist

$$\varepsilon_t' = C \,.\, r^{-3}$$

und

$$\varepsilon_t = -\tfrac{1}{2} Cr^{-2} + C',$$

wobei C' eine zweite Integrationskonstante bezeichnet.

Man hat also

$$\varepsilon_t = -\tfrac{1}{2} Cr^{-2} + C' \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = +\tfrac{1}{2} Cr^{-2} + C'.$$

[1]) Diese Gleichungen sagen aus, daß ε_t die Ableitung von $r\varepsilon_r$ und daß ε_r die Ableitung von $r\varepsilon_t$ ist; letzteres folgt aus der Darstellung $\varepsilon_r = f'(r)$ und $\varepsilon_t = \frac{f(r)}{r}$, ersteres unter Voraussetzung dieser Beziehung aus der Thatsache, daß σ_t die Ableitung von $r\sigma_r$ ist. Da diese Gleichungen unabhängig von m sind, so lassen sie sich auch für den Sonderfall $m = 0$ ableiten, welchem $\sigma_t = E \,.\, \varepsilon_t$ und $\sigma_r = E \,.\, \varepsilon_r$ entsprechen würde. Infolgedessen führt, wie die verschiedenen Lehrbücher zeigen, eine mehr oder minder angenäherte Behandlung der Aufgabe und deren strenge Behandlung zu demselben Ergebnisse für ε_t und r_t. Erst bei der Bestimmung der Integrationskonstanten für ε_t und r_t unterscheiden sich die Ergebnisse je nach dem Grade der gewählten Annäherung. Daß ε_r und ε_t als Funktionen von r von m unabhängig sein müssen, solange nicht die Konstantenbestimmung in Frage kommt, läßt sich auch durch unmittelbare Überlegungen finden, so daß man für ihre Bestimmung auch die, thatsächlich nur für $m = 0$ zutreffenden Beziehungen $\sigma_t = E \,.\, \varepsilon_t$ und $\sigma_r = E \,.\, \varepsilon_r$ zu Grunde legen kann, welche unmittelbar zu $\frac{\psi(r)}{r} - \varphi'(r) = 0$ führen.

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, setzen wir die Werte von ε_t und ε_r in den Wert für σ_r ein, weil σ_r für $r = r_1$ den Wert $-p_1$ und für $r = r_2$ den Wert $-p_2$ annimmt, falls man die Spannung der äußeren Kräfte für die Oberfläche und für die Innenfläche des Cylinders bezw. mit p_1 und p_2 bezeichnet.

Man sieht sofort, daß σ_r dabei die Form

$$\sigma_r = C_1 r^{-2} + C_2$$

annimmt, wobei C_1 und C_2 zwei Konstanten bezeichnen, welche mit C und C' in einfachem Zusammenhange stehen. Man hat nun

$$-p_1 = C_1 \cdot r_1^{-2} + C_2 \quad \text{und} \quad -p_2 = C_1 \cdot r_2^{-2} + C_2,$$

woraus

$$C_1 = -\frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{und} \quad C_2 = +\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \cdot \quad 519)$$

folgt.

Da die Ableitung von $r \cdot \sigma_r$ den Wert von σ_t giebt, so ist ferner

$$\sigma_t = -C_1 \cdot r^{-2} + C_2.$$

Bildet man nun ε_r und ε_t mit Hülfe der gewonnenen Werte von σ_r und σ_t, so ist

$$\varepsilon_r = +\frac{m+1}{mE} \cdot C_1 \cdot r^{-2} + \frac{m-1}{mE} \cdot C_2 - \frac{\sigma_a}{mE}$$

und

$$\varepsilon_t = -\frac{m+1}{mE} \cdot C_1 \cdot r^{-2} + \frac{m-1}{mE} \cdot C_2 - \frac{\sigma_a}{mE},$$

womit dann auch die ursprünglichen Konstanten C und C' bestimmt sind.

In Richtung der Achse ist ferner die Dehnung

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}\left(\sigma_a - \frac{\sigma_r + \sigma_t}{m}\right) = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{2}{mE} \cdot C_2.$$

Da in der Achsenrichtung von außen der Druck $p_1 r_1^2 \pi$ und von innen der Druck $p_2 r_2^2 \pi$ wirksam ist, so wirkt hier von innen nach außen der Druck $(p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2)\pi$, welcher sich nach unserer Annahme gleichmäßig auf den Querschnitt der Cylinderwandung $(r_1^2 - r_2^2)\pi$ verteilt, so daß

$$\sigma_a = \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} = C_2$$

zu setzen ist.

Führt man diesen Wert von σ_a in die Formeln für die Dehnungen ein, so ist schließlich, falls man noch $-C_1 = +\overline{C}_1$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot C_2 \\ \varepsilon_r &= \frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot C_2 - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot \overline{C}_1 \cdot r^{-2} \\ \varepsilon_t &= \frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot C_2 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot \overline{C}_1 \cdot r^{-2} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad 520)$$

für

$$-C_1 = +\overline{C}_1 = \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

Für $m = \frac{10}{3}$ ist $\frac{m-2}{m} = 0{,}4$ und $\frac{m+1}{m} = 1{,}3$.

Bei innerem Überdrucke ($p_1 = 0$) ist

$$\overline{C}_1 = p_2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{und} \quad C_2 = p_2 \frac{r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Die Maxima von ε_t und ε_r treten auf für $r = r_2$, d. h. an der inneren Wandung.

Da $\varepsilon_t > \varepsilon_a$ ist, so darf die Zugspannung $E \cdot \varepsilon_t$ für die Dehnung ε_t den zulässigen Wert k_1 nicht überschreiten, während anderseits die Druckspannung $E \cdot \varepsilon_r$ für die Dehnung ε_r unter dem zulässigen Werte k_2 bleiben muß.

Man hat also für $m = \frac{10}{3}$

$$\frac{1{,}3\, r_1^2 + 0{,}4\, r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} p_2 \leqq k_1 \quad \text{und} \quad \frac{1{,}3\, r_1^2 - 0{,}4\, r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} p_2 \leqq k_2.$$

Aus der ersten Gleichung, welche für $k_1 \leqq k_2$ zugleich die zweite Gleichung mit umfaßt und daher im allgemeinen überhaupt für die Abmessungen bestimmend ist, folgt

$$r_1 \geqq r_2 \sqrt{\frac{k_1 + 0{,}4\, p_2}{k_1 - 1{,}3\, p_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \cdot 521\,\text{a})$$

Für $k_1 = 1{,}3\, p_2$ wird $r_1 = \infty$, unabhängig von dem Werte von r_2, d. h. selbst bei unendlich-großem äußeren Radius ist die Konstruktion unsicher, falls $p_2 \geqq \frac{k_1}{1{,}3}$ ist. Untersucht man den Verlauf von σ_t für $r = r_2 \ldots r_1$ genauer, so findet man, daß σ_t von seinem Maximum aus, welches für $r = r_2$ eintritt, sehr rasch nach außen zu abnimmt, so daß der Mantel um so schlechter ausgenutzt wird, je weiter er von der Innenfläche entfernt ist; daraus erklärt sich die Thatsache, daß mit Rücksicht auf die Sicherheit des Mantels eine Innenspannung vom Werte $\frac{k_1}{1{,}3}$ nicht überschritten werden darf.

Infolgedessen führt man Rohre, welche innen einen starken Druck aushalten müssen, z. B. bei Geschützen, als Ringcylinder aus, indem man mehrere Cylinder übereinander zieht und zwar so, daß der äußere stets den inneren zusammenpreßt.

Ist $r_1 - r_2$ eine relativ-kleine Größe, so führen die entwickelten Formeln zurück zu den Ergebnissen des § 214.

Bei äußerem Überdruck ($p_2 = 0$) ist

$$\overline{C}_1 = -p_1 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{und} \quad C_2 = -p_1 \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Die Maxima von ε_t und ε_r treten auf für $r = r_2$, d. h. wieder an der inneren Wandung.

Es erweist sich nun wieder ε_t gefährlicher als ε_a, woraus hier für $m = \frac{10}{3}$

$$r_1 \geqq \frac{r_2}{\sqrt{1 - 1{,}7\,\frac{p_1}{k_2}}} \quad \cdots\cdots\cdots 521\,b)$$

folgt, da ε_t einer Druckspannung (k_2) entspricht.

Für ε_r treten Zugspannungen (k_1) auf, nach denen

$$r_1 \geqq \frac{r_2}{\sqrt{1 - 0{,}9\,\frac{p_1}{k_1}}}$$

sein müßte, so daß nicht nur $p_1 < \frac{k_2}{1{,}7}$, sondern auch $p_1 < \frac{k_1}{0{,}9}$ zu berücksichtigen ist.

Ist $r_1 - r_2$ eine relativ-kleine Größe, so führen die entwickelten Formeln zurück zu den Ergebnissen des § 214.

Vorausgesetzt ist, daß bei äußerem Überdruck kein Eindrücken des Cylinders eintritt, da dabei ja die geometrische Gestalt eine ganz andere würde.

216. Hohlkugeln mit dicken Wandungen. Bei gleichmäßig verteiltem Druck auf die innere und die äußere Oberfläche hängt die gesamte Formänderung, wie bei den entsprechenden Betrachtungen des vorigen Paragraphen, lediglich von der radialen Formänderung ab, während hier für jeden Punkt P des Materials das Kreuz der Hauptspannungen durch die radiale Richtung und zwei beliebige, auf einander senkrecht stehende tangentiale Richtungen gegeben ist. Um diesen Richtungen entsprechend ein Volumenelement abzugrenzen, führen wir zwei, zur Hohlkugel konzentrische Kugelflächen von den Radien r und $r + \varrho$ ein und außerdem einen konzentrischen Kegel von der Öffnung φ, so daß Fig. 919 b bei der Drehung um OR hier diese Beziehungen veranschaulicht. Die Spannung σ_t ist hier auf einen Kegelstumpfmantel verteilt, dessen Seite ϱ ist, während seine Radien $r \sin\varphi$ und $(r + \varrho)\sin\varphi$ sind. Der Komponente $\sigma_t \sin\varphi$, welche in die radiale Richtung fällt, entspricht also hier die Kraft $[(2r + \varrho)\varrho\pi \sin\varphi] \,.\, \sigma_t \,.\, \sin\varphi$. Die Spannungen σ_r und $\sigma_{r+\varrho}$ sind auf Kugelkalotten verteilt, welche bezw. die Radien r und $r + \varrho$ und die Höhen $r(1 - \cos\varphi)$ und $(r + \varrho)(1 - \cos\varphi)$ haben, so daß demnach für das Gleichgewicht der Kräfte hier gilt

$$\sigma_t \,.\, (2r + \varrho)\varrho\pi \sin^2\varphi = [\sigma_{r+\varrho} \,.\, (r + \varrho)^2 - \sigma_r \,.\, r^2]\, 2\pi(1 - \cos\varphi).$$

Da sich für $lim\,\varphi = 0$ sowohl $\sin^2\varphi$ als $2(1 - \cos\varphi)$ der Grenze $arc\,\varphi^2$ nähert, so ist

$$(2r + \varrho)\sigma_t = \frac{\sigma_{r+\varrho}(r + \varrho)^2 - \sigma_r(r^2)}{\varrho}$$

für $lim\,\varrho = 0$ zu bestimmen, wobei $2r + \varrho$ in $2r$ übergeht, d. h. es ist hier $2r\sigma_t$ die Ableitung von $\sigma_r \,.\, r^2$ nach r.

Um diese Beziehung auszunutzen, bilden wir wieder

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_t + \sigma_t}{m}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{m}\right),$$

woraus

$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2}(m \cdot \varepsilon_t + \varepsilon_r)$ und $\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}[2\varepsilon_t + (m-1)\varepsilon_r]$ folgt.

Führt man hier $r^2\varepsilon_r = (\varphi) r$ und $r^2\varepsilon_t = \psi(r)$ ein, so ist gemäß der oben aufgestellten Gleichung in Bezug auf das Gleichgewicht der Kräfte

$$m \cdot \frac{\psi(r)}{r} + \frac{\varphi(r)}{r} = \psi'(r) + \frac{m-1}{2}\varphi'(r).$$

Da für die im vorigen Paragraphen eingeführte Funktion $f(r)$ hier bestehen bleibt $\varepsilon_r = f'(r)$ und $\varepsilon_t = \frac{f(r)}{r}$, so ist

$$\varepsilon_r = \frac{\varphi(r)}{r^2} = f'(r) \quad \text{und} \quad \varepsilon_t = \frac{\psi(r)}{r^2} = \frac{f(r)}{r},$$

d. h. $\frac{\varphi(r)}{r^2}$ ist die Ableitung von $\frac{\psi(r)}{r}$ nach r, woraus folgt

$$\varphi(r) = r\psi'(r) - \psi(r).$$

Führt man den so gewonnenen Wert von $\varphi(r)$ in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$(m-1) \cdot \frac{\psi(r)}{r} = \frac{m-1}{2} \cdot \varphi'(r)$$

oder, nach Tilgung des Faktors $m - 1$,

$$2\psi(r) = r \cdot \varphi'(r).$$

Obige Gleichung zerfällt also hier in

$$\varphi(r) + \psi(r) = r\psi'(r) \quad \text{und} \quad 2\psi(r) = r\varphi'(r),$$

woraus wieder durch Subtraktion folgt

$$\frac{\varphi'(r) - \psi'(r)}{\varphi(r) - \psi(r)} = -\frac{1}{r}$$

bezw.

$$\varphi(r) = \psi(r) + C \cdot r^{-1}$$

oder

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t + C \cdot r^{-3}.$$

Aus der Gleichung $\varepsilon_r = \varepsilon_t + r\varepsilon_t'$ folgt weiter $\varepsilon_t' = C \cdot r^{-4}$ und man hat also

$$\varepsilon_t = -\tfrac{1}{3} C r^{-3} + C' \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = +\tfrac{2}{3} C r^{-3} + C'.$$

Daraus folgt

$$\sigma_r = C_1 r^{-3} + C_2,$$

woraus sich für $r = r_1$ und $\sigma_r = -p_1$ einerseits und für $r = r_2$ und $\sigma_r = -p_2$ anderseits die Werte von C_1 und C_2 leicht ergeben. Man hat ferner

$$\sigma_t = -\tfrac{1}{2} C_1 r^{-3} + C_2.$$

Daraus folgt dann schließlich

für

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{m+1}{m}\cdot\frac{1}{E}\cdot C_1 \,.\, r^{-3} + \frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{E}\cdot C_2 \\ \varepsilon_t &= -\frac{m+1}{2m}\cdot\frac{1}{E}\cdot C_1 \,.\, r^{-3} + \frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{E}\cdot C_2 \\ C_1 &= -\frac{(p_2-p_1)\,r_1^3 r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} \quad \text{und} \quad C_2 = +\frac{p_2 r_2^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} \end{aligned}\right\} \cdot \quad 522)$$

Für $m = \frac{10}{3}$ iſt $\frac{m+1}{m} = 1{,}3$ bezw. $\frac{m+1}{2m} = 0{,}65$ und $\frac{m-2}{m} = 0{,}4$.

Die Maxima von ε_t und ε_r treten wieder ſtets an der inneren Wandung auf.

Für inneren Überdruck ($p_1 = 0$) iſt wieder mit Rückſicht auf den ε_t entſprechenden Zug (k_1)

$$r_1 \geqq r_2 \sqrt[3]{\frac{k_1 + 0{,}4\,p_2}{k_1 - 0{,}65\,p_2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 523\,a)$$

ſo daß nicht $p_2 \geqq \frac{k_1}{0{,}65}$ ſein darf.

Für äußeren Überdruck ($p_2 = 0$) iſt wieder mit Rückſicht auf den ε_t entſprechenden Druck (k_2)

$$r_1 \geqq r_2 \sqrt[3]{\frac{k_2}{k_2 - 1{,}05\,p_1}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 523\,b)$$

ſo daß nicht $p_1 \geqq \frac{k_2}{1{,}05}$ ſein darf, während außerdem mit Rückſicht auf den ε_r entſprechenden Zug (k_1) noch $p_1 \geqq \frac{k_1}{0{,}9}$ ausgeſchloſſen iſt.

Für relativ-geringe Werte von $r_1 - r_2$ führen die Entwickelungen zurück zu den Formeln des § 214.

Daß ein Eindrücken der Wand ausgeſchloſſen iſt, wird natürlich auch hier vorausgeſetzt.

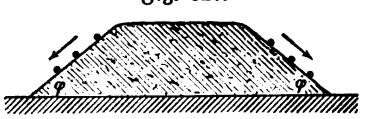
Zehnte Abteilung.

Systeme fester Körper von lockerem Gefüge (Schüttmassen).

217. Natürliche und künstliche Böschung. Haufen von Getreidekörnern, von Bleischrot, von trockener Erde u. s. w., welche auf wagerechter Bodenfläche aufgeschüttet sind, zeigen bei aller Unregelmäßigkeit der Gestaltung insofern eine bestimmte Gesetzmäßigkeit in ihrer Anordnung, als die Randwinkel gegen die Horizontale (Böschungswinkel) für jedes Material eine feste Grenze nicht überschreiten. Diese Grenze der Randwinkel für eine bestimmte Schüttmasse nennt man deren natürlichen Böschungswinkel[1]).

Ist eine Schüttmasse unter dem natürlichen Böschungswinkel φ angeordnet, so schlägt der Versuch, noch weitere Teilchen der Masse (vergl. Fig. 920) aufzubringen, fehl, da diese abgleiten oder abrollen, während bei einem Böschungswinkel, welcher kleiner ist als φ, weitere Teilchen aufgeschüttet werden können, bis die natürliche Böschung hergestellt ist. Vergleicht man diese Beziehungen mit der Reibung auf einer schiefen Ebene, so ist φ der entsprechende Reibungswinkel und $f = tng\,\varphi$ der entsprechende Reibungskoeffizient (vergl. S. 533). Man kann infolgedessen auch den natürlichen Böschungswinkel von Schüttmassen als Reibungswinkel auffassen und demgemäß bezeichnen.

Fig. 920.



Um φ durch Versuche zu bestimmen, streicht man z. B. eine Schüttmasse mit einem Lineale von unten nach oben ab, so daß die Böschung allmählich steiler wird und beobachtet den Winkel des Absturzes.

Erfahrungsmäßig liegt φ für die verschiedenen Erdarten in den Grenzen $20^0 \ldots 50^0$; bei Erdschüttungen, welche Regen u. s. w. ausgesetzt sind, verwendet man z. B. im allgemeinen den Mittelwert $\varphi = 30^0$ für durchnäßte Erde.

Ist den einzelnen Teilchen einer Schüttmasse ein Bindemittel beigemischt, z. B. Thon oder Lehm oder auch Wasser bei Sandmassen, so sind neben der Reibung auch noch Schubkräfte, welche der Kohäsion entsprechen, zu berücksichtigen.

In Folgendem wird vorausgesetzt, daß diese Schubkräfte, deren zahlenmäßige Darstellung äußerst unsicher ist, vernachlässigt werden dürfen.

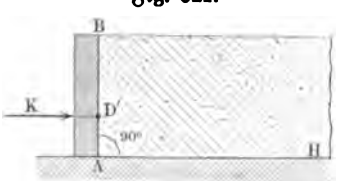
[1]) Vergl. auch z. B. die Haufen zerkleinerter Steine am Rande der Chausseen.

Eine Böschung, welche die Grenze φ übersteigt, läßt sich bei verschwindender Kohäsion nur herstellen, wenn man geeignete Stützkörper anbringt, wie es Fig. 921 für eine künstliche Böschung von 90° zeigt, welche durch eine senkrechte ebene Platte AB und durch die wagerechte Kraft $[K]$ erhalten wird, wobei wir voraussetzen, daß die gewichtslos gedachte Platte bei A nicht befestigt ist.

Für die folgenden Betrachtungen nehmen wir ein für allemal an, daß die ebene Platte AB und die Erdschüttung einen prismatischen Körper bilden, für welchen Fig. 921 und die entsprechenden weiteren Figuren einen symmetralen Normalschnitt (Mittelschnitt) darstellen, so daß sich also Platte und Erdschüttung senkrecht zur Ebene der Zeichnung vor und hinter dieser gleich weit ausdehnen.

Beseitigt man in Fig. 921 die Kraft $[K]$, so rutscht die Schüttmasse unter den gemachten Voraussetzungen nach der Platte zu ab, diese umwerfend, und nimmt dabei die natürliche Böschung φ an. Dasselbe tritt auch noch für relativ-kleine Werte von $[K]$ ein, während anderseits bei relativ-großen Werten von $[K]$ die Schüttmasse durch die Platte aufwärts geschoben wird.

Fig. 921.



Im ersten Falle wird das Gleichgewicht dadurch gestört, daß der Druck der Schüttmasse überwiegt, während im zweiten Falle deren Widerstand zu gering ist.

Denkt man sich $[K]$ wachsen vom Werte 0 bis zu einem Werte K_1, für welchen gerade Gleichgewicht mit dem Druck der Schüttmasse eintritt, so wird das Gleichgewicht für alle Werte $K = 0 \ldots K_1$ dadurch gestört, daß die Schüttmasse (aktiv) die Platte umwirft.

Wenn K über K_1 hinaus wächst bis zu einem Werte K_2, für welchen gerade das Emporschieben der Schüttmasse beginnt, so wird das Gleichgewicht für alle Werte $K = K_2 \ldots \infty$ dadurch gestört, daß die Schüttmasse (passiv) durch Vermittelung der Platte einer Formänderung unterliegt.

Die Grenzwerte K_1 und K_2 von $[K]$, zwischen denen Gleichgewicht vorhanden ist, pflegt man bezw. als Maße des aktiven (oder thätigen) Druckes und des passiven (oder ruhenden) Druckes der Schüttmasse einzuführen, welche natürlich die Gegenkräfte von K_1 und K_2 sind. Da man Schüttmassen in der Praxis allgemein durch das Worte „Erde" zu bezeichnen pflegt, so gelten demgemäß folgende Erklärungen:

1. Den aktiven (oder thätigen) Erddruck mißt man durch den kleinsten Wert K_1 von $[K]$, bei welchem gerade noch Gleichgewicht vorhanden ist (unterer Grenzzustand des Gleichgewichtes).

2. Den passiven (oder ruhenden) Erddruck mißt man durch den größten Wert K_2 von $[K]$, bei welchem gerade noch Gleichgewicht vorhanden ist (oberer Grenzzustand des Gleichgewichtes).

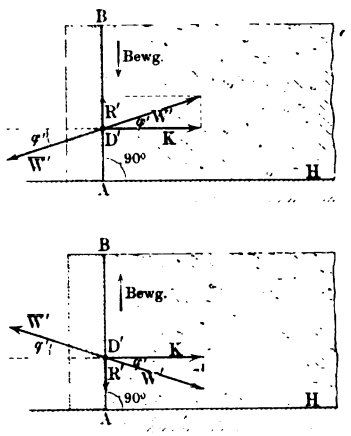
Für Konstruktionen sind natürlich nur Werte in den Grenzen $K_1 \ldots K_2$ verwendbar.

Unter welchen Umständen $[K]$ thatsächlich wagerecht anzubringen ist, und unter welchen Umständen $[K]$ mit der Normalen von AB einen Winkel bildet, ist eine viel umstrittene Frage.

Nimmt man an, daß die Erde das Bestreben hat, längs AB frei zu gleiten, bei Fällen des thätigen Erddrucks abwärts und bei Fällen des ruhenden Erddrucks aufwärts, so tritt an der Grenze AB eine gewisse Reibung auf, welche bei voller Entwickelung einem bestimmten Reibungskoeffizienten f' bezw. einem Reibungswinkel φ' für Plattenmaterial und Erde entspricht.

Statt der wagerechten Kraft $[K]$ tritt dann eine Kraft $[W']$ von anderer Richtung auf, und zwar gilt bei voller Entwickelung der Reibung von AB die Beziehung $W' \cos \varphi' = K$; den Grenzen K_1 und K_2 entsprechen dann Werte W_1' und W_2' von $[W']$.

Fig. 922.



Die Fig. 922 a und b zeigen diese Beziehungen für volle Entwickelung der Reibung $[R']$ und zwar Fig. 922 a für eine abwärts gerichtete Bewegung der Erde, wie sie bei den gemachten Voraussetzungen für Werte $W' = 0 \ldots W_1'$ eintreten müßte, Fig. 922 b für eine aufwärts gerichtete Bewegung der Erde, wie sie bei den gemachten Voraussetzungen für Werte $W' = W_2' \ldots \infty$ eintreten würde; in beiden Fällen ist $[\overline{W'}]$ der entsprechende Erddruck.

Denkt man sich den Wert W' von 0 über W_1' und W_2' nach ∞ laufen, so entspricht dem Übergange $W_1' \ldots W_2'$ ein Übergang von Fig. 922 a in Fig. 922 b, d. h. innerhalb des Gebietes $W_1' \ldots W_2'$, welchem Gleichgewicht entspricht, geht die Reibung von der vollen Entwickelung der Fig. 922 a in die volle Entwickelung der Fig. 922 b über, ist also im allgemeinen in diesem (für Konstruktionen brauchbaren) Gebiete nicht voll entwickelt.

Über den Grad ihrer Entwickelung läßt sich in theoretischer Hinsicht keine Gewißheit erlangen, ebenso wenig gestatten Versuche, hierüber zu entscheiden.

Tritt man der Annahme eines freien Gleitens der Erde an AB nicht bei, setzt man vielmehr voraus, daß Erde und Platte gewissermaßen aus einem Stücke bestehend anzusehen sind u. s. w., so wird man doch bei der Unsicherheit aller solcher Ansätze darauf Rücksicht nehmen müssen, daß der Widerstand der Platte AB gegen deren Normale irgend eine Abweichung λ zeigt, für welche in bestimmten Fällen auch $\lambda = 0$ in Geltung sein kann.

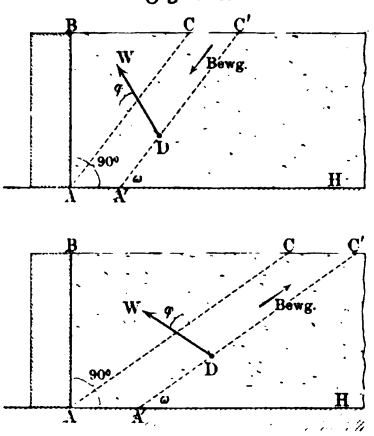
Die zunächst vorhandene Unsicherheit in Bezug auf die Feststellung oder Abschätzung des Winkels λ, für welche im allgemeinen die Bedingung $0 \leqq \lambda \leqq \varphi'$ als gültig angenommen wird, tritt in allen, bisher aufgestellten Theorieen des Erddruckes auf.

Während man λ früher meist durch eine volle Reibungsentwickelung ($\lambda = \pm\varphi'$) an AB bestimmt dachte, wird neuerdings oft empfohlen, mit dem Werte $\lambda = 0$ zu rechnen, d. h. den Erddruck stets senkrecht zur Platte AB wirksam zu denken.

Abgesehen von der Unbestimmtheit in der Bestimmung von λ hat es keine Schwierigkeit, die gegebenen Erläuterungen und Erklärungen auf andere Fälle auszudehnen, als sie Fig. 921 darstellt, z. B. auf den Fall einer beliebigen ebenen (oberen) Begrenzung der Schüttmasse bei beliebiger Neigung von AB gegen den Horizont.

Um den thätigen und den ruhenden Erddruck wirklich zu bestimmen, geht man von der Thatsache der Erfahrung aus, daß sich die Bruchflächen trockener Schüttmassen, welche bei Störung des Gleichgewichtes auftreten, in gewisser Annäherung als Ebenen darstellen.

Fig. 923.



An diesen Bruchebenen oder Gleitebenen tritt für die Grenze des Gleichgewichtes natürlich die Reibung (φ) in voller Entwickelung auf, und zwar ist sie innerhalb der Bruchebene für den unteren Gleichgewichtszustand des thätigen Erddruckes nach aufwärts und für den oberen Gleichgewichtszustand des ruhenden Erddruckes nach abwärts gerichtet.

Für den Fall der Fig. 921 müssen die Bruchflächen aus Gründen der Symmetrie senkrecht zur Ebene der Zeichnung liegen; in Fig. 923 a und b ist demgemäß für die Bruchfläche $A'C'$ der Widerstand $[W]$ des stehen bleibenden Teiles der Erdmasse gegen den abgleitenden Teil bei ruhendem bezw. bei thätigem Erddruck angedeutet, dessen Gegenkraft $[\overline{W}]$ natürlich den Druck des abgleitenden Teiles der Erde auf den stehen bleibenden Teil darstellt.

Nimmt man nun ferner in hinreichender Übereinstimmung mit der Erfahrung an, daß solche Bruchebenen stets durch die, dem Punkte A entsprechende Begrenzung, d. h. durch die untere Kante von Platte und Schüttmasse gehen, so ist stets das Gleichgewicht eines dreiseitigen Erdprismas vom Querschnitt ABC zu betrachten, bei dessen Bewegung die Reibung für AC voll (φ) entwickelt ist, während für AB in Bezug auf die Druckrichtung (λ) von vornherein keine sichere Bestimmung zu treffen ist.

Wir werden diese noch ausstehende Bestimmung für die Druckrichtung (λ) von AB für die wichtigeren Fälle der Praxis durch den Satz der drei Kräfte zu gewinnen suchen, da die Kräfte $[W']$ an AB und $[W]$ an AC mit dem Gewichte G des Prismas vom Querschnitte ABC im Gleichgewichte sein müssen.

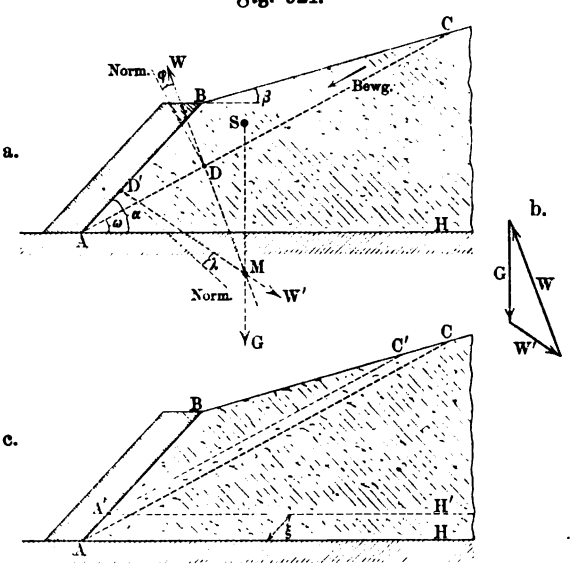
Dazu werden wir für eine beliebige ebene Oberfläche der Schüttmasse die Angriffspunkte von $[W']$ und $[W]$ bestimmen, und zwar unter der allgemein zugestandenen Voraussetzung, daß der Neigungswinkel ω einer Gleitfläche durch A und ebenso der Winkel λ stets unabhängig sind von der Länge AB.

Denkt man sich die Platte AB in Fig. 921 u. f. w. und die Kraft $[K]$ durch eine Mauer ersetzt, für deren Grundfläche eine, ihrem Gewichte entsprechende Reibung anzusetzen ist, so hängen die Abmessungen solcher Mauern (Futtermauern) bei brauchbaren Konstruktionen ab von dem Werte des thätigen auf sie wirkenden Erddrucks.

Ebenso ist die Kenntnis des ruhenden Erddrucks von Wichtigkeit bei der Bestimmung des Widerstandes des Erdreichs gegen Gewölbe, Tunnels u. s. w.

218. Der Angriffspunkt des Erddrucks. Für den ziemlich allgemeinen Fall der Fig. 924, deren Kräfte dem Falle des thätigen Erddrucks entsprechen, ist die Fläche von $\triangle ABC$ durch den Sinussatz für $AB = s$ darstellbar als $K \cdot s^2$, wobei K einen Faktor bezeichnet, der nur von α, β und ω abhängt.

Fig. 924.



Ist l die Länge des Prismas vom Querschnitte ABC, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, und γ sein specifisches Gewicht, so ist dessen Gewicht $[G]$ demnach gegeben als

$$K \cdot s^2 \cdot l\gamma.$$

Da $[W']$, $[W]$ und $[G]$ gemäß Fig. 924 b bei Gleichgewicht ein geschlossenes Kraftdreieck bilden müssen, so sind auch $[W']$ und $[W]$ proportional zu s^2, so daß man W' darstellen kann als

$$C \cdot s^2,$$

wobei C einen Faktor bezeichnet, der nur von α, β und ω und von φ und λ abhängt.

Sind nun die Größen ω und λ unabhängig von $AB = s$, so liegt der Angriffspunkt D von $[W']$ so, daß $AD' = \frac{1}{3} AB$ ist.

Um dies zu beweisen, stellen wir gemäß Fig. 924 c folgende Betrachtung an. Wenn der Angriffspunkt D des Erddruckes $W' = Cs^2$ von B auf AB den Abstand ns hat, so hat der Angriffspunkt des Erddruckes

$C(s-\xi)^2$, welche einer Bodenfläche $A'H'$ entsprechen würde, unter den gemachten Voraussetzungen auf AB von B den Abstand $n(s-\xi)$.

Der Druck $Cs^2 - C(s-\xi)^2 = C\xi(2s-\xi)$, welcher der Erdschicht vom Querschnitte $AA'C'C$ entspricht, hat irgend einen Punkt von $A'A$ als Angriffspunkt, so daß dessen Abstand von B auf AB darstellbar ist als $s - \mu\xi$, wobei μ einen echten Bruch bezeichnet.

Denkt man das Prisma vom Querschnitte ABC zusammengesetzt aus dem Prisma vom Querschnitte $A'BC'$ und der Schicht vom Querschnitt $AA'C'C$, so folgt nach dem Momentensatze für B als Drehpunkt, da es sich um drei Parallelkräfte handelt,

$$C(s-\xi)^2 \,.\, n(s-\xi) + C\xi(2s-\xi) \,.\, (s-\mu\xi) = Cs^2 \,.\, ns$$

oder

$$n[s^3 - (s-\xi)^3] = \xi(2s-\xi)(s-\mu\xi)$$

oder

$$n = \frac{(2s-\xi)(s-\mu\xi)}{3s^2 - 3s\xi + \xi^2}.$$

Für $lim\,\xi = 0$ ergiebt sich $n = \frac{2}{3}$, d. h. der Erddruck $[W']$ vom Werte Cs^2 greift an im oberen Grenzpunkte des unteren Drittels von AB.

Eine entsprechende Betrachtung zeigt, daß der Erddruck $[W']$ für AC gleichfalls im oberen Grenzpunkte des unteren Drittels von AC angreift.

Die Betrachtung gilt ebensowohl für den thätigen wie für den ruhenden Erddruck.

219. Folgerungen aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen. Bei senkrechter Stellung von AB bestimmt die Vertikale durch den Schwerpunkt S vom $\triangle ABC$, in welchem $[G]$ angreift, den Punkt D, in welchem

Fig. 925.

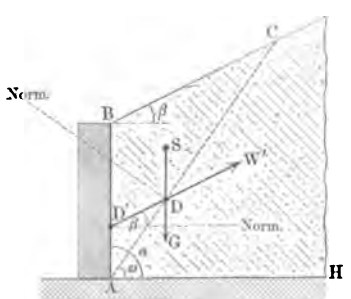
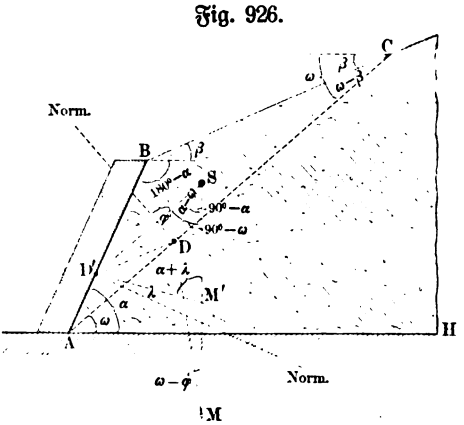


Fig. 926.



$[W]$ angreift. Da $[W']$ durch D' und durch den Schnittpunkt D von $[G]$ und $[W]$ gehen muß und da $D'D // BC$ ist, so ist $[W']$ parallel zu BC und

demnach ist hier $\lambda = \beta$ und zwar sowohl bei dem thätigen als bei dem ruhenden Erddruck (vergl. Fig. 925).

Bei schiefer Stellung von AB bestimmt die Vertikale durch S nicht den Punkt D. Um in diesem Falle die Bedingung dafür abzuleiten, daß sich $[G]$, $[W]$ und $[W']$ in einem Punkte schneiden, betrachten wir Fig. 926, in welcher die Richtungen von $[W]$ und $[W']$ für den thätigen Erddruck eingezeichnet sind; ihre Schnittpunkte M und M' mit der Vertikalen von S müssen zusammenfallen.

Aus $\triangle SDM$ folgt

$$SM = SD \cdot \frac{\cos(\alpha - \omega + \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)}$$

und aus $\triangle SD'M'$ folgt

$$SM' = SD' \cdot \frac{\cos(\omega - \alpha - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)},$$

beides nach dem Sinussatze. Sollen M und M' zusammenfallen, so muß

$$SD \cdot \frac{\cos(\alpha - \omega + \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)} = SD' \cdot \frac{\cos(\omega - \alpha - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)}$$

sein, d. h. man hat, da $SD : SD' = BA : AC$ und da

$$BA : AC = \sin(\omega - \beta) : \sin(\alpha - \beta)$$

ist,

$$\frac{\cos(\omega - \alpha - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)} = \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\cos(\alpha - \omega + \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)} \quad \ldots \quad 524)$$

Aus Gleichung Nr. 524) folgt bei Entwickelung der linken Seite ein verhältnismäßig einfacher Wert für $tng\,\lambda$ oder $cot\,\lambda$, und damit ist λ dargestellt als Funktion von ω.

Für $\alpha = 90^0$ geht Gleichung Nr. 524) über in

$$\frac{\sin(\omega - \lambda)}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\omega - \beta)}{\cos\beta},$$

d. h. man hat $\lambda = \beta$ zu setzen. Vergl. Fig. 925.

Für den Fall des ruhenden Erddruckes ist $-\varphi$ für $+\varphi$ einzuführen in Formel Nr. 524), wodurch sich wieder $tng\,\lambda$ oder $cot\,\lambda$ einschließlich des Vorzeichens ergiebt.

Für $\alpha = 90^0$ ist wieder $\lambda = \beta$ zu setzen.

Im allgemeinen ist demnach λ eine Funktion von ω und nur für $\alpha = 90^0$ erhält λ, unabhängig von ω, den Wert β; und zwar sowohl für den thätigen als auch für den ruhenden Erddruck.

220. Der thätige und der ruhende Erddruck bei wagerechter Oberfläche und senkrechter Stützfläche. Ist die Oberfläche der Schüttmasse bei senkrechter Stellung von AB wagerecht, so steht $[W']$ auf AB senkrecht, weil $[W']$ gemäß § 221 parallel ist zu BC; es entspricht also $[W']$ in diesem Falle genau der Kraft $[K]$ in Fig. 921.

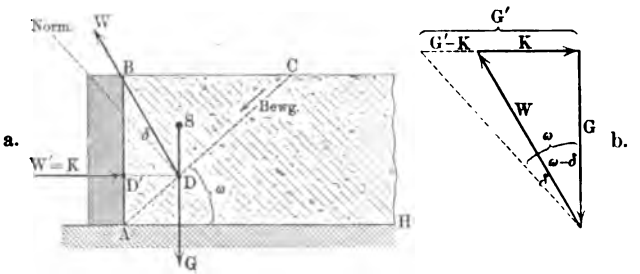
Um nun den Neigungswinkel ω_1 der Gleitfläche AC_1 für den thätigen Erddruck K_1 zu bestimmen, sehen wir AC in Fig. 927 a (a. f. S.) zunächst

als Spur einer beliebigen Schnittebene unter dem Winkel ω an, gegen deren Normale [W] um einen bestimmten Winkel δ abgelenkt ist, wobei $\delta < \varphi$ ist.

Man hat hier für ein Erdprisma von der Länge l bei einem specifischen Gewicht γ der Erde für $AB = h$

$$G = \frac{AB \,.\, BC}{2} \cdot l \,.\, \gamma = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \cot\omega$$

Fig. 927.

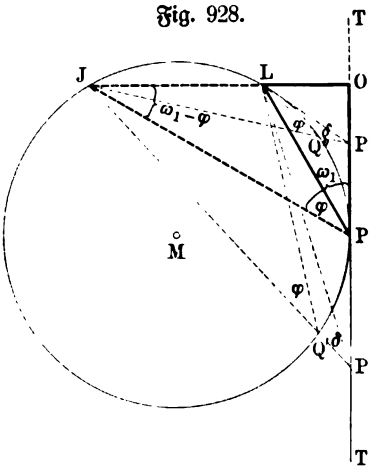


und es ist also, falls man die Konstante $\frac{1}{2}\gamma l h^2$ durch G' bezeichnet,

$$G = G' \,.\, \cot\omega.$$

Bildet man, wie es Fig. 927 b zeigt, das Kraftdreieck für Fig. 927 a und trägt man in Fig. 927 b die Größe G' ein, entsprechend der Gleichung $G = G' \,.\, \cot\omega$, so bildet sich über $G' - K$ der Winkel δ.

Fig. 928.



Um die Bruchfläche zu finden, hat man Fig. 927 mit demjenigen Werte ω_1 von ω zu entwerfen, für welchen δ als Maximum den Wert φ annimmt.

Um dies zu erreichen, zeichnet man, wie Fig. 928 angiebt, den Kreis über eine beliebige Strecke JL als Sehne, welcher φ als Peripheriewinkel faßt, und zieht an den Kreis eine Tangente TT', welche zu JL senkrecht ist.

Für einen beliebigen Punkt P' (oder P'') dieser Tangente ist $\measuredangle JP'L < \measuredangle JQ'L$, weil $\measuredangle JQ'L$ Außenwinkel des Dreiecks $LQ'P'$ ist, d. h. man hat $\delta < \varphi$, während sich für den Berührungspunkt P die Beziehung $\measuredangle JPL = \varphi$ ergiebt.

Demnach ist $\measuredangle JPL = \varphi$ das gesuchte Maximum für δ und es stellt also $\measuredangle JPO$ den gesuchten Winkel ω_1 dar.

Nach dem Sehnentangentengesetze ist $\measuredangle LPO = \measuredangle LJP$, d. h. man hat $\measuredangle LJP = \omega_1 - \varphi$, während ferner nach dem Satze vom Außenwinkel $\measuredangle OLP = (\omega_1 - \varphi) + \varphi = \omega_1$ ist.

Da $\measuredangle OLP + \measuredangle OPL = 90^0$ ist, so ist

$$(\omega_1 - \varphi) + \omega_1 = 90^0,$$

d. h. man hat

$$\omega_1 = 45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 525)$$

Da nach Fig. 927 b gilt $K = G \,.\, tng(\omega - \delta)$, so ist der Wert K_1 von K, welcher $\delta = \varphi$ und $\omega = \omega_1$ entspricht, gegeben als

$$K_1 = G_1 \,.\, tng(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Dabei ist G_1 der Wert von G, welcher ω_1 entspricht, d. h. man hat gemäß $G = \frac{1}{2}\gamma l h^2 cot\,\omega$ für $\omega = \omega_1$

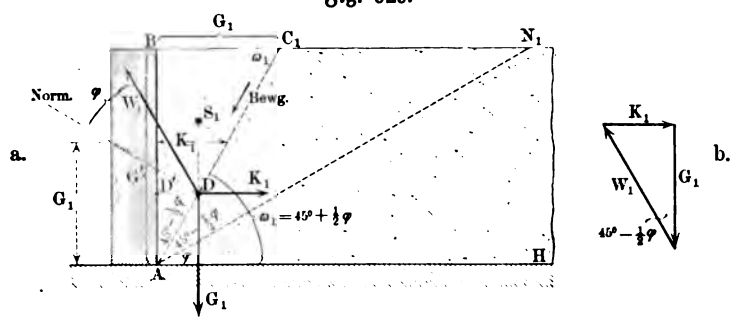
$$G_1 = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 cot(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 tng(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \quad \ldots \quad 526)$$

und also auch

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 tng^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \quad \ldots\ldots \quad 527)$$

Die Ergebnisse der Untersuchungen für den thätigen Erddruck K_1 stellt Fig. 929 dar; durch Anlage von $\measuredangle HAN_1 = \varphi$ an die Horizontale

Fig. 929.



AH, z. B. von $\varphi = 30^0$, entsteht $\measuredangle BAN_1 = 90^0 - \varphi$, so daß dessen Halbierungslinie AC_1 die gesuchte Gleitfläche ist, weil $\measuredangle HAC_1 = \varphi + (45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 45^0 + \frac{1}{2}\varphi$ ist.

Stellt man $G' = \frac{1}{2}\gamma l h^2$ durch AB dar, so ist $G_1 = G' \,.\, cot\,\omega_1$ durch BC_1 gegeben, während eine Parallele zu AH im Abstande G_1 den Wert K_1 bestimmt, weil $K_1 = G_1^2 : G'$ ist; außerdem (vergl. auch Fig. 929 b) hat man auch $W_1 \,.\, cos(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = G_1$.

Für den ruhenden Erddruck K_2 gelten entsprechende Überlegungen, wobei der Bewegungspfeil für AC in Fig. 927 a umzukehren ist, so daß auch $[W]$ um δ bezw. um φ gegen die Normale von AC nach unten zu abgelenkt wird. Es kommt dies auf eine Vertauschung von $+\varphi$ gegen $-\varphi$ in den erhaltenen Formeln hinaus, d. h. man hat für den ruhenden Erddruck

$$\omega_2 = 45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 528)$$

und

$$G_2 = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 tng(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) \quad \ldots\ldots \quad 529)$$

und

$$K_2 = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 tng^2(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) \quad \ldots\ldots \quad 530)$$

In Fig. 930 ſind, entſprechend Fig. 929, die Ergebniſſe für den ruhenden Erddruck dargeſtellt, wieder für $\varphi = 30^0$.

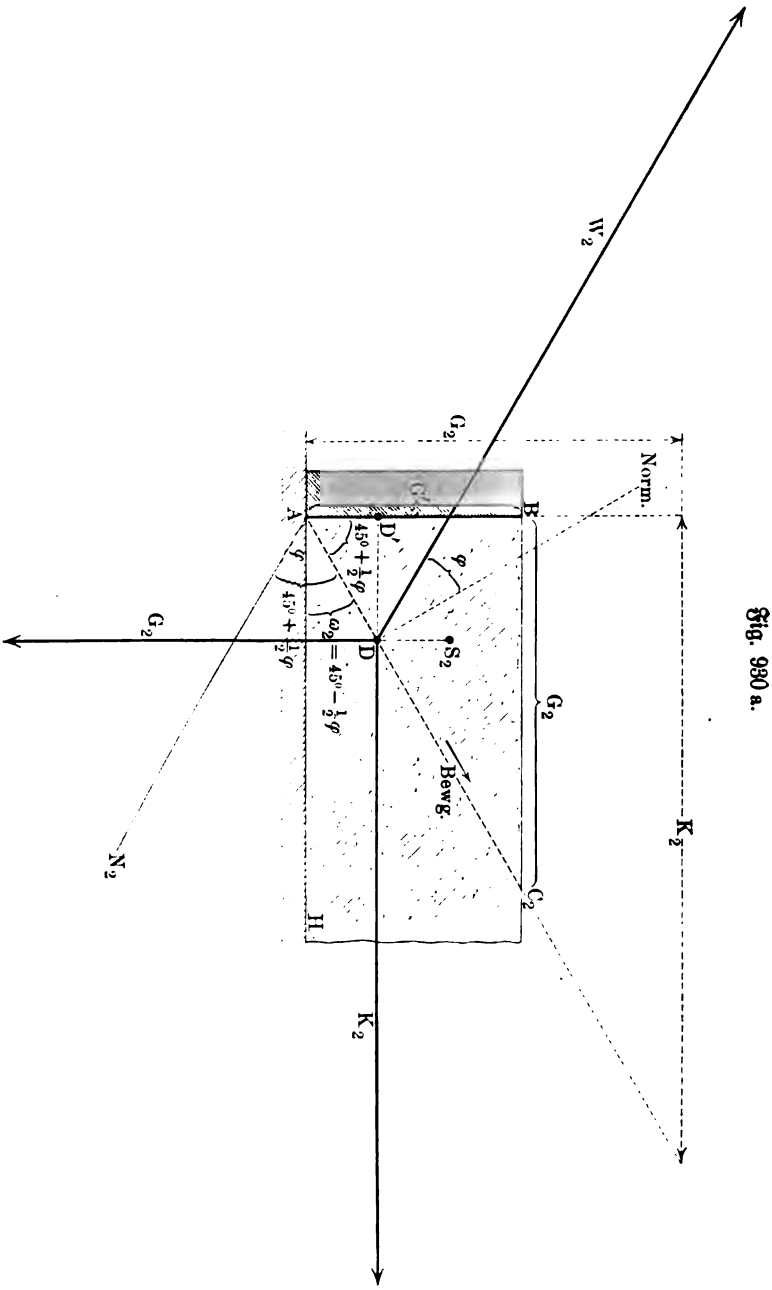


Fig. 930 a.

Man hat allgemein

$$K_1 : K_2 = tng^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) : tng^2(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

oder auch

$$K_1 : K_2 = tng^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) : cot^2(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

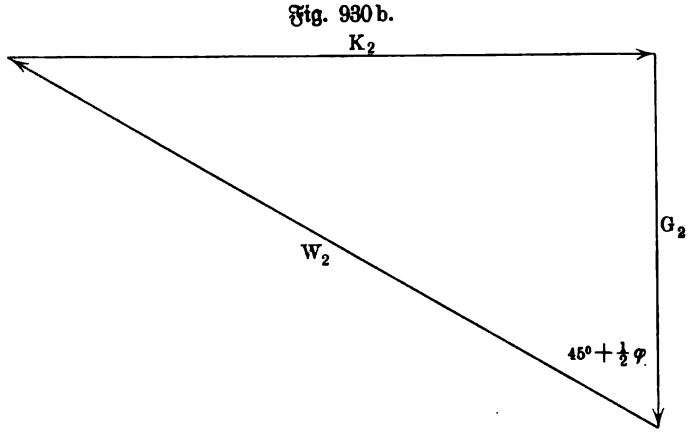
und also z. B. für $\varphi = 30^0$

$$K_1 : K_2 = tng^2 30^0 : tng^2 60^0 = \tfrac{1}{3} : 3 = 1 : 9.$$

In der Praxis pflegt man in den erhaltenen Formeln stets $l = 1$ zu setzen, d. h. man rechnet immer für eine Mauer von der Länge 1, also im allgemeinen von der Länge 1 m.

Die Bruchflächen durch AC_1 und AC_2 unter den Winkeln ω_1 und ω_2 unterscheiden sich von anderen Schnittflächen unter beliebigen Winkeln ω gemäß ihrer Konstruktion dadurch, daß an ihnen die Reibung vollständig entwickelt ist ($\delta = \varphi$), während an beliebigen Schnittflächen eine unvollkommene Entwickelung ($\delta < \varphi$) der Reibung stattfindet.

Fig. 930 b.



Infolgedessen übt auch das Prisma vom Querschnitt ABC, welches bei thätigem Erddruck durch ω_1 bestimmt ist, einen größeren Druck gegen die Platte aus, als ein Prisma, das durch einen anderen Wert von ω bestimmt ist; man nennt es deshalb auch das Prisma des größten Druckes.

Ebenso bietet das Prisma vom Querschnitt ABC, welches bei ruhendem Erddruck durch ω_2 bestimmt ist, der Platte einen kleineren Widerstand dar, als ein Prisma, das durch einen anderen Wert von ω bestimmt ist; man nennt es deshalb auch das Prisma des kleinsten Widerstandes.

Demnach läßt sich ω_1 auch bestimmen, indem man das Maximum K_1 von K bei abwärts gleitendem Prisma bestimmt, während ω_2 dem Minimum K_2 von K bei aufwärts gleitendem Prisma entspricht.

Dabei kann man sich vorstellen, das Prisma vom Querschnitte ABC gleite auf der schiefen Ebene mit Reibung unter dem Einflusse von $[K]$ abwärts oder aufwärts, so daß gemäß Formel Nr. 143) a. S. 541 für den thätigen Erddruck das Maximum K_1 von

$$K = G \,.\, tng(\omega - \varphi) = G' tng(\omega - \varphi) cot\, \omega$$

und für den ruhenden Erddruck das Minimum K_2 von

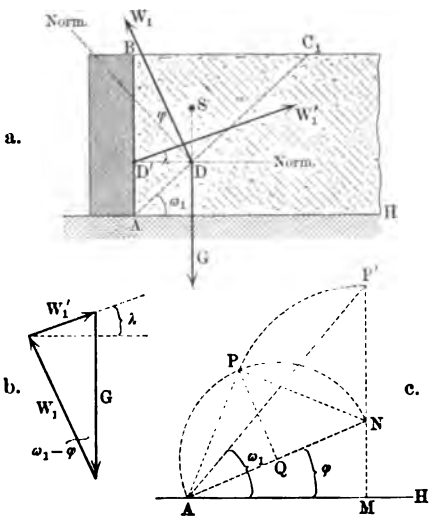
$$K = G \,.\, tng(\omega + \varphi) = G' tng(\omega + \varphi) cot\, \omega$$

zu bestimmen ist.

Dieselben Ansätze gewinnt man auch aus $\triangle LOP$ der Fig. 928 für den thätigen Erddruck, falls man $JO = G'$ und $LO = K$ setzt, und aus der entsprechenden Figur für den ruhenden Erddruck.

Es hat keine Schwierigkeiten, die Betrachtung auf den Fall auszudehnen, in welchem statt $[K]$ eine Kraft $[W']$ auftritt, welche gegen die Normale von AB um den gegebenen Winkel λ abgelenkt ist; bezeichnet φ' den Reibungswinkel für Erde und Mauer, so ist dabei $\lambda \leqq \varphi'$.

Fig. 931.



Für den thätigen Erddruck gilt in diesem Falle Fig. 931 a und b, und man findet z. B. für $\lambda = \varphi$, d. h. für eine Entwickelung der Reibung an AB, welche mit der vollen Entwickelung der Reibung an AC_1 übereinstimmt,

$$tng\, \omega_1 = tng\, \varphi + \frac{1}{\sqrt{2} \,.\, cos\, \varphi}$$

und

$$W_1' = \tfrac{1}{2} \gamma l h^2 \frac{cos\, \varphi}{(1 + \sqrt{2} \,.\, sin\, \varphi)^2}.$$

Man konstruiert in diesem Falle ω_1 gemäß Fig. 931 c, in welcher AM eine beliebige Strecke ist, während $\measuredangle NAM = \varphi$ und $AP = PN$ und $NP = NP'$ ist; man hat hier

$$tng\, \omega_1 = \frac{MN + NP'}{AM} = tng\, \varphi + \frac{NP}{AM} = tng\, \varphi + \frac{AN}{\sqrt{2} \,.\, AM}$$

$$= tng\, \varphi + \frac{1}{\sqrt{2} \,.\, cos\, \varphi}.$$

Da die Annahme $\lambda = \varphi$ der Untersuchung des § 219 widerspricht, so führen derartige Betrachtungen, welche noch vielfach üblich sind, nur zu angenäherten Werten.

221. Ausdehnung der Betrachtung des vorigen Paragraphen. Es hat keine Schwierigkeiten, die Untersuchungen auf den Fall auszudehnen, in welchem die Oberfläche der Schüttmasse eine beliebige (β) Ebene ist, solange AB senkrecht steht ($\lambda = \beta$).

Man bestimmt hier am besten beim thätigen Erddruck den Wert ω_1 von ω, welcher W' zu einem Maximum macht, und bei ruhendem Erddruck den Wert ω_2 von ω, bei welchem W' zu einem Minimum wird.

Besonders einfach wird die Betrachtung für den praktisch wichtigen Fall, in dem die Oberfläche der Schüttmasse den natürlichen Böschungswinkel φ als Neigung ($\beta = \varphi$) hat. Man hat hier gemäß Fig. 932 a zunächst für $AB = h$

$$G = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos\omega\cos\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$$

und dann für den thätigen Erddruck gemäß Fig. 932 b weiter

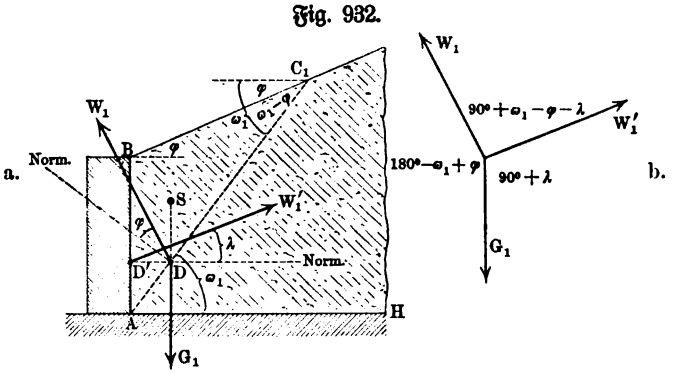
$$W' = \frac{G \,.\, \sin(\omega - \varphi)}{\cos(\omega - \varphi - \lambda)} = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos\omega\cos\varphi}{\cos(\omega - \varphi - \lambda)}.$$

Durch Entwickelung des Nenners findet man

$$W' = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi + \lambda) + tng\,\omega \,.\, \sin(\varphi + \lambda)}$$

und demnach ergiebt sich das Maximum W_1' von W' für möglichst kleine Werte des Nenners. Wenn λ von ω unabhängig ist, hat man also für

Fig. 932.



$\varphi + \lambda < 90^0$ den Wert von ω möglichst klein zu halten. Da $\omega = 0 \ldots \varphi$ unterhalb der natürlichen Böschung liegt, so ist φ das Minimum von ω, welches für eine Gleitfläche in Frage kommen kann, d. h. man hat hier

$$\omega_1 = \varphi \quad \text{und} \quad W_1' = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos^2\varphi}{\cos(-\lambda)} \quad \ldots\ldots \quad 531)$$

Da hier $\lambda = \varphi$ ist (vergl. S. 1262), so ergiebt sich

$$W_1' = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \cos\varphi.$$

Für $\lambda = 0$ würde sich hier $W_1' = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \cos^2\varphi$ ergeben.

Bei schiefer Stellung von AB hat man mit dem Übelstande zu kämpfen, daß λ eine Funktion von ω ist.

Für Fig. 933 a (a. f. S.) ergiebt sich z. B. zunächst mit Rücksicht auf $\triangle A\bar{B}C_1$ und $\triangle A\bar{B}B$,

$$G_1 = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 (cot\,\omega - cot\,\alpha)$$

und ferner bei thätigem Erddruck gemäß Fig. 933 b dann

$$W_1' = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{(cot\,\omega - cot\,\alpha)\sin(\omega - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi + \lambda - \omega)}.$$

In dieser Formel ist nun λ als Funktion von ω einzuführen gemäß der Betrachtung auf S. 1263 und darauf W' als Funktion von ω zu untersuchen.

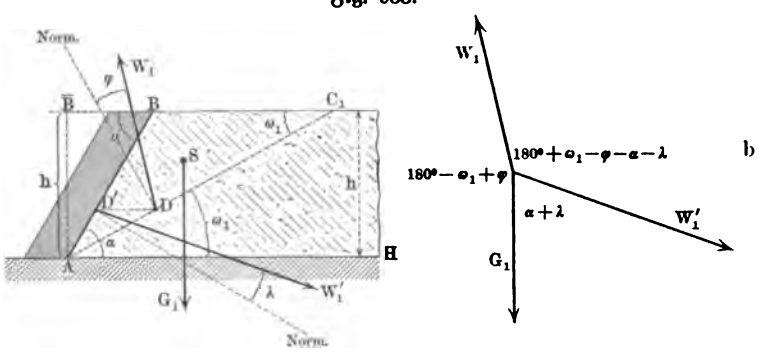
Bei dem äußerst verwickelten Bau von W' verzichtet man in der Praxis auf diese Untersuchung, nimmt vielmehr an, daß λ innerhalb der Grenzen $0 \ldots \varphi'$ einen erfahrungsmäßig zu bestimmenden Wert hat, welcher als unabhängig von ω angesehen werden darf.

Sucht man unter dieser thatsächlich nicht einwandfreien Annahme den Wert ω_1 auf, für welchen W' ein Maximum wird, so erhält man [1])

$$\cot \omega_1 = \cot(\alpha + \varphi + \lambda) + \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \lambda)\sin(\varphi + \lambda)}{\sin^2(\alpha + \varphi + \lambda) \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi}} \qquad 532)$$

und damit W_1' aus W' für $\omega = \omega_1$.

Fig. 933.



Für $\alpha = 90^0$ und $\lambda = 0$ gelangt man natürlich zurück zu der richtigen Formel des § 220, denn es ist gemäß Nr. 532)

$$\cot \omega_1 = \frac{-\sin\varphi + 1}{\cos\varphi}$$

oder

$$tng\,\omega_1 = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} = \frac{\sin(90^0 - \varphi)}{1 - \cos(90^0 - \varphi)}$$
$$= \cot\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = tng\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

d. h. man hat $\omega_1 = 45^0 + \frac{\varphi}{2}$ u. s. w.

Setzt man für $\alpha = 90^0$ und $\lambda = 0$ auch noch $\varphi = 0$, so erhält man $\omega_1 = 45^0$ und $\omega_2 = 45^0$ und $W_1' = W_2' = \frac{1}{2}\gamma l h^2$, d. h. man gelangt zu der, aus dem ersten Lehrgange der Physik bekannten Formel für den Seitendruck des Wassers.

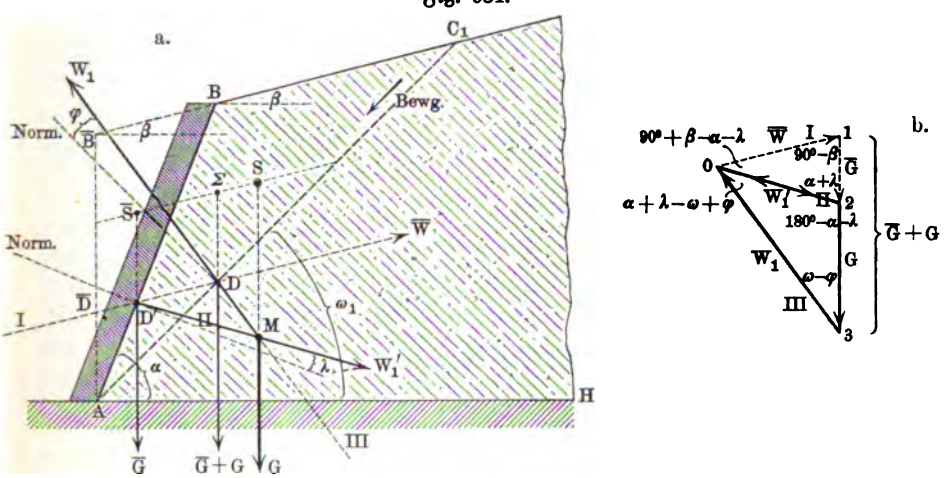
Überhaupt läßt sich der Wasserdruck auffassen als Druck einer Schüttmasse, für welche der Winkel der natürlichen Böschung φ, welcher ja zugleich Reibungswinkel ist, den Wert Null hat [1]).

[1]) Vergl. dazu Teil II, S. 39 u. f.

Man kann die Schwierigkeiten, welche die Bestimmung von λ bei schiefer Stellung von AB macht, gemäß § 226 umgehen, und zwar für eine beliebige ebene Oberfläche der Schüttmasse, wenn man, wie es Fig. 934 zeigt, AB als eine Schnittfläche eines Erdprismas vom Querschnitte $A\overline{B}C_1$ ansieht für $\measuredangle\, HA\overline{B} = 90^0$, dann zunächst das Prisma vom Querschnitt $A\overline{B}C_1$ behandelt, für welches $\lambda = \beta$ ist, und innerhalb dieses Prismas die Druckrichtung für den Schnitt AB feststellt.

Bezeichnet man den Druck in $\overline{D}$ von $A\overline{B}$ mit $\overline{W}$, so gilt für das Gleichgewicht der Prismen von dem Querschnitte $A\overline{B}C_1$, $A\overline{B}B$ und ABC_1 der Kräfteplan der Fig. 934 b, falls man die Gewichte der eingeführten Prismen bezw. durch $\overline{G} + G$, $\overline{G}$ und G bezeichnet; dabei ist $\overline{G} : G = \overline{B}B : BC_1$, wofür in Fig. 934 gewählt ist 1 : 2.

Fig. 934.



Setzt man eine, zwei Dreiecken des Kräfteplans gemeinsame Seite nach dem Sinussatze doppelt an, so ergiebt sich eine Gleichung zur Bestimmung von λ, falls ω als gegeben angesehen wird.

Man hat z. B.

$$\overline{W} = \overline{G} \cdot \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\beta - \alpha - \lambda)} = (\overline{G} + G) \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\cos(\beta - \omega + \varphi)}.$$

Da nach Fig. 934 a gilt (vergl. S. 1269) für $AB = h$

$$\overline{G} = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \quad \text{und} \quad \overline{G} + G = \tfrac{1}{2}\gamma l h^2 \frac{\cos\omega\cos\beta}{\sin(\omega - \beta)},$$

so hat man zur Bestimmung von λ

$$\frac{\cos(\beta - \alpha - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)} = \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\cos(\beta - \omega + \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\omega} \qquad 533)$$

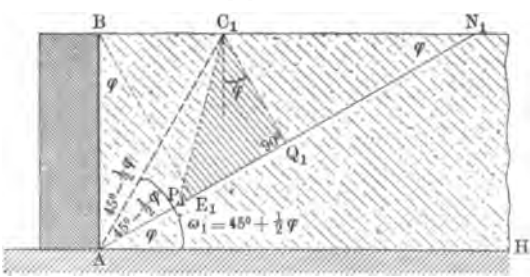
Vergleicht man diese Beziehung mit Gleichung Nr. 524), so scheinen sich aus beiden Gleichungen verschiedene Werte von λ zu ergeben, während eine

weitere Betrachtung zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Man weist letzteres am kürzesten nach, indem man gemäß Fig. 934 b in Fig. 934 a ein $[\overline{G}]$ und $[G]$ entsprechendes Seileck durch $\overline{D}$ zeichnet für $A\overline{D} = \frac{1}{3} A\overline{B}$, wobei auch, weil I parallel zu $\overline{B}C_1$ ist, $AD' = \frac{1}{3} AB$ wird. Vereinigt man $[\overline{G}]$ und $[G]$ zur Resultanten $[\overline{G} + G]$ in Σ, so schneiden sich die Seiten I und III des Seilecks auf der Vertikalen von Σ, weil auf dieser die Resultante $[\overline{G} + G]$ liegt. Da sich die Vertikale von Σ und I in D auf AC_1 schneiden ($AD = \frac{1}{3} AC_1$), so geht auch III durch diesen Punkt D, d. h. $[W_1]$ in D und $[W_1']$ in D' schneiden sich in demselben Punkte M der Vertikalen durch S.

Für die Ausführung dieses Verfahrens, welche zunächst die Bestimmung des Neigungswinkels ω der Gleitfläche AC_1 gemäß § 226 erfordert, ist der graphische Weg vorzuziehen, den wir nun betrachten wollen.

222. Die graphische Behandlung des Erddruckes. Fällt man in Fig. 935, durch welche wie in Fig. 929 die Gleitfläche für den thätigen Erddruck dargestellt ist, von C_1 das Lot C_1Q_1 auf AN_1, so ist $\triangle ABC_1 \cong AQ_1C_1$ und es bildet C_1Q_1 mit der Vertikalen den Winkel φ. Könnte man die Lage von Q_1 auf der gegebenen Geraden AN_1 unmittelbar bestimmen, so ließe sich auch Punkt C_1 leicht von neuem gewinnen. Zieht man noch $BE_1 // C_1Q_1$, so ist

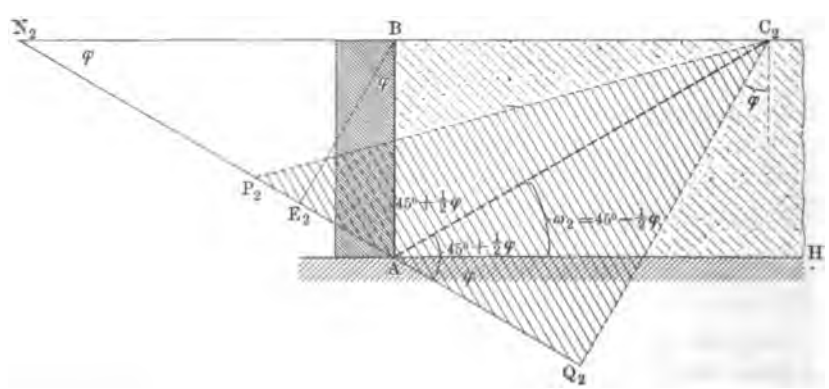
Fig. 935.



$$\sin\varphi = \frac{AE_1}{AB} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{AB}{AN_1},$$

d. h. man hat $\overline{AB}^2 = \overline{AQ_1}^2 = \overline{AE_1} \cdot \overline{AN_1}$ und es ist also AQ_1 die mittlere Proportionale der gegebenen Strecken AE_1 und AN_1.

Fig. 936.



Eine entsprechende Betrachtung von Fig. 936, durch welche, wie in Fig. 930, die Gleitfläche AC_2 für den ruhenden Erddruck dargestellt ist, führt zu der Beziehung

$$\overline{AB}^2 = \overline{AQ_2}^2 = \overline{AE_2} \cdot \overline{AN_2}.$$

Da $C_1Q_1 = C_1B = AB \cdot tng(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ ist, so wird für $AB = h$ durch $\overline{C_1Q_1}^2 = h^2 \cdot tng^2(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ eine Größe dargestellt, welche dem thätigen Erddruck $\frac{1}{2}\gamma l h^2 tng^2(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ proportional ist. Vergl. Fig. 935.

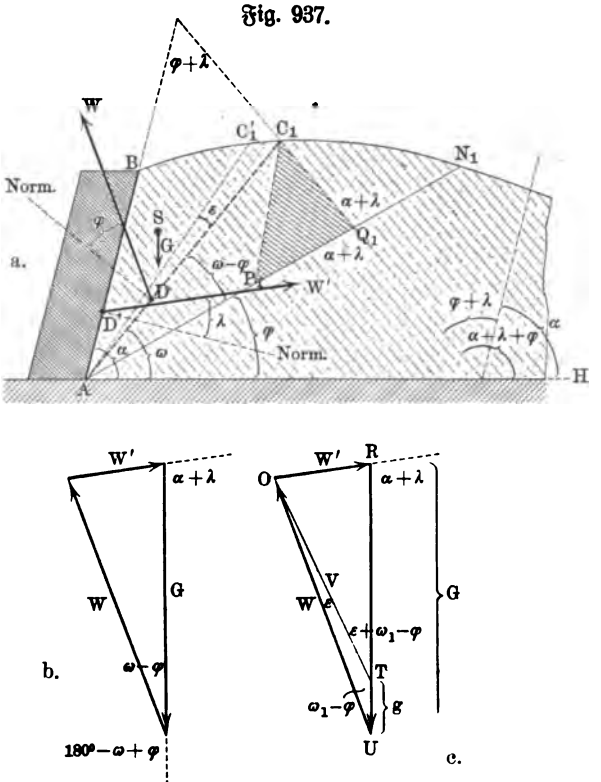
Macht man $Q_1P_1 = Q_1C_1$, so ist $\triangle P_1Q_1C_1 = \frac{1}{2}\overline{Q_1C_1}^2$, d. h. dieses Dreieck stellt für $l = 1$ und $\gamma = 1$ den thätigen Erddruck der Fig. 935 dar.

Entsprechendes gilt für $\triangle P_2Q_2C_2$ in Fig. 936 für den ruhenden Erddruck.

Man hat $K_1 : K_2 = \overline{C_1Q_1}^2 : \overline{C_2Q_2}^2$, d. h. es ist also z. B. $C_1Q_1 = \frac{1}{3}C_2Q_2$ für $\varphi = 30^0$.

Eine Ausdehnung dieser Betrachtungen führt zu dem graphischen Verfahren v. Rebhanns, welches fast alle Aufgaben umfaßt, welche für die Praxis von Bedeutung sind. Dabei muß aber auch wieder die Voraussetzung gemacht werden, daß λ unabhängig von ω gegeben ist, d. h. das Verfahren v. Rebhanns führt auch nur so lange zu gesicherten Ergebnissen, als AB bei einer beliebigen ebenen Oberfläche der Schüttmasse senkrecht steht.

Fig. 937.



Unter der Voraussetzung, daß λ unabhängig von ω gegeben ist, gilt dann sogar für eine beliebige cylindrische Begrenzung der Schüttmasse gemäß Fig. 937 die folgende Betrachtung.

Bezeichnet AC_1 für die, gemäß ABC_1N_1 begrenzte Schüttmasse die Gleitfläche, so ist Fig. 937b das entsprechende Kräftedreieck für den thätigen Erddruck, falls $[W]$ von der Normalen von AC_1 um φ und falls $[W']$ von der Normalen von AB um λ abgelenkt ist.

Faßt man nun W' als Funktion von ω auf, so ist $\omega = \omega_1$ dadurch

bestimmt, daß $W' = f(\omega)$ für $\omega = \omega_1$ ein Maximum ist. Ändert man ω um eine kleine Größe ε, so gilt nach dem Taylorschen Satze

$$f(\omega + \varepsilon) = f(\omega) + \frac{\varepsilon}{1} \cdot f'(\omega) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} f''(\omega) + \cdots$$

und es ist demnach in erster Annäherung

$$f(\omega + \varepsilon) = f(\omega),$$

wenn $f'(\omega) = 0$ ist, entsprechend der Bedingung eines Maximums oder Minimums von $f(\omega)$.

Da $f'(\omega) = 0$ ist für $\omega = \omega_1$, weil W' für $\omega = \omega_1$ ein Maximum hat, so gilt in erster Annäherung

$$f(\omega_1 + \varepsilon) = f(\omega_1).$$

Betrachtet man also eine Ebene AC_1', welche Ebene AC_1 benachbart ist und mit AH den Winkel $\omega_1 + \varepsilon$ bildet, so bleibt W' in erster Annäherung ungeändert, während G in $G - g$ und W in V übergeht, gemäß Fig. 937 c.

In Fig. 937 a werden G und g bezw. durch die Flächen BAC_1 und $C_1'AC_1$ dargestellt, während gemäß Fig. 937 c gilt,

$$G : g = \triangle\ ORU : \triangle\ OTU,$$

weil $\triangle\ ORU$ und $\triangle\ OTU$ gleiche Höhe haben.

Man hat also

$$BAC_1 : C_1'AC_1 = \triangle\ ORU : \triangle\ OTU.$$

Für $lim\ \varepsilon = 0$ bezw. $lim\ g = 0$ ist $C_1'AC_1 = \frac{1}{2}\overline{AC_1}^2 \,.\, arc\,\varepsilon$ und ebenso $\triangle\ OTU = \frac{1}{2}\overline{OU}^2 \,.\, arc\,\varepsilon$, und demnach gilt für die Grenze

$$C_1'AC_1 : \triangle\ OTU = \overline{AC_1}^2 : \overline{OU}^2$$

und also auch

$$BAC_1 : \triangle\ ORU = \overline{AC_1}^2 : \overline{OU}^2.$$

Da demnach für $OU = AC_1$ die Fläche BAC_1 und $\triangle\ ORU$ einander gleich werden, so wird die Fläche ABC_1 dargestellt durch ein Dreieck, welches durch Abbildung von $\triangle\ ORU$ nach dem Modul $AC_1 : OU$ entsteht.

Um diese Abbildung auszuführen, macht man in Fig. 937 a etwa $\measuredangle\ C_1AN_1 = \omega_1 - \varphi$, so daß $\measuredangle\ N_1AH = \varphi$ wird, und zieht C_1Q_1 so, daß $\measuredangle\ C_1Q_1A = 180^0 - (\alpha + \lambda)$ wird; es ist dann $\triangle\ AC_1Q_1$ die gesuchte Abbildung, so daß Fläche $ABC_1 = \triangle\ AC_1Q_1$ ist. Demnach gilt:

Die Spur AC_1 der Gleitfläche halbiert die Fläche ABC_1Q_1.

Da C_1Q_1 mit AH den Winkel $180^0 - (\alpha + \lambda + \varphi)$ bildet, so schließen BA und C_1Q_1 den Winkel $\varphi + \lambda$ ein, d. h. man kennt, abgesehen von der Lage von AN_1, die Richtung von C_1Q_1; man kann infolgedessen AC_1 ziemlich leicht durch Probieren als Halbierungslinie einer Fläche ABC_1Q_1 finden.

Da $\wedge\ AC_1Q_1 \sim \triangle\ UOR$, so ist ferner $W' : G = OR : RU = C_1Q_1 : Q_1A$, d. h. man hat

$$W' = G \cdot \frac{C_1Q_1}{Q_1A}.$$

Da G durch Fläche ABC_1 oder durch $\triangle\, AC_1Q_1$ dargestellt wird und zwar so, daß $G = \gamma \,.\, l \,.\, \triangle\, AC_1Q_1$ ist, so ist auch

$$W' = \gamma \,.\, l \,.\, \triangle\, AC_1Q_1 \cdot \frac{C_1Q_1}{Q_1A}.$$

Macht man $Q_1P_1 = Q_1C_1$, so ist

$$\triangle\, AC_1Q_1 : \triangle\, P_1C_1Q_1 = AQ_1 : P_1Q_1 = AQ_1 : Q_1C_1,$$

d. h. es ist

$$\triangle\, P_1C_1Q_1 = \triangle\, AC_1Q_1 \cdot \frac{C_1Q_1}{Q_1A}$$

und also

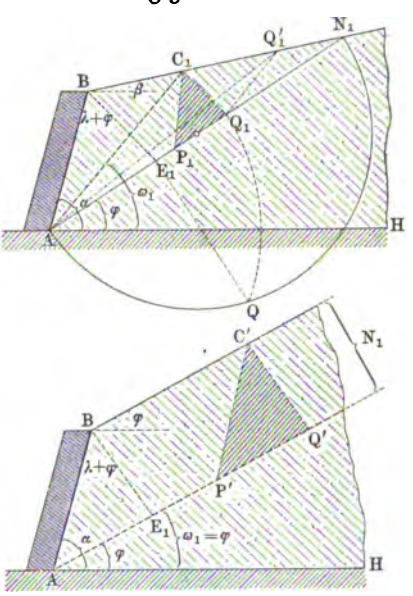
$$W' = \gamma \,.\, l \,.\, \triangle\, P_1C_1Q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 534)$$

d. h. $\triangle\, P_1C_1Q_1$ stellt den Erddruck für AB vom Werte W' dar.

Ist die obere Begrenzung der Schüttmasse eine Ebene, so daß BC_1N_1 eine Gerade ist, so läßt sich Punkt Q_1 leicht genau konstruieren, gemäß Fig. 938 a. Zieht man $BE_1 // C_1Q_1$, d. h. macht man $\measuredangle\, ABE_1 = \lambda + \varphi$, so ist hier nämlich Q_1 gegeben durch die Gleichung

$$\overline{AQ_1}^2 = \overline{AE_1} \,.\, \overline{AN_1}. \qquad \text{a.}$$

Fig. 938.



Um dies nachzuweisen, ziehen wir $Q_1Q_1' // AC_1$, so daß

$$\triangle\, AC_1Q_1' = \triangle\, AC_1Q_1$$

und also auch

$$\triangle\, BAC_1 = \triangle\, C_1AQ_1'$$

ist, woraus $BC_1 = C_1Q_1'$ folgt. Da einerseits

$$C_1Q_1' : C_1N_1 = AQ_1 : AN_1 \qquad \text{b.}$$

und da anderseits

$$BC_1 : C_1N_1 = E_1Q_1 : Q_1N_1$$

ist, so ist auch

$$AQ_1 : AN_1 = E_1Q_1 : Q_1N_1$$

oder, da $E_1Q_1 = AQ_1 - AE_1$ und da $Q_1N_1 = AN_1 - AQ_1$ ist, ferner

$$AQ_1 : AN_1 = (AQ_1 - AE_1) : (AN_1 - AQ_1),$$

woraus

$$\overline{AQ_1} \,.\, \overline{AN_1} - \overline{AQ_1}^2 = \overline{AN_1} \,.\, \overline{AQ_1} - \overline{AN_1} \,.\, \overline{AE_1},$$

d. h. also

$$\overline{AQ_1}^2 = \overline{AN_1} \,.\, \overline{AE_1}$$

folgt.

Man hat demnach $\measuredangle\, N_1AH = \varphi$ und $\measuredangle\, ABE_1 = \lambda + \varphi$ zu machen, wodurch man N_1 und E_1 findet, und nun die mittlere Proportionale AQ für AE_1 und AN_1 zu konstruieren, so daß $AQ_1 = AQ$ gemacht werden kann.

Es ist dann $Q_1C_1 // E_1B$ zu ziehen, und damit ist die Gleitfläche AC_1 gegeben.

Macht man $Q_1P_1 = Q_1C_1$, so stellt $\triangle\ C_1Q_1P_1$ den Erddruck für AB vom Werte W' dar.

Da AN_1 mit der Horizontalen AH gerade noch den Winkel φ bilden darf, so kann N_1 ins Unendliche fallen; es rückt dann auch C_1 auf BN_1 ins Unendliche, so daß AC_1 mit AN_1 zusammenfällt, d. h. bei natürlicher Böschung ist die Gleitfläche unter dem Winkel φ gegen die Horizontale gelegen (vergl. Fig. 938 b a. v. S.).

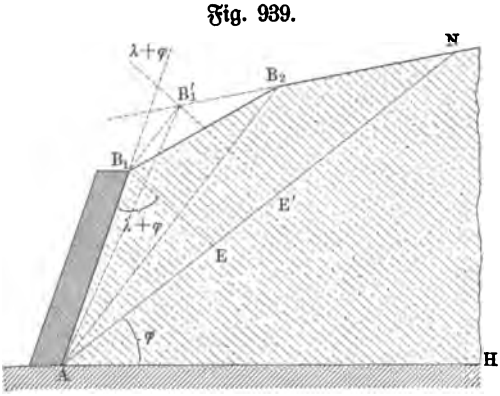
Das Dreieck, welches den Erddruck darstellt, ist auch in diesem Falle leicht zu zeichnen; irgend eine Parallele $C'Q'$ zu BE_1 liefert die Strecke $C'Q'$, so daß dann $Q'P_1 = Q'C'$ gemacht werden kann.

Eine entsprechende Betrachtung führt bei dem ruhenden Erddrucke zum Ziele.

Solange AB senkrecht steht, ist $[W']$ parallel zur oberen Begrenzung der Schüttmasse, und damit ist λ gegeben.

Hat AB eine andere Neigung gegen den Horizont als 90°, so kann man λ schätzungsweise annehmen und mit diesem Werte die Zeichnung durchführen, wobei $[W']$, $[W]$ und $[G]$ sich natürlich im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden werden. Durch Abänderungen des Wertes von λ erreicht man bei wiederholtem Verfahren ziemlich leicht eine Konstruktion, für welche jene drei Kräfte wirklich durch einen Punkt gehen.

Fig. 939.



Will man dieses Probieren vermeiden, so muß man die Betrachtung zuerst für einen Hülfsschnitt $A\overline{B}$ beim Winkel $HA\overline{B} = 90°$ durchführen, und dann nachträglich den Wert von $[W']$ für AB bestimmen (vergl. S. 1271 und S. 1283).

223. Weitere Ausdehnung des v. Rebhannschen Verfahrens. Wenn die Böschung durch die gebrochene Linie B_1B_2N in Fig. 939 bestimmt ist, so läßt sich $\wedge\ AB_2B_1$ in $\triangle\ AB_2B_1'$ verwandeln, so daß B_1', B_2 und N auf einer Geraden liegen ($B_1B_1' // AB_2$).

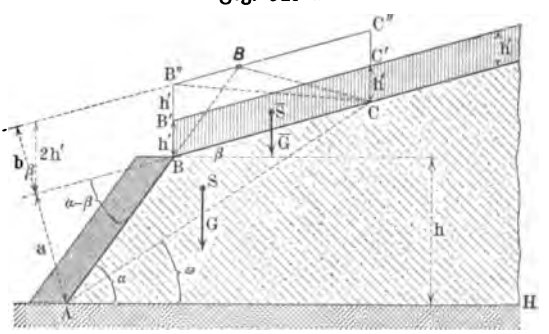
Zieht man nun bei dem thätigen Erddruck zur Geraden BE_1 der früheren Konstruktion, welche hier durch den $\measuredangle\ AB_1E = \varphi + \lambda$ bestimmt ist, die Parallele $B_1'E'$, so läßt sich die Konstruktion v. Rebhanns nun wieder für A, E' und N anwenden.

Entsprechendes gilt für den ruhenden Erddruck.

Auch bei mehrfach gebrochener Böschungslinie und bei Ausdehnung der Erdschüttung auf die Oberfläche der Platte AB_1 u. s. w. ist ein entsprechendes Verfahren anwendbar.

224. Der Einfluß von Oberflächenbelastungen der Schüttmassen. Ist die Oberfläche BC belastet, so denkt man sich diese Belastung durch Erde vom specifischen Gewicht γ ersetzt. Ist δ bei einer gleichmäßig auf die Horizontalebene verteilten Belastung die Belastung für die Flächeneinheit (Quadratmeter), so hat man sich die Erde vom specifischen Gewichte γ in der Höhe h' aufgeschüttet zu denken und zwar so, daß $h'\gamma = \delta$ und also $h' = \frac{\delta}{\gamma}$ ist. Es trägt dann, wie Fig. 940a zeigt, das Prisma ABC vom Gewichte $[G]$ noch eine Belastung $[\overline{G}]$, so daß nun die früheren Untersuchungen für $[G] + [\overline{G}]$ statt für $[G]$ durchzuführen sind.

Fig. 940a.



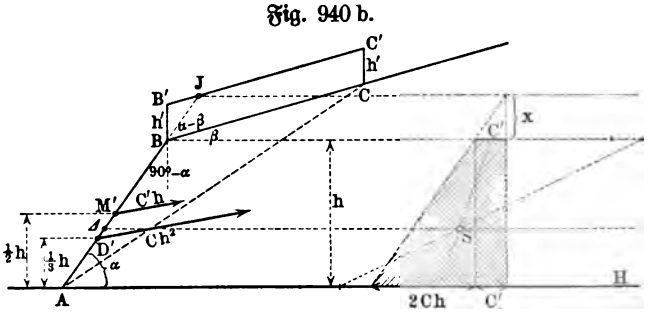
Für $BB' = B'B''$ und $CC' = C'C''$ stellt $BB''C'C$ die doppelte und ebenso $\triangle BB''C$ die einfache Belastung dar, welche auch durch $\triangle BBC$ gegeben wird. Konstruiert man ein für allemal Punkt B, so läßt sich die Gesamtbelastung ABC für jeden Schnitt AC leicht veranschaulichen.

Da $(G + \overline{G}) : G = AB : AB$ ist, so hat man

$$G + \overline{G} = G \cdot \frac{AB}{AB} = G\,\frac{a+b}{a} = G\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Da $\frac{b}{a} = \frac{2h'\cos\beta}{AB \,.\, \sin(\alpha-\beta)} = \frac{2\delta\cos\beta}{AB \,.\, \gamma \,.\, \sin(\alpha-\beta)}$ von ω unabhängig ist, so hat der Ersatz von G durch $G + \overline{G}$ keinen Einfluß auf die Bestimmung von ω_1 oder ω_2, d. h. die Gleitflächen liegen für Fig. 940a ebenso, als wenn die Oberfläche unbelastet wäre.

Fig. 940b.



Dagegen liegt der Angriffspunkt des Erddrucks bei gleichmäßig belasteter Oberfläche an einer anderen Stelle als bei unbelasteter Oberfläche. Ist bei $h = AB \,.\, \sin\alpha$ für letztere $W' = Ch^2$, so ist für erstere W' im Verhältnis $(G + \overline{G}) : G$ zu vergrößern, d. h. man hat bei Belastung

$$W' = Ch^2\left[1 + \frac{2\delta\cos\beta}{AB\gamma\sin(\alpha-\beta)}\right]$$
$$= Ch^2 + C\cdot\frac{2\delta\cos\beta}{\gamma\sin(\alpha-\beta)}\cdot\frac{h^2}{AB}$$

oder, da $h = AB\,.\,\sin\alpha$ ist, auch

$$W' = Ch^2 + C\cdot\frac{2\delta\cos\beta\sin\alpha}{\gamma\sin(\alpha-\beta)}\cdot h = Ch^2 + C'h.$$

Während der Teil Ch^2 von W' sich wieder in dem oberen Grenzpunkte D' des unteren Drittels von AB verdichtet, hat der Teil $C'h$ von W' seinen Angriffspunkt in der Mitte M' von AB, da $C'h$ gleichmäßig mit h wächst. Nach dem Momentensatze folgt der Abstand des Angriffspunktes Δ und AH für $Ch^2 + C'h$ gemäß Fig. 940 b als

$$\frac{Ch^2\cdot\frac{h}{3} + C'h\cdot\frac{h}{2}}{Ch^2 + C'h}.$$

Dieser Abstand ist zugleich der Schwerpunktsabstand eines Trapezes, welches man erhält (vergl. die rechte Seite der Fig. 940 b), wenn man Strecken vom Werte C' und $2\,Ch$ nebeneinander legt.

Verlängert man die nicht parallelen Seiten dieses Trapezes, so schneiden sie sich auf der Horizontalen durch den Schnittpunkt J von AB und $B'C'$, weil $x : C' = h : 2\,Ch$ und also $x = \frac{C'}{2\,C} = \frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\gamma\sin(\alpha-\beta)} = \frac{h'\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ ist, während anderseits $BJ = \frac{h'\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ und $BJ\sin\alpha = \frac{h'\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ ist.

Demnach ist Δ durch die Horizontalen von A, B und J leicht konstruierbar.

225. Schüttmassen als elastische Körper. Bei der Unsicherheit, welche allen bisherigen Betrachtungen anhaftet, ist es zweckmäßig, Schüttmassen als elastische Körper aufzufassen und den Versuch zu machen, die Spannungen in ihrem Innern zu bestimmen und damit auch die Lagen der Gleitflächen zu erhalten.

Wir betrachten dazu eine lockere Masse, welche eine senkrechte Symmetrieebene hat. Legt man durch einen Punkt J der Masse, welche der Symmetrieebene angehört, beliebige Ebenen senkrecht zur Symmetrieebene, so fallen deren Spannungen in die Symmetrieebene. Trägt man diese Druckspannungen in J als Vektoren auf, so bilden deren Endpunkte eine in der Symmetrieebene gelegene Ellipse, welche den Schnitt dieser Ebene mit dem Spannungsellipsoid für J darstellt.

Stellt in Fig. 941 die Ebene der Zeichnung die betrachtete Symmetrieebene mit der Ellipse von den Hauptspannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ für irgend einen Punkt J dar, so gehört zu einer beliebigen Schnittebene MN durch J, die auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, eine Spannung $[p]$, welche ein Vektor der Ellipse von J ist. Bildet $[p]$ mit dem Lote JL der Ebene MN den Winkel λ, so besteht zwischen diesem Winkel λ und dem Stellungswinkel δ

der Ebene MN eine einfache Beziehung, welche gemäß Fig. 584 oder auch gemäß Fig. 941 b entwickelt werden kann. Demgemäß iſt hier in Fig. 941 b ein unendlich-kleines dreiſeitiges Prisma, deſſen Kanten auf der Ebene der Zeichnung ſenkrecht ſtehen, angedeutet, für welches $p_1 = \sigma_1 \sin\delta$ und $p_2 = \sigma_2 \cos\delta$ iſt, ſo daß ſich $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ ergiebt; zerlegt man $[p]$ ſenkrecht und parallel zu MN in $[\sigma']$ und $[\tau']$, ſo iſt wieder

$$\tau' = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\delta \,.\, \cos\delta \quad \text{und} \quad \sigma' = \sigma_1 \sin^2\delta + \sigma_2 \cos^2\delta.$$

Demgemäß iſt alſo

$$tng\,\lambda = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \sin\delta \cos\delta}{\sigma_1 \sin^2\delta + \sigma_2 \cos^2\delta} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\, tng\,\delta}{\sigma_1\, tng^2\delta + \sigma_2}.$$

Fig. 941 a.

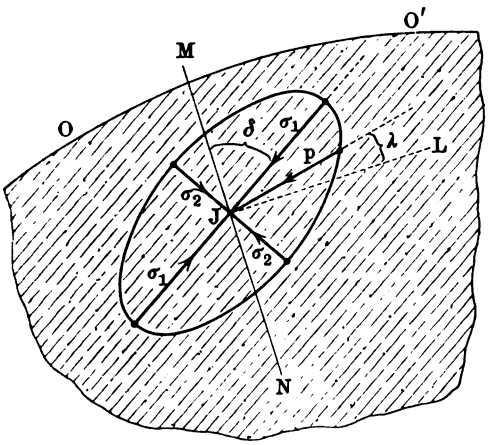
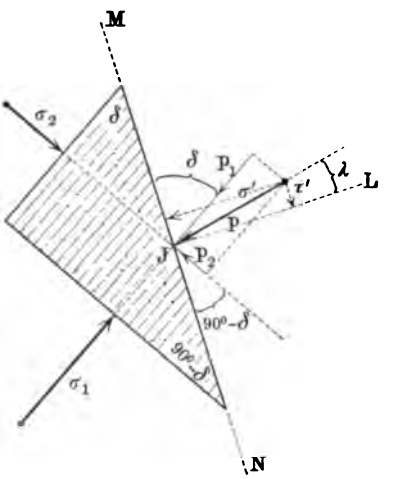


Fig. 941 b.



Da Winkel λ bei Gleichgewicht für eine beliebige Ebene MN höchſtens dem Reibungswinkel φ gleich ſein darf, ſo kann das Maximum von λ thatſächlich höchſtens den Wert φ erreichen. Bildet man die Ableitung von $tng\,\lambda$ nach $x = tng\,\delta$, ſo ergiebt ſich aus deren Annullierung $tng\,\delta = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$ und

$$(tng\,\lambda)_{max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}},$$

d. h. man hat für $\lambda_{max} = \varphi$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} = \pm\, tng\,\varphi.$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} = \frac{(\pm\sin\varphi) \pm 1}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1 \pm 2\sin\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{(1 \pm \sin\varphi)^2}{1 - \sin^2\varphi}.$$

Man hat alſo einerſeits

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{(1 + \sin\varphi)^2}{1 - \sin^2\varphi} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}$$

und anderseits

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{(1 - \sin\varphi)^2}{1 - \sin^2\varphi} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}.$$

Da $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ positiv ist und da $\varphi < 90^0$ ist, so stellen die beiden Werte nur ein bestimmtes Spannungsverhältnis dar, so daß für $\sigma_1 > \sigma_2$ nur gilt

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \text{ für } tng\,\varphi = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 535)$$

Wenn also für eine beliebige Ebene MN die größte Abweichung der Spannung $[p]$ von der Normalen der Ebene gerade den Wert des Reibungswinkels φ erreicht, so ist dabei das Verhältnis der Hauptspannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ für $\sigma_1 > \sigma_2$ durch Nr. 535) gegeben.

Die beiden Ebenen MN, welche in diesem Falle durch

$$(tng\,\lambda)_{max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}$$

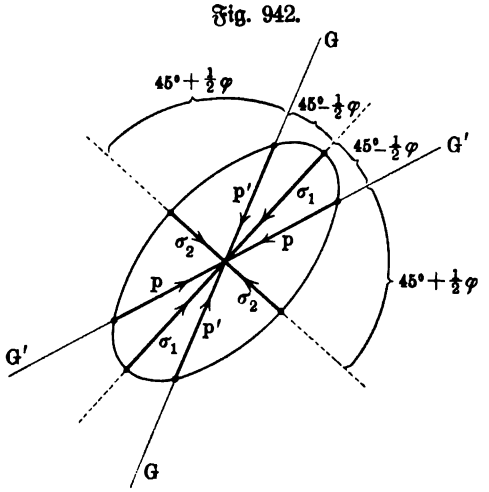
bestimmt werden, werden die Gleitebenen für den Punkt J genannt.

Da ihre Lage durch $tng\,\delta = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$ bestimmt ist, so gilt für $\sigma_1 > \sigma_2$

$$tng\,\delta = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} = \pm\sqrt{\frac{\sin 90^0 - \sin\varphi}{\sin 90^0 + \sin\varphi}} = \pm tng\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

d. h. die beiden Gleitebenen G und G' bilden mit der größeren der beiden Spannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ Winkel von $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ und demnach mit der kleineren der beiden Spannungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ Winkel von $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$, wie es Fig. 942 darstellt.

Fig. 942.



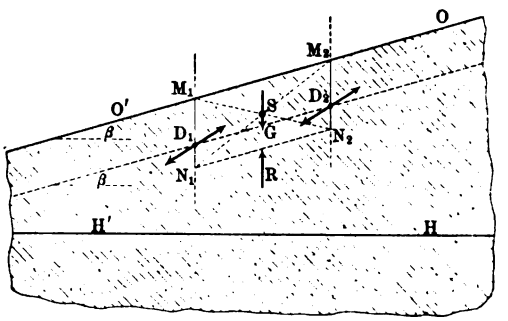
Da $\lambda_{max} = \varphi$ ist und da jede Gleitebene mit der Normalen der anderen den Winkel $\lambda = \varphi$ bildet, so fällt die Spannung $[p]$ der einen Gleitebene in die andere Gleitebene, wobei diese Spannungen wegen der Symmetrie einander gleich sind.

Fassen wir nun ferner die Linie OO' in Fig. 941 als den Schnitt einer Cylinderfläche auf, deren Erzeugende senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, so wird damit in Wirklichkeit eine cylindrische Begrenzung der lockeren Masse bestimmt, deren Erzeugende wagerecht gelagert sind. Falls die Ausdehnung der Masse in Richtung der

Erzeugenden relativ groß ist, so kann man für einen mittleren Bereich der Masse jede lotrechte Ebene, welche auf den Erzeugenden der Cylinderfläche senkrecht steht, in gewisser Annäherung als Symmetrieebene auffassen und demgemäß die Betrachtungen der Fig. 941 und 942 auf sie übertragen.

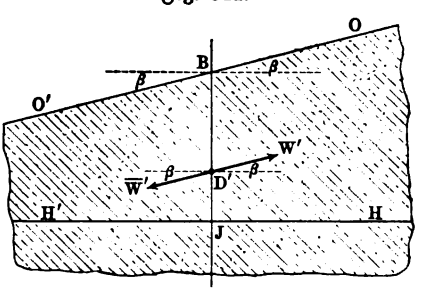
Wenn man der Erfahrung gemäß annimmt, daß die Bruchflächen der gesamten Schüttmasse Ebenen sind, so stellen die Gleitebenen für einen Punkt J zugleich Gleitebenen der gesamten Schüttmasse dar. Kennt man nun die den Spannungen entsprechende Kraftrichtung für irgend eine ebene Fläche JM, welche auf der Symmetrieebene der Schüttmasse senkrecht steht und oben durch deren Oberfläche und unten durch eine Horizontalebene durch J begrenzt ist, so lassen sich die Gleitebenen für J und damit auch die Ebenen der Hauptspannungen bestimmen. Man kann diese Bestimmung z. B. durch das oben entwickelte Verfahren v. Rebhanns erreichen.

Fig. 943.



226. Anwendung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Wenn die Leitlinie OO' des begrenzenden Cylinders eine Gerade ist, wie es bei Anwendungen in der Praxis meist der Fall ist, so lassen sich leicht zwei Spannungsrichtungen angeben. Betrachtet man nämlich, wie Fig. 943 andeutet, zwei senkrechte Schnitte M_1N_1 und M_2N_2, so müssen die den Spannungen entsprechenden Drucke sich für beide Schnitte in entsprechenden Punkten D_1 und D_2 verdichten und in diesen gleiche Richtungen zeigen. Denkt man sich nun das durch $M_1N_1N_2M_2$ bezeichnete Prisma herausgeschnitten, so erfordert dessen Gleichgewicht, daß sich die Kräfte in D_1 und D_2 zerstören, weil die Reaktion $[R]$ für das Gewicht $[G]$ des Prismas Gegenkraft ist; demnach fallen also die Kräfte in D_1 und D_2 in die Gerade D_1D_2 und weichen nicht, wie für Fig. 943 ursprünglich angenommen, von dieser ab.

Fig. 944.



Da die Größe von $M_1N_1M_2N_2$ auf die Betrachtung ohne Einfluß ist, so folgt, daß die Spannungen für lotrechte Ebenen, welche zu den Erzeugenden der Oberfläche parallel sind, zu OO' parallel sind, während die Spannungen für Parallelebenen zur Oberfläche senkrecht liegen.

Die Kenntnis dieser Thatsachen, welche mit den früheren Betrachtungen auf S. 1262 übereinstimmen, genügt, um das Verfahren v. Rebhanns an-

zuwenden. Legt man durch J eine ſenkrechte Ebene MN, wie es Fig. 944 (a. v. S.) andeutet, und ebenſo die Horizontale $H'JH$, ſo entſpricht JB der rechten oder der linken Begrenzungsfläche der früher betrachteten Platte AB. Für die rechte Seite der Fig. 944 iſt $\lambda = +\beta$, für die linke iſt $\lambda = -\beta$ zu ſetzen, und demgemäß entſtehen mit dem Winkel $JBE_1 = \varphi + \beta$ und

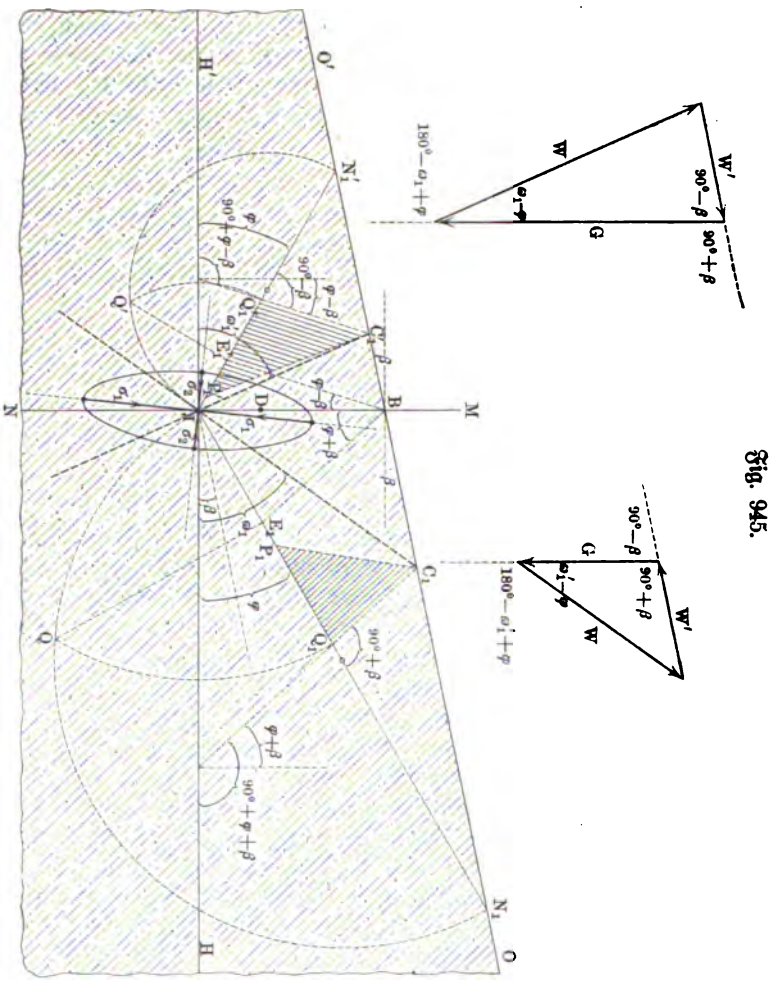


Fig. 945.

mit dem Winkel $JBE_1' = \varphi - \beta$ die Spuren der beiden Gleitebenen JC_1 und JC_1' der Fig. 945 und die entſprechenden Darſtellungen des Erddruckes rechts und links von JB.

Für $\sigma_1 > \sigma_2$ halbiert $[\sigma_1]$ den (ſpitzen) Winkel C_1JC_1', ſo daß durch $\sigma_1 : \sigma_2 = (1 + \sin\varphi) : (1 - \sin\varphi)$ für $\varphi = 30^0$ die eingezeichnete Spannungsellipſe ($\sigma_1 : \sigma_2 = 3 : 1$) des Punktes J entſteht.

Bei wagerechter Oberfläche ($\beta = 0$) ſteht $[\sigma_1]$ ſenkrecht, während JC_1

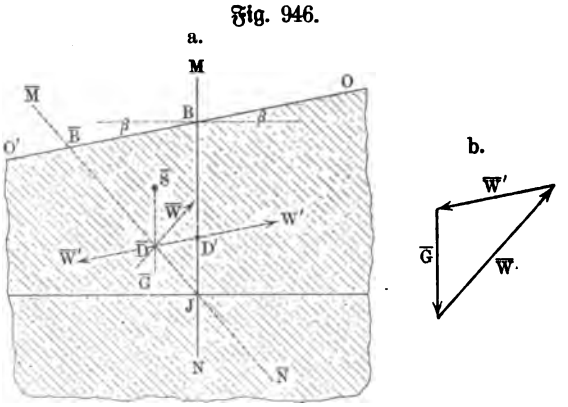
und JC_1' symmetrisch dazu gelegen sind; $[\sigma_2]$ ist wagerecht. Dreht man die Spur der wagerechten Oberfläche um B gegen den Sinn des Uhrzeigers, so daß das Bild der Fig. 945 entsteht, so dreht sich $[\sigma_1]$ mit dem Uhrzeiger aus der senkrechten Lage in die Lage der Fig. 945.

Hätte man die Untersuchung für J und für irgend eine Parallelebene zu OO' innerhalb der Schüttmasse, anstatt für deren Oberfläche OO' durchgeführt, so hätte man dieselben Ebenen JC_1 und JC_1' erhalten, da die Oberflächenbelastung der gewählten Parallelebene auf die Lage der Gleitebene ohne Einfluß ist und da die Konstruktion der Fig. 945 zwar von φ und β, aber nicht von der Länge JB abhängt.

Darin liegt eine Rechtfertigung der Annahme, daß die Gleitflächen hier thatsächlich Ebenen sind.

Da $\triangle C_1Q_1P_1$ in Fig. 945 den Erddruck $\overline{W'}$ für JB darstellt, dessen Richtung parallel zu OO' ist und dessen Angriffspunkt sich für $JD' = \frac{1}{3}JB$ in D' verdichtet, so läßt sich auch der Druck $[\overline{W}]$ für eine beliebige Ebene $\overline{MN}$, wie Fig. 946 zeigt, leicht bestimmen. Da $[\overline{W}]$ mit $[\overline{W'}]$ und $[\overline{G}]$ ein geschlossenes Kraftdreieck bildet, so giebt Fig. 946 b die Größe und Richtung von $[\overline{W}]$ an, während der entsprechende Angriffspunkt wieder durch $J\overline{D} = \frac{1}{3}J\overline{B}$ bestimmt ist.

Fig. 946.



Faßt man bei einer horizontalen unteren Begrenzung $H'JH$ die Strecke JB oder $J\overline{B}$ als Grenze der früher betrachteten Platte AB auf, so läßt sich demnach für jede Stellung von AB der thätige Erddruck für AB bestimmen. Vergl. S. 1271.

Ob man die ebene Begrenzung einer Platte AB, welche für die Schüttmasse als Stützkörper dient, als einen gedachten Schnitt $J\overline{B}$ innerhalb der Erde auffassen darf, ist im allgemeinen fraglich. Für den Fall, daß der Reibungskoeffizient zwischen Platte und Erde mit dem natürlichen Böschungswinkel φ nahezu übereinstimmt, dürfte diese Annahme unbedenklich sein, während ihre Unsicherheit für andere Fälle jedenfalls nicht größer ist, als bei irgend einer anderen der üblichen Annahmen. Die Übereinstimmung mit den früheren Betrachtungen (vergl. S. 1262) spricht jedenfalls dafür.

In Fig. 947 (a. f. S.) ist die Konstruktion der Fig. 945 für den ruhenden Erddruck abgeändert.

Für die rechte Seite entspricht der Bildung von $\omega_2 + \varphi$ der Punkt N_2 der linken Seite und die Gerade BE_2, welche links von BJ liegt, mit der Neigung $\varphi - \beta$ gegen BJ; die Gleitebene ist JC_2.

Für die linke Seite entspricht der Bildung von $\omega_2' + \varphi$ der Punkt N_2' der rechten Seite und die Gerade BE_2', welche rechts von BJ liegt, mit der Neigung $\varphi + \beta$ gegen BJ; die Gleitebene ist JC_2'.

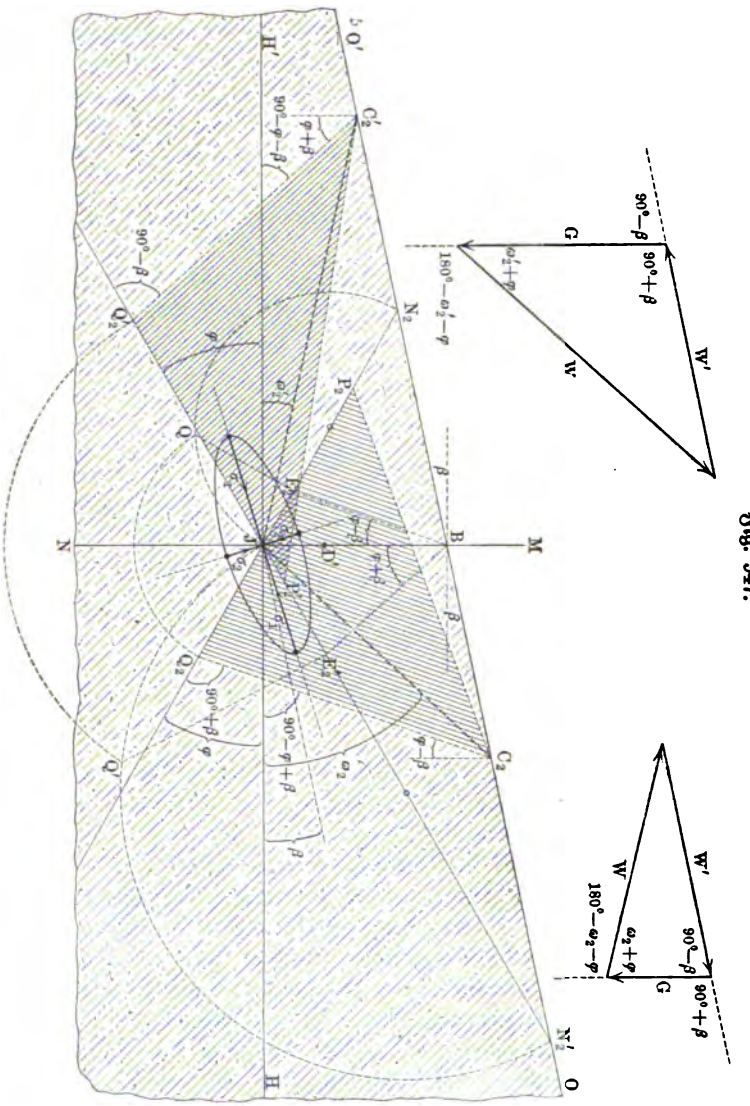


Fig. 947.

Für $\sigma_1 > \sigma_2$ halbiert $[\sigma_1]$ wieder den spitzen Winkel der Geraden JC_2 und JC_2', so daß durch $\sigma_1 : \sigma_2 = (1 + \sin\varphi) : (1 - \sin\varphi)$ für $\varphi = 30^0$ die eingezeichnete Spannungsellipse ($\sigma_1 : \sigma_2 = 3 : 1$) des Punktes J entsteht.

Bei wagerechter Oberfläche ($\beta = 0$) steht $[\sigma_2]$ senkrecht, während JC_2 und JC_2' symmetrisch dazu gelegen sind; $[\sigma_1]$ ist wagerecht. Dreht man die Spur

der wagerechten Oberfläche um B gegen den Sinn des Uhrzeigers, so daß das Bild der Fig. 947 entsteht, so dreht sich $[\sigma_1]$ auch gegen den Sinn des Uhrzeigers.

Für $\beta = 0$ in Fig. 945 ist $\measuredangle E_1BJ = \varphi$ und demnach $BE_1 \perp JN_1$, also auch $C_1Q_1 \perp JN_1$ und ferner $JE_1 = JB.\sin\varphi$ und $JN_1 = JB \cdot \frac{1}{\sin\varphi'}$, also $JQ_1 = JB$. Demnach ist hier $\triangle JBC_1 \cong JQ_1C_1$, d. h. JC_1 halbiert $\measuredangle BJQ_1$ und es ist $\omega_1 = \varphi + \frac{1}{2}(90^0 - \varphi) = 45^0 + \frac{1}{2}\varphi$.

Ebenso ist $\omega_2 = 45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ für $\beta = 0$ in Fig. 947.

Man erhält also hier dieselben Ergebnisse wie auf S. 1265, d. h. für $\beta = 0$ darf JB jedenfalls durch die Begrenzungsfläche einer Platte AB ersetzt werden, an welcher keine Reibung zu berücksichtigen ist.

Für $\beta = \varphi$ führen Fig. 945 und Fig. 947 zu demselben Ergebnis. Da $\varphi - \beta = 0$ ist, so fällt E_1' in Fig. 945 und E_2 in Fig. 947 mit J zusammen, so daß auch der entsprechende Punkt Q in J fällt und demnach JB die eine Gleitebene wird, während die andere mit der Horizontalen den Winkel $\beta = \varphi$ bildet. Vergl. S. 1269.

227. Schlußbemerkungen. Für eine senkrechte Stellung der Platte AB bezw. eine senkrechte Stellung des Schnittes MN durch J sind bei beliebiger Neigung der ebenen Oberfläche der Schüttmasse die Untersuchungen von S. 1262 und von S. 1281 in guter Übereinstimmung; die Richtung des Druckes für AB bezw. JB ist stets parallel zur Oberfläche der Schüttmasse.

Bei einer schiefen Stellung der Platte AB ist λ für die Abweichung der Druckrichtung an der Platte bestimmt durch die Untersuchungen auf S. 1263, und auch hiermit ist die Betrachtung auf S. 1281 für eine schiefe Stellung des Schnittes $M'N'$ durch J in guter Übereinstimmung.

Daraus würde zu folgern sein, daß die Entwickelung der Reibung zwischen Platte und Schüttmasse, welche von Fall zu Fall auftritt, von dem Reibungskoeffizienten zwischen Platte und Schüttmasse verhältnismäßig unabhängig ist.

Anderseits muß zugegeben werden, daß die grundlegenden Annahmen der gegebenen Theorie des Erddruckes, nämlich die Voraussetzung einer vollen Entwickelung der Reibung an einer ebenen Bruchfläche durch die Kante bei A innerhalb der Schüttmasse und die Voraussetzung, durch welche die Lage des Angriffspunktes des Erddruckes bestimmt ist (Unabhängigkeit von λ und ω von der Größe von AB), durch die Erfahrung nicht mit Sicherheit begründet werden können.

Außerdem ist noch darauf hinzuweisen, daß die gegebene Theorie des Erddrucks auch insofern nur als eine gute Annäherung anzusehen ist, als die Voraussetzungen auf S. 1258 bezw. in § 225 naturgemäß in der Praxis überhaupt nur angenähert erfüllt sein können.

Für einen Böschungswinkel $\varphi = 0$ stellen die Formeln des Erddruckes die Formeln eines entsprechenden Wasserdruckes dar (vergl. S. 1270).

Über Stäbe, welche auf Schüttmassen gelagert sind (z. B. Eisenbahnquerschwellen) vergl. Föppl, Mechanik, Bd. III, S. 254 u. f.

Elfte Abteilung.

Die elastischen Grundgleichungen und die Arbeit der Formänderung[1]).

228. **Die allgemeine Bedeutung der elastischen Grundgleichungen.** Die theoretischen Annahmen, welche von Fall zu Fall gemacht wurden, um die einzelnen Untersuchungen durchführen zu können, bedürfen zu ihrer Rechtfertigung stets der Prüfung durch die Erfahrung, d. h. man hat die aus ihnen gezogenen Folgerungen mit den Ergebnissen wirklich angestellter Versuche zu vergleichen und danach die Frage ihrer Zulässigkeit zu entscheiden. Gelegentlich wurde hervorgehoben, daß solche Annahmen noch eine andere Prüfung zulassen (vergl. S. 837), nämlich, indem man ihre Übereinstimmung mit den elastischen Grundgleichungen untersucht, deren letzte Rechtfertigung selbstverständlich auch nur durch die Erfahrung gegeben werden kann.

Der Unterschied der Prüfung theoretischer Annahmen im ersten und im zweiten Falle besteht nur darin, daß die elastischen Grundgleichungen sehr allgemeine Bedingungen für die möglichen Formänderungen elastischer Körper angeben, während es sich im ersten Falle stets um die Untersuchung besonderer Formänderungen handelt.

Die elastischen Grundgleichungen sind eine bestimmte Darstellung der in § 117 eingeführten Annahme, daß bei den Formänderungen der Körper eine unendlich-kleine Kugel stets in ein Ellipsoid übergeht, in Verbindung mit einer weiteren sehr allgemeinen Annahme über den Aufbau (Struktur) aller materiellen Körper.

Außerdem werden bei der Ableitung der Grundgleichungen die erfahrungsmäßig feststehenden Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen bezw. Schiebungen verwendet, so daß diese Grundgleichungen für elastisch-feste Körper, welche dem Gesetz von Hooke folgen, eine andere Gestalt haben, als wie für elastisch-feste Körper, welche diesem Gesetze nicht folgen, oder wie für Flüssigkeiten bezw. Gase. Sollten sich in besonderen Fällen

[1]) Da diese Abteilung den Zweck hat, alle bisher gegebenen Untersuchungen mit der sogenannten mathematischen Theorie der Elasticität und Festigkeit in Beziehung zu setzen, so sind in den folgenden Paragraphen gelegentlich einige mathematische Hülfsmittel benutzt, welche über die sonst hier verwandten etwas hinausgehen.

theoretische Ansätze, deren Rechtfertigung durch Versuche erbracht ist, in Widerspruch mit den elastischen Grundgleichungen befinden, so würden die beiden Annahmen, auf welchen diese Gleichungen beruhen, einer erneuten Prüfung zu unterziehen sein, falls in Bezug auf die Gültigkeit der verwendeten Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen bezw. Schiebungen (z. B. Gesetz von Hooke) kein Zweifel bestehen kann.

Man gewinnt die elastischen Grundgleichungen, indem man unter jenen beiden Annahmen die Bedingungen des Gleichgewichts für einen unendlich-kleinen Teil eines beliebigen materiellen Körpers aufstellt, und dann die besonderen Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen bezw. Schiebungen einführt, welche der Gruppe von materiellen Körpern entsprechen, um die es sich handelt, hier also der Gruppe elastisch-fester Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen.

229. Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht eines materiellen Körpers. Die Bedingungen des Gleichgewichts für einen unendlich-kleinen Teil eines beliebigen materiellen Körpers lassen sich einerseits durch den Satz über das Auftreten der Paare von Schubspannungen (vergl. S. 280) ausdrücken, anderseits durch bestimmte Beziehungen zwischen den Spannungen im Inneren und den von außen wirkenden Kräften.

Während jener Satz für ein unendlich-kleines Rechtkant (vergl. Fig. 577) als Volumenelement das Gleichgewicht in Bezug auf Drehungen ausspricht, gelten diese Beziehungen für das Gleichgewicht eines solchen Rechtkantes in Bezug auf Verschiebungen, falls bereits das Gleichgewicht in Bezug auf Drehungen als gesichert gelten kann.

Um diese Beziehungen abzuleiten, betrachten wir gemäß Fig. 948 ein Rechtkant $O\bar{O}$, für welches die Spannungen der Oberfläche nach den Achsen eines, seinen Kanten entsprechenden Kreuzes zerlegt sind.

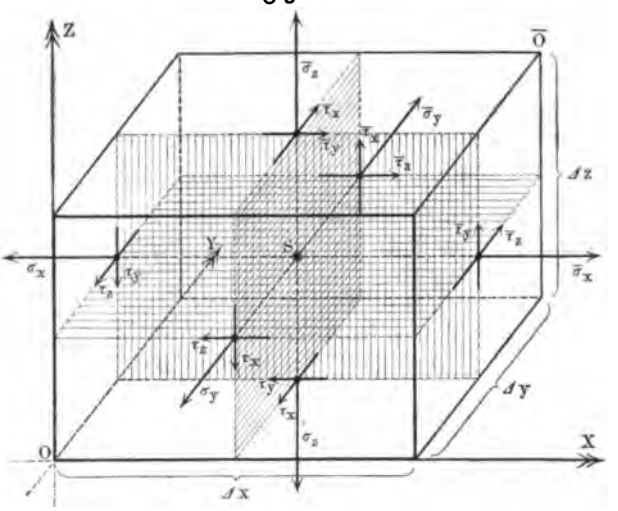
Für die drei Ebenen durch O sind die Werte der Normalspannungen bezw. durch σ_x, σ_y, σ_z und die Schubspannungspaare bezw. durch τ_x, τ_y, τ_z bezeichnet, für die drei Ebenen durch $\bar{O}$ gelten die entsprechenden überstrichenen Buchstaben; dabei beziehen sich, wie immer, die Zeiger der Normalspannungen auf ihre Richtungen, während sich die Zeiger der Schubspannungen auf die Normalen der Ebenen beziehen, in welchen die zusammengehörigen Paare liegen.

Für die Verschiebung in Richtung der X-Achse kommen einerseits die Normalspannungen $[\bar{\sigma}_x]$ und $[\sigma_x]$ in Frage und außerdem alle Schubspannungen, welche in Richtung der X-Achse wirken, also auf der oberen Fläche $[\bar{\tau}_y]$ und auf der unteren Fläche $[\tau_y]$, auf der Vorderfläche $[\tau_z]$ und auf der Hinterfläche $[\bar{\tau}_z]$, während die linke und rechte Seitenfläche hierzu keinen Beitrag liefern.

Bezeichnet man die Kanten des Rechtkants, den Achsenrichtungen entsprechend, bezw. durch Δx, Δy, Δz, so gehören die Normalspannungen $[\bar{\sigma}_x]$ und $[\sigma_x]$ zu Flächen von der Größe $\Delta y \,.\, \Delta z$, die Schubspannungen $[\bar{\tau}_y]$ und $[\tau_y]$ zu Flächen von der Größe $\Delta x \,.\, \Delta y$, und die Schubspannungen $[\bar{\tau}_z]$ und $[\tau_z]$ zu Flächen von der Größe $\Delta z \,.\, \Delta x$.

Die Resultante der Kräfte, welche auf die Masse des Rechtkants (in S) wirkt, ist dessen Masse μ proportional, welche sich als $v \,.\, \delta$ darstellt, wenn man das Volumen $\Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z$ des Rechtkants durch v und die Dichtigkeit durch δ bezeichnet. Für homogene Körper ist δ konstant und daher empfiehlt es sich, die Komponenten der Resultante der äußeren Kräfte nach den Achsen durch $X \,.\, v$, $Y \,.\, v$, $Z \,.\, v$ darzustellen.

Fig. 948.



Um Verschiebungen innerhalb der Achse zu verhindern, hat man demnach anzusetzen

$$(\sigma_x - \sigma_x)\,\Delta y \,.\, \Delta z + (\bar{\tau}_y - \tau_y)\,\Delta x \,.\, \Delta y + (\bar{\tau}_z - \tau_z)\,\Delta z \,.\, \Delta x + X \,.\, v = 0,$$

woraus sich bei Division mit $v = \Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z$ die erste der folgenden Gleichungen ergiebt, welcher 2) und 3) für die Y-Achse und Z-Achse zur Seite treten

$$\left.\begin{aligned}
1)\quad & \frac{\sigma_x - \sigma_x}{\Delta x} + \frac{\tau_y - \tau_y}{\Delta z} + \frac{\tau_z - \tau_z}{\Delta y} + X = 0 \\
2)\quad & \frac{\bar{\tau}_x - \tau_x}{\Delta z} + \frac{\bar{\sigma}_y - \sigma_y}{\Delta y} + \frac{\tau_z - \tau_z}{\Delta x} + Y = 0 \\
3)\quad & \frac{\tau_x - \tau_x}{\Delta y} + \frac{\bar{\tau}_y - \tau_y}{\Delta x} + \frac{\sigma_z - \sigma_z}{\Delta z} + Z = 0
\end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad 536)$$

Man hat also das Ergebnis, daß X, Y, Z die Summen der Verhältnisse der Änderungen der entsprechenden Spannungen für den Übergang von O nach $\bar{O}$ zu den entsprechenden Abständen der Flächen durch O und $\bar{O}$ aufheben müssen, falls das Rechtkant im Gleichgewichte sein soll.

Die Gleichungen Nr. 536) stellen das Gleichgewicht in Bezug auf Drehung und Verschiebung fest, da der Ansatz der Schubspannungen in Fig. 948 bereits den Bedingungen des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehungen entspricht.

Die Gleichungen Nr. 536) stellen die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht eines materiellen Körpers dar, falls man sie auf alle Volumenelemente desselben anwendet.

Sind die Spannungen als Funktionen der Koordinaten x, y, z von O darstellbar, so bedeuten die von den Spannungen abhängigen Glieder in den Gleichungen Nr. 536) die partiellen Ableitungen der Spannungen nach diesen Koordinaten x, y, z, so daß man diese Gleichungen unter Benutzung der geläufigen Bezeichnung für partielle Ableitungen auch schreiben kann

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + X = 0 \\ 2)\quad & \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y = 0 \\ 3)\quad & \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad 537)$$

230. Bedingungen für die Formänderung in der Umgebung eines materiellen Punktes innerhalb eines isotropen Körpers, der dem Gesetze von Hooke folgt. Wenn eine unendlich-kleine Kugel, deren Mittelpunkt ein bestimmter materieller Punkt ist, in ein Ellipsoid übergeht, so läßt sich diese Formänderung darstellen, wie in § 117 angegeben. Wir bezeichneten den materiellen Punkt vor der Formänderung durch J und nach vollendeter Formänderung durch J' und legten durch J und J' zwei parallele Koordinatenkreuze, in Bezug auf welche die Koordinaten irgend eines Punktes in der Umgebung von J bezw. J' vor und nach der Formänderung bezw. durch ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' bestimmt werden können; der besondere Ansatz

$$\begin{aligned} \xi' &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \eta' &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \zeta' &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned}$$

stellt dann die besondere Formänderung dar, für welche eine Kugel vom Mittelpunkte J in ein Ellipsoid vom Mittelpunkte J' übergeht. Da ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' durch Gleichungen ersten Grades miteinander verbunden sind, so bleibt eine Ebene in der Umgebung von J bei der Formänderung eine Ebene in der Umgebung von J', und Entsprechendes gilt auch für Gerade als Schnitte von Ebenen, wobei durch Umgebung von J bezw. J' ein unendlich-kleines, die Punkte J bezw. J' umschließendes Gebiet des Raumes bezeichnet werden soll.

Diese Betrachtung gilt für alle Punkte des materiellen Körpers, doch ändern sich im allgemeinen die Größen a_{11}, a_{12}, ... in ihm von Punkt zu Punkt und infolgedessen werden die Formänderungen endlicher Strecken u. s. w. im materiellen Körper natürlich durch die besondere Art der Änderung von a_{11}, a_{12}, ... mitbestimmt.

Wir bestimmen nun die Spannungen, welche der betrachteten Formänderung entsprechen, unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Gesetzes von Hooke. Dazu stellen wir zunächst die Dehnungen und Schie-

bungen der betrachteten Formänderung dar, deren Werte natürlich unabhängig davon sind, ob das Gesetz von Hooke gilt oder nicht.

Um die Dehnungen in Richtung der Achsen zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt in der Umgebung von J, welcher auf der $J\xi$-Achse liegt und demnach vor der Formänderung die Koordinaten $(\xi; 0; 0)$ hat, während er bei dieser gemäß den Gleichungen des § 117 die Koordinaten $(a_{11}\xi; a_{21}\xi; a_{31}\xi)$ erhält. Da ξ in $a_{11}\xi$ übergeht, so ist die Dehnung ε_x in Richtung der ξ-Achse gegeben als $\varepsilon_x = \frac{a_{11}\xi - \xi}{\xi}$, d. h. man hat

$$\varepsilon_x = a_{11} - 1$$
$$\varepsilon_y = a_{22} - 1$$
$$\varepsilon_z = a_{33} - 1,$$

da für die beiden anderen Achsen entsprechende Schlüsse gelten.

Um die Schiebungen der ursprünglichen Achsenebenen zu bestimmen, beachten wir, daß der betrachtete Punkt $(\xi; 0; 0)$ in der Richtung der η-Achse die Verschiebungsstrecke $\eta' = a_{21}\xi$ zeigt, so daß seine Schiebung gegen die $\xi\zeta$-Ebene a_{21} ist, während ein anderer Punkt $(0; \eta; 0)$ in der Richtung der ξ-Achse die Verschiebungsstrecke $\xi' = a_{12}\eta$ zeigt, so daß seine Schiebung gegen die $\eta\zeta$-Ebene a_{12} ist. Demnach ändert sich der rechte Winkel zwischen der $\xi\zeta$-Ebene und der $\eta\zeta$-Ebene um $a_{21} + a_{12}$, und es gilt also

$$\vartheta_z = a_{21} + a_{12}$$
$$\vartheta_y = a_{13} + a_{31}$$
$$\vartheta_x = a_{32} + a_{23},$$

da für die anderen Paare von Achsenebenen entsprechende Schlüsse gelten.

Für isotrope Körper, welche dem Gesetz von Hooke folgen, gilt nun für die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, welche den festgestellten Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z entsprechen,

$$E \cdot \varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$
$$E \cdot \varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}$$
$$E \cdot \varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m},$$

woraus mit der Abkürzung $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon$ und unter Berücksichtigung von $\frac{mE}{m+1} = 2G$ folgt

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon}{m-2}\right)$$
$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon}{m-2}\right)$$
$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon}{m-2}\right),$$

Dabei bedeutet ε die Dehnung eines Volumenelementes (vergl. S. 877).

Ebenso gilt bei dieser Voraussetzung für die Spannungen τ_x, τ_y, τ_z, welche den festgestellten Schiebungen entsprechen,

$$G \cdot \vartheta_x = \tau_x$$
$$G \cdot \vartheta_y = \tau_y$$
$$G \cdot \vartheta_z = \tau_z.$$

Führt man die oben bestimmten Werte für die Dehnungen und Schiebungen ein, so gilt also

$$\sigma_x = 2G\left(a_{11} - 1 + \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3}{m - 2}\right)$$
$$\sigma_y = 2G\left(a_{22} - 1 + \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3}{m - 2}\right)$$
$$\sigma_z = 2G\left(a_{33} - 1 + \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3}{m - 2}\right)$$

und

$$\tau_x = G(a_{12} + a_{23})$$
$$\tau_y = G(a_{13} + a_{31})$$
$$\tau_z = G(a_{21} + a_{12}).$$

Betrachtet man nun ein unendlich-kleines Rechtkant, welches Fig. 948 so entspricht, daß bei Übereinstimmung der Achsenrichtungen für x, y, z und ξ, η, ζ Punkt O mit Punkt J' zusammenfällt, so geben die Gleichungen Nr. 536) drei bestimmte Bedingungen für die Änderungen der Größen a_{11}, a_{12}, ... an.

Bezeichnet man diese Größen für den Punkt, welcher $\bar{O}$ in Fig. 948 entspricht, durch $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, ..., so lautet die erste dieser Bedingungen, welche das Gleichgewicht des Körpers fordert,

$$2\left(\frac{\bar{a}_{11} - a_{11}}{\Delta x} + \frac{(a_{11} + \bar{a}_{22} + a_{33}) - (a_{11} + a_{22} + a_{33})}{(m-2)\Delta x}\right)$$
$$+ \frac{\bar{a}_{21} - a_{21} + \bar{a}_{12} - a_{12}}{\Delta y} + \frac{\bar{a}_{13} - a_{13} + \bar{a}_{31} - a_{31}}{\Delta z} + \frac{X}{G} = 0.$$

Macht man nun die Annahme, daß die Größen a_{11}, a_{12}, ... in der Umgebung von J als Funktionen der Koordinaten x, y, z von J betrachtet werden dürfen, so geht diese Gleichung bei Benutzung der Bezeichnung für partielle Ableitungen für $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a$ über in

$$2\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{1}{m-2}\right) + \frac{\partial(a_{21} + a_{12})}{\partial y} + \frac{\partial(a_{13} + a_{31})}{\partial z} + \frac{X}{G} = 0,$$

während die beiden anderen Gleichungen der Nr. 536) zwei entsprechende Gleichungen liefern.

231. Die elastischen Grundgleichungen für isotrope Körper, welche dem Gesetz von Hooke folgen. Man pflegt nun in Bezug auf den Aufbau der materiellen Körper die sehr allgemeine Annahme (vergl.

S. 1286) zu machen, daß bei jeder Formänderung die Verſchiebung eines materiellen Punktes von der Stelle J nach der Stelle J' die folgende mathematiſche Darſtellung zuläßt: Wenn J in Bezug auf ein Koordinatenſyſtem die Koordinaten x; y; z hat, während J' in Bezug auf dasſelbe Koordinatenſyſtem die Koordinaten $x + \alpha$; $y + \beta$; $z + \gamma$ hat, ſo ſind α, β, γ Funktionen von x, y, z, welche eine Entwickelung nach dem Taylorſchen Satze zulaſſen, und zwar ſind dieſe Funktionen für alle Punkte des Körpers dieſelben.

Betrachtet man nun einen Punkt der Kugel vom Mittelpunkte J, welche bei der Formänderung in ein Ellipſoid vom Mittelpunkte J' übergeht, ſo ſind deſſen Koordinaten vor der Formänderung $x + \xi$; $y + \eta$; $z + \zeta$ und nach der Formänderung $x + \alpha + \xi'$; $y + \beta + \eta'$; $z + \gamma + \zeta'$, d. h. die Änderungen der Koordinaten betragen $\alpha + \xi' - \xi$; $\beta + \eta' - \eta$; $\gamma + \zeta' - \zeta$.

Setzt man der gemachten Annahme gemäß $\alpha = f_x(x, y, z)$, ſo iſt demnach

$$\alpha + \xi' - \xi = f_x(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$$

und man erhält bei Entwickelung nach dem Satze von Taylor

$$\alpha + \xi' - \xi = f_x(x, y, z) + \xi \cdot \frac{\partial f_x}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial f_x}{\partial y} + \zeta \cdot \frac{\partial f_x}{\partial z} + \cdots$$

oder, da $\alpha = f_x(x, y, z)$ iſt, auch

$$\xi' = \xi\left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \eta \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \zeta \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \cdots$$

und ebenſo

$$\eta' = \xi \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \eta\left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + \zeta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} + \cdots$$

und

$$\zeta' = \xi \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \zeta\left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) + \cdots$$

Bleibt man bei einer erſten Annäherung ſtehen, ſo folgt aus dieſen Gleichungen die von uns urſprünglich gemachte Annahme, daß ξ', η', ζ' mit ξ, η, ζ durch Gleichungen erſten Grades verbunden ſind, mit dem weiteren Zuſatze, daß die neun Größen

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} & a_{12} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} & a_{13} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} \\ a_{21} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} & a_{22} = 1 + \dfrac{\partial \beta}{\partial y} & a_{23} = \dfrac{\partial \beta}{\partial z} \\ a_{31} = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} & a_{32} = \dfrac{\partial \gamma}{\partial y} & a_{33} = 1 + \dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \end{array}$$

durch die drei Funktionen α, β, γ der Koordinaten $(x; y; z)$ des Punktes J in beſtimmter Weiſe dargeſtellt werden können.

Unter dieſer Annahme hat man einerſeits

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial\beta}{\partial y}\\ \varepsilon_z &= \frac{\partial\gamma}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned}\vartheta_x &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\\ \vartheta_y &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\\ \vartheta_z &= \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

und auch

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z},$$

während anderseits die Gleichung am Schlusse des vorigen Paragraphen die Gestalt

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{2}{m-2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0$$

annimmt. Diese Gleichung, welche der ersten Gleichgewichtsbedingung der Nr. 536) entspricht, bildet mit den beiden Gleichungen, welche den beiden anderen Gleichgewichtsbedingungen der Nr. 536) entsprechen, das System der drei elastischen Grundgleichungen für isotrope elastisch-feste Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen. Diese Gleichungen lauten also

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0\\ &2)\ \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0\\ &3)\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 538)$$

für

$$\varepsilon = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}.$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, **daß man bei Anerkennung aller ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen**, für die Verschiebungen α, β, γ eines materiellen Punktes $(x; y; z)$ eines Körpers der betrachteten Art bei beliebigen Formänderungen nur solche Funktionen von x, y, z ansetzen darf, welche ihnen genügen.

Für isotrope elastisch-feste Körper, welche dem Gesetze von Hooke nicht folgen, und für heterotrope Körper sind die entsprechenden Gleichungen im allgemeinen viel verwickelter, für Flüssigkeiten und Gase sind sie, namentlich wenn man von der gegenseitigen Reibung der materiellen Punkte absieht, bedeutend einfacher.

232. Die Rechtfertigung der bisher benutzten theoretischen Annahmen durch die elastischen Grundgleichungen. Aus dem Bau der elastischen

Grundgleichungen folgt, daß ein System von Verschiebungen α, β, γ, welches ihnen genügt, deren einzige Lösung ist, falls außerdem die Spannungen, welche durch α, β, γ bedingt sind, an der Oberfläche des Körpers mit den dort durch die angreifenden Kräfte hervorgerufenen Spannungen übereinstimmen [1]). Infolgedessen sind theoretische Annahmen, welche in dem angegebenen Sinne den elastischen Grundgleichungen genügen, nicht bloß als zulässig zu bezeichnen, sie stellen vielmehr den thatsächlichen Zustand des Körpers dar. Ein Nachweis in dieser Richtung ist namentlich von Wert in Bezug auf die Ansätze für die Spannungsverteilung in den Querschnitten verdrehter Stäbe, welche nicht frei von einer gewissen Willkür waren. Da dieser Nachweis etwas weiter gehende Betrachtungen fordert, so verweisen wir auf die betreffende Darstellung in Föppls Mechanik (Bd. III, S. 439 u. f.), bemerken aber, daß diese Ansätze auch schon dadurch gerechtfertigt erscheinen, daß sich die aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung befinden [2]).

Dazu mag nochmals hervorgehoben werden, daß die Voraussetzungen (vergl. S. 1286), durch welche die elastischen Grundgleichungen bedingt werden, auch nicht frei von einer gewissen Willkür sind.

233. Die Arbeit der den Spannungen entsprechenden Kräfte bei Formänderungen. Da die entwickelten elastischen Grundgleichungen nur eine Umformung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines materiellen Körpers darstellen, unter Voraussetzung der Gültigkeit bestimmter Annahmen in Bezug auf den Aufbau des betrachteten Körpers, so lassen sie sich auch unter derselben Voraussetzung durch das Princip der virtuellen Verrückungen (vergl. S. 482) ableiten.

Da ferner die Arbeit der äußeren Kräfte bei den isotropen elastisch-festen Körpern, welche dem Gesetze von Hooke folgen, in den bisher betrachteten Fällen in einer sehr einfachen Beziehung zur entsprechenden Arbeit der Formänderung steht, so ist zu vermuten, daß die elastischen Grundgleichungen auch zu der Arbeit der Formänderung in einer bestimmten Beziehung stehen.

Um diese Vermutung zu prüfen, betrachten wir überhaupt die Arbeit, welche innerhalb eines Körpers der Bewegung und Formänderung eines Volumenelementes entspricht, wie es Fig. 948 darstellt.

Bewegt sich das Volumenelement ohne Veränderung seiner Form bei unveränderlichen Werten der eingezeichneten Spannungen, so leisten die auf die Masse wirkenden Kräfte eine bestimmte Arbeit $\mathfrak{A}_m$, während zugleich die Spannungen eine gewisse, lediglich der in Verschiebungen und Drehungen bestehenden Bewegung entsprechende Arbeit $\mathfrak{A}_b$ leisten. Nach dem Princip der virtuellen Verrückungen gilt für das Gleichgewicht der Kräfte an dem Volumenelemente

$$\mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_b = 0.$$

[1]) Vergl. z. B. Rausenberger, Mechanik II, S. 140.

[2]) Zur Sache vergl. auch die betreffenden Abschnitte in Grashofs Festigkeitslehre oder in G. Kirchhoffs Mechanik.

Diese Gleichung sagt genau dasselbe aus, wie die Gleichungen Nr. 536).

Wir betrachten nun ferner eine Formänderung des Rechtkants bei unveränderlichen Werten der eingezeichneten Spannungen und bezeichnen die Arbeit der den Spannungen dabei entsprechenden Kräfte durch $\mathfrak{A}_f$.

Bezeichnet man die Arbeit der den unveränderlichen Spannungen entsprechenden Kräfte für eine Bewegung und eine Formänderung des Rechtkants durch $\mathfrak{A}_s$, so ist $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_b + \mathfrak{A}_f$ und man hat demnach

$$\mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_f.$$

Wendet man diese Gleichung auf alle Elemente eines Körpers an, so ist

$$\Sigma\mathfrak{A}_m + \Sigma\mathfrak{A}_s = \Sigma\mathfrak{A}_f.$$

Wenn die Formänderung des Körpers so vor sich geht, daß die begrenzenden Flächen der einzelnen Volumenelemente, welche sich im spannungslosen Zustande berührten, auch während der Formänderung stets in Deckung bleiben, so zerstören sich in $\Sigma\mathfrak{A}_s$ die Arbeiten je zweier Gegenkräfte, welche zu einer und derselben innerhalb des Körpers gelegenen Grenzfläche eines Volumenelementes gehören, so daß $\Sigma\mathfrak{A}_s$ die Arbeit der Kräfte darstellt, welche den auf der Oberfläche des ganzen Körpers vorhandenen Spannungen, d. h. den Spannungen der äußeren Kräfte entsprechen.

Wenn man die gegenseitige Einwirkung der Massenteilchen auch wieder vernachlässigen darf, so stellt $\Sigma\mathfrak{A}_m$ die Arbeit der äußeren auf die Masse wirkenden Kräfte dar.

Bezeichnet man die Arbeit der äußeren Kräfte wiederum (vergl. S. 1076) durch A, so gilt also unter den beiden angegebenen Bedingungen

$$A = \Sigma\mathfrak{A}_f \quad \ldots\ldots\ldots \quad 539\,a)$$

d. h. man hat den Satz:

Bei jeder unendlich-kleinen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers stimmt die Arbeit der äußeren Kräfte im allgemeinen überein mit der auf Formänderung verwandten Arbeit der Spannungen, falls diesen die unveränderlichen Werte beigelegt werden, welche dem Zustande des Gleichgewichtes entsprechen.

Sind im besondern die beiden angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, so bleibt der Satz bestehen, falls man die sich bildenden Trennungsflächen im Inneren des Körpers als Teile der Oberfläche auffaßt und falls man die gegenseitige Einwirkung der Massenteilchen den äußeren Kräften zuschreibt.

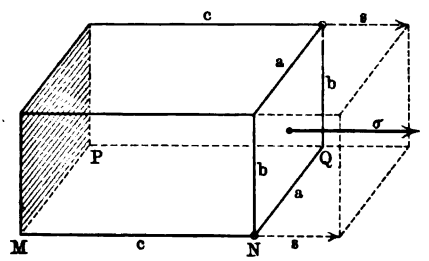
In dieser Form läßt sich der Satz auch auf Körpersysteme übertragen, wobei namentlich die Reibungen ein für allemal als äußere Kräfte zu betrachten sind.

Ob solche Formänderungen von Körpern, auf welche sich der abgeleitete Satz bezieht, thatsächlich eintreten können oder nicht, und wie sie etwa im ersteren Falle zu verwirklichen sind, kommt nicht in Frage, da sich der Satz im Grunde nur auf virtuelle Verrückungen des im Gleichgewichte befindlichen Systems der Kräfte für jedes Volumenelement bezieht.

Wenn auch das System der inneren Kräfte des Körpers von dem System der äußeren Kräfte und der Beschaffenheit des Körpers abhängt, so stehen

doch die virtuellen Verrückungen, welchen das gesamte Kräftesystem unterworfen wird, nachdem es einmal bestimmt ist, in gar keiner Beziehung zu dem thatsächlichen Zustande des angegriffenen Körpers. Bei gegebenen äußeren Kräften ist das System der inneren Kräfte ein anderes, wenn der Körper ein Gas oder eine Flüssigkeit oder ein elastisch-fester Körper von dieser oder jener Eigenschaft ist, aber die für das gesamte Kräftesystem abgeleitete Gleichung ist, nachdem das Kräftesystem einmal bestimmt ist, ganz unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers und den möglichen Änderungen seiner Form.

Fig. 949.



Um den Bau von $\Sigma \mathfrak{A}_f$ kennen zu lernen, stellen wir die Arbeit fest, welche die den unveränderlichen Normalspannungen und Tangentialspannungen der Oberfläche eines Rechtkants entsprechenden Kräfte leisten, wenn dieses Dehnungen seiner Kanten und Schiebungen seiner Flächen erleidet. Wenn eine unveränderliche Normalspannung $[\sigma]$ zu einer Fläche ab gehört, wie es Fig. 949 zeigt, so wird bei einer Verschiebung $[s]$ der Fläche ab in Richtung von $[\sigma]$ die Arbeit

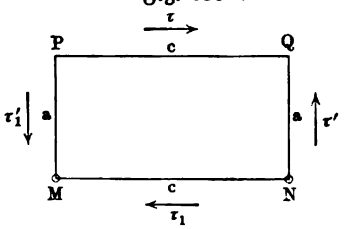
$$(ab \,.\, \sigma) \,.\, s$$

geleistet. Sieht man ab als Teil der Oberfläche eines Rechtkants vom Volumen $v = abc$ an, so ist diese Arbeit darstellbar als

$$\sigma \,.\, v \cdot \frac{s}{c} = \sigma \,.\, v \,.\, \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon = \frac{s}{c}$ als Dehnung von c aufgefaßt werden kann, falls man die schraffierte Fläche der Fig. 949 als unbeweglich voraussetzt.

Fig. 950 a.



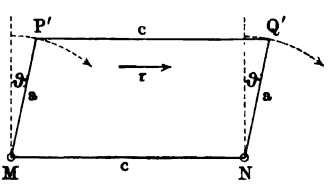


Fig. 950 b.

Befinden sich auf den Seitenflächen des Rechtkants der Fig. 949 unveränderliche Schubspannungen, welche sich in der Projektion auf die Grundfläche so darstellen, wie es Fig. 950 a zeigt, so entspricht einer Formänderung, wie sie die Fig. 950 a und b bestimmen, eine gewisse Arbeit. Denkt man sich MN festgehalten, so leisten die $[\tau']$ und $[\tau'_1]$ entsprechenden Kräfte keine Arbeit, weil die Verschiebungen senkrecht zu ihren Richtungen vor sich gehen (vergl. Fig. 950 b), so daß nur die $[\tau]$ entsprechende Arbeit anzusetzen ist, welche

$$(bc \,.\, \tau)\, a \,.\, arc\, \vartheta$$

ist, und für $abc = v$ die Form

$$\tau \,.\, v \,.\, \vartheta$$

annimmt.

Erleiden nun die Kanten des unendlich-kleinen Rechtkants in Fig. 948 bezw. die Dehnungen $\overset{*}{\varepsilon}_x$, $\overset{*}{\varepsilon}_y$, $\overset{*}{\varepsilon}_z$ und seine Ebenen die Schiebungen $\overset{*}{\vartheta}_x$, $\overset{*}{\vartheta}_y$, $\overset{*}{\vartheta}_z$, so ist bei unveränderlichen Werten der eingezeichneten Spannungen die gesamte Arbeit, welche die entsprechenden Kräfte bei dieser Formänderung leisten, gegeben als

$$\mathfrak{A}_f = (\overset{*}{\sigma}_x \overset{*}{\varepsilon}_x + \overset{*}{\sigma}_y \overset{*}{\varepsilon}_y + \overset{*}{\sigma}_z \overset{*}{\varepsilon}_z + \overset{*}{\tau}_x \overset{*}{\vartheta}_x + \overset{*}{\tau}_y \overset{*}{\vartheta}_y + \overset{*}{\tau}_z \overset{*}{\vartheta}_z) \,.\, v \quad 539\,\text{b})$$

da hierbei der Unterschied von σ_x und $\bar{\sigma}_x$ u. s. w. verschwindet.

Für den ganzen Körper ist dann $A = \Sigma \mathfrak{A}_f$ durch Summation über die einzelnen Volumenelemente zu bilden.

Wenn die Spannungen während der Ausbildung der betrachteten Dehnungen und Schiebungen nicht unveränderlich sind, so hängt die Arbeit der Kräfte natürlich von der Art dieser Veränderlichkeit ab.

Bei isotropen Körpern, welche dem Gesetze von Hooke folgen, sind thatsächlich die Normalspannungen den Dehnungen und die Schubspannungen den Schiebungen proportional. Betrachtet man bei einem solchen Körper die Dehnungen und Schiebungen, welche sich bilden, während der Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte aus dem ursprünglich spannungslosen Zustande in einen neuen Gleichgewichtszustand übergeht, so wachsen die Spannungen proportional den Dehnungen und Schiebungen von Null an bis zu gewissen Endwerten. Bezeichnet man diese Endwerte bezw. mit σ_x und ε_x, σ_y und ε_y u. s. w., so ist die Arbeit der entsprechenden Kräfte bei dieser Formänderung gegeben als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \vartheta_x + \tau_y \vartheta_y + \tau_z \vartheta_z) \,.\, v \quad . \quad 540)$$

und es ist zugleich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_x &= \frac{1}{G} \cdot \tau_x \\ \vartheta_y &= \frac{1}{G} \cdot \tau_y \\ \vartheta_z &= \frac{1}{G} \cdot \tau_z. \end{aligned}\right.$$

Ersetzt man in $\mathfrak{A}$ die Spannungen durch die Dehnungen oder die Dehnungen durch die Spannungen, so erhält man wieder die Ausdrücke auf S. 888 f.

Für den ganzen Körper ist dann $\mathfrak{A}$ durch Summation über die einzelnen Volumenelemente zu bilden.

234. Der Satz von Clapeyron. Unter anderem kann man Gleichung Nr. 539) auch auf Verrückungen anwenden, welche thatsächlich auftreten. Wenn ein Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte aus dem spannungslosen Zustande in einen neuen Zustand des Gleichgewichtes übergeht, welcher dem ersten Zustande gegenüber die Dehnungen und Schiebungen

ε_x, ε_y, ε_z und ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z und die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z und τ_x, τ_y, τ_z zeigt, so kann man Gleichung Nr. 539) auf das System der Kräfte anwenden, welches dem Zustande der entwickelten Formänderung entspricht, und zwar unter anderem auch für die Verrückungen, welche den thatsächlich aufgetretenen Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z und Schiebungen ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z entsprechen; man kann sich vorstellen, daß die einzelnen Punkte des Körpers die Wege, welche sie von dem spannungslosen Zustande aus zu dem Zustande der entwickelten Formänderung hin durchlaufen, jetzt rückwärts zurücklegen, aber ohne daß sich dabei die Spannungen $[\sigma_x]$, $[\sigma_y]$, $[\sigma_z]$ und $[\tau_x]$, $[\tau_y]$, $[\tau_z]$ verändern. Man hat dann

$$A = \Sigma(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_x\vartheta_x + \tau_y\vartheta_y + \tau_z\vartheta_z) \cdot v.$$

Für elastisch-feste Körper, welche dem Gesetze von Hooke folgen, hat gemäß Nr. 540) die rechte Seite der eben gewonnenen Gleichung den Wert $2\mathfrak{A}$ und es gilt also für diese Körper

$$A = 2\mathfrak{A} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 541)$$

Die Gleichung Nr. 541) wird als Satz von Clapeyron bezeichnet, weil sie in besonderen Fällen zuerst von diesem Ingenieur aufgestellt und benutzt worden ist.

Dabei bedeutet A die Arbeit der äußeren Kräfte, welche dem Übergange aus dem Zustande der vollendeten Formänderung in den spannungslosen Anfangszustand entspricht bezw. auch die Arbeit der äußeren Kräfte für den umgekehrten Vorgang, während $\mathfrak{A}$ die Arbeit bezeichnet, welche dabei für die Formänderung thatsächlich beansprucht wird.

Der Satz von Clapeyron spricht also allgemein aus, was wir in besonderen Fällen bereits gefunden und benutzt haben, nämlich: Bei elastisch-festen Körpern, welche dem Gesetz von Hooke folgen, wird die Arbeit A der äußeren Kräfte, welche eine Formänderung des Körpers bewirken, zur Hälfte für diese Formänderung verwandt, während ihre andere Hälfte in Bewegungen der Körperteilchen und zwar in Schwingungen zu Tage tritt.

Der Satz von Clapeyron ist ein Sonderfall ($\nu = 2$) der Beziehung

$$A = \Sigma\mathfrak{A}_f = \nu \cdot \mathfrak{A},$$

von welcher wir in § 165 ausgingen, um die Sätze von Castigliano und Maxwell abzuleiten, welche hier zugleich ihre allgemeine Begründung erhalten sollen.

235. **Der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.** Die einzelnen materiellen Punkte eines elastisch-festen Körpers, welcher sich unter der Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewicht befindet, sind dabei im allgemeinen in sicherem Gleichgewicht (vergl. S. 470); eine Ausnahme machen z. B. auf Knickung beanspruchte Stäbe bei Knickbelastung. Wird innerhalb eines materiellen Körpers, dessen einzelne Punkte sich in sicherem Gleichgewicht befinden, eine relativ-geringe Bewegung eingeleitet, z. B. durch einen Schlag auf seine Oberfläche, so pendeln seine materiellen Punkte um ihre Ruhelagen, um diese schließlich wieder einzunehmen.

Ist $\frac{1}{2}\mu v_0^2$ die Energie, welche einem bestimmten materiellen Punkte infolge der Einleitung der Bewegung erteilt worden ist, und hat er nach Ablauf einer geringen Zeitdauer die Energie $\frac{1}{2}\mu v^2$ erhalten, so ist der Zuwachs an Energie $\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{1}{2}\mu v_0^2$. Da dieser Zuwachs gleich der Arbeit der bei dem Übergange $v_0 \ldots v$ auf Bewegung wirkenden Kräfte ist, so ist bei der Bezeichnung auf S. 1295

$$\tfrac{1}{2}\mu v^2 - \tfrac{1}{2}\mu v_0^2 = \mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_a - \mathfrak{A}_f,$$

wobei aber die eingeführten Arbeitswerte jetzt der thatsächlichen Bewegung entsprechen.

Für den ganzen Körper gilt demnach

$$\Sigma\tfrac{1}{2}\mu v^2 - \Sigma\tfrac{1}{2}\mu v_0^2 = \Sigma\mathfrak{A}_m + \Sigma\mathfrak{A}_a - \Sigma\mathfrak{A}_f.$$

Falls wiederum die Massenkräfte der gegenseitigen Einwirkung der materiellen Punkte vernächlässigt werden können und falls wiederum innerhalb des Körpers keine Flächenverschiebungen stattfinden, ist $\Sigma\mathfrak{A}_m + \Sigma\mathfrak{A}_a$ durch die thatsächliche Arbeit A der äußeren Kräfte für den Übergang $v_0 \ldots v$ ersetzbar.

Bezeichnet man die Energie $\Sigma\frac{1}{2}\mu v^2$ wieder durch E, so ist also

$$E - E_0 = A - \Sigma\mathfrak{A}_f,$$

und zwar ist $E - E_0$ für sicheres Gleichgewicht stets negativ (vergl. die Anmerkung auf S. 470).

War in dem Körper beim Übergange von dem spannungslosen Zustande in den Zustand des Gleichgewichts die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_0$ aufgespeichert, so beträgt diese jetzt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \Sigma\mathfrak{A}_f = \mathfrak{A}_0 + A - (E - E_0).$$

Für den Sonderfall, daß $A = 0$ ist, hat man also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 - (E - E_0),$$

d. h. $\mathfrak{A}$ hat zugenommen um den positiven Betrag $E_0 - E$, weil $E - E_0$ einen negativen Wert hat.

Da in dem Sonderfalle $A = 0$ die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ bei beliebigen geringen Störungen des Gleichgewichtes zunimmt, so ist sie in diesem Sonderfalle für das Gleichgewicht selbst ein Minimum.

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Gültigkeit des Gesetzes von Hooke, und damit stimmt überein, daß auch der auf S. 1078 entwickelte Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit für jeden Wert von ν gilt, während der ursprüngliche Satz von Castigliano, als dessen Folgerung dieser Minimalsatz erscheint, von ν abhängig ist.

Nach den vorstehenden Betrachtungen darf man den Minimalsatz auf jeden Körper und natürlich auch auf jeden abgegrenzten Teil eines Körpers anwenden, wenn die Arbeit der äußeren, auf die entsprechende Oberfläche wirkenden Kräfte verschwindet, d. h. unter den angegebenen Bedingungen ist die Gleichgewichtslage dadurch bestimmt, daß für sie ein Minimum der Formänderungsarbeit vorhanden ist.

Betrachtet man also irgend eine unendlich-kleine (virtuelle) Änderung (Variation) von

$$\nu \,.\, \mathfrak{A} = \Sigma(\sigma_x \,.\, \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \cdots) v,$$

so ist deren Annullierung unter den angegebenen Bedingungen eine notwendige Bedingung für die Bestimmung eines Minimums von $\mathfrak{A}$ und damit einer Gleichgewichtslage.

Diese Bedingungen fordern unter anderem auch, daß die der Variation der Spannungen oder der Dehnungen entsprechende Arbeit für die Oberfläche des betrachteten Körpers verschwindet, weil A aus $\Sigma \mathfrak{A}_m + \Sigma \mathfrak{A}_s$ entstanden ist und weil sich in $\Sigma \mathfrak{A}_s$ nur die Arbeiten der Spannungen innerhalb des Körpers gegenseitig zerstören.

Schließt man für die Oberfläche des betrachteten Körpers jede Variation der Spannungen oder Dehnungen aus, so hat die entsprechende Arbeit natürlich den Wert Null, sie kann aber auch in besonderen Fällen für Variationen der Spannungen oder Dehnungen an der Oberfläche verschwinden. Sieht man von solchen besonderen Fällen ab, so hat man demnach der Variation der Spannungen oder Dehnungen die Bedingung aufzuerlegen, daß für die Oberfläche des betrachteten Körpers keine Änderung seines Zustandes eintritt.

Führt man die Variation von

$$\nu \,.\, \mathfrak{A} = \Sigma(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \cdots) v$$

wirklich aus, indem man die Spannungen variiert und die Dehnungen und Schiebungen gemäß $\varepsilon_x = \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$ u. s. w. einführt, so gelangt man durch Annullierung der Variation für $A = 0$ zurück zu den Gleichungen Nr. 537), welche für jeden beliebigen Körper in Geltung sind und auf dem oben angegebenen Wege zu den besonderen elastischen Grundgleichungen führen, welche abgeleitet wurden.

Führt man, unter Voraussetzung eines isotropen Körpers, der dem Gesetz von Hooke folgt, die Variation von

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\Sigma(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \cdots) v$$

wirklich aus, indem man die Dehnungen und Schiebungen variiert und dabei die besonderen Beziehungen zu den Spannungen bei isotropen Körpern u. s. w. benutzt, so gelangt man durch Annullierung der Variation für $A = 0$ unmittelbar zu den elastischen Grundgleichungen [1]).

236. Die elastischen Grundgleichungen und die ihnen entsprechenden einfachen Wellenbewegungen. Die elastischen Grundgleichungen führen auch leicht zu einer Darstellung aller thatsächlich möglichen Bewegungen innerhalb eines Körpers. Hat das durch Fig. 948 dargestellte Volumenelement die Beschleunigung $[j]$, welche nach den Achsen die Komponenten $[j_x]$, $[j_y]$, $[j_z]$ liefert, so haben die Effektivkräfte der Bewegung in Richtung der Achsen bezw.

[1]) Vergl. die betreffenden Abschnitte in G. Kirchhoffs Mechanik und bei Föppl, Bd. III, S. 410.

die Werte $(v.\delta)j_x$, $(v.\delta)j_y$, $(v.\delta)j_z$, falls man die Dichtigkeit des Volumenelementes v durch δ bezeichnet.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen Nr. 536) oder Nr. 537) gilt demnach nach dem Princip von d'Alembert

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + X = \delta \,.\, j_x \text{ u. s. w.},$$

woraus sich, entsprechend den Gleichungen Nr. 538)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{X}{G} = \frac{\delta}{G} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \text{ u. s. w.}$$

ergiebt, falls man j_x durch $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$, j_y durch $\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$ und j_z durch $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}$ ersetzt.

Bei Schwingungen, die sich innerhalb eines sonst kraftfreien Körpers in Wellenform ausbreiten, können die Massenkräfte X, Y, Z vernachlässigt werden. Geht nun von einem Punkte O in einer bestimmten Richtung eine einfache Welle aus mit longitudinalen Schwingungen, wie sie dem Schalle entspricht, so kann man ein Kreuz einführen, dessen Achse OX in die Richtung der sich fortpflanzenden Welle fällt.

In diesem Falle ist für einen beliebigen Punkt auf der Achse OX, dessen Koordinaten $(x;\ 0;\ 0)$ sind (vergl. S. 180),

$$\begin{aligned} \alpha &= r \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

und demnach kommt von den drei Gleichungen für α, β, γ nur die erste für $\varepsilon = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ in der Form

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\delta}{G} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

in Frage, welche sich auch als

$$\frac{2m-2}{m-2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\delta}{G} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

schreiben läßt. Man hat bei Einführung des Wertes von α

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2 r}{\lambda^2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ und } \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und demnach ist

$$\frac{2m-2}{m-2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\delta}{G} \frac{1}{T^2}$$

die Bedingung, welche in diesem Falle gemäß den elastischen Grundgleichungen erfüllt sein muß. Bezeichnet man die Schallgeschwindigkeit durch c, so ist $c = \frac{\lambda}{T}$, d. h. man hat

$$c = \sqrt{\frac{2m-2}{m-2} \cdot \frac{G}{\delta}}$$

oder, falls man $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ setzt, auch

$$c = \sqrt{\frac{m(m-1)}{(m-2)(m+1)} \cdot \frac{E}{\delta}} \quad \ldots \ldots \quad 542)$$

Die Formel gilt für Schallwellen in allseitig unbegrenztem Materiale.

Denkt man sich innerhalb des Materials einen dünnen cylindrischen Stab, dessen Achse OX ist, abgegrenzt, so unterscheidet sich dessen Zustand von einem entsprechenden freien Stabe dadurch, daß sich bei letzterem die Querdehnungen ungehindert ausbilden können, während diese Ausbildung bei ersterem durch das umschließende Material verhindert wird.

Da der Einfluß der gehinderten Querdehnung in Formel Nr. 542) berücksichtigt ist, so erhält man aus dieser in großer Annäherung die entsprechende Formel für einen freien Stab, indem man die Querdehnung annulliert, d. h. für $\lim m = \infty$.

Für den freien Stab, dessen Achse die Fortpflanzungsrichtung für longitudinale Wellen ist, gilt also

$$c = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{m}}{\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \cdot \frac{E}{\delta}}$$

für $\lim m = \infty$, d. h.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 543)$$

Bei Schmiedeeisen ist für $E = 2\,000\,000$ und $\delta = \frac{7{,}7\,g}{g} = \frac{0{,}0077\,\mathrm{kg}}{g}$

bei $g = 981 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$

$$c = 504\,800 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}} = 5048 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}},$$

d. h. $15{,}3\,C$, falls man die mittlere Geschwindigkeit des Schalles in der freien Luft durch $C = 330 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ darstellt.

Die Versuche von Werthheim, Kundt u. A. geben für verschiedene Sorten von Eisen und Stahl $15{,}12\,C$, $15{,}34\,C$ u. s. w., so daß die Formel Nr. 543) in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Erfahrung ist.

Man kann Formel Nr. 543) natürlich auch benutzen, um E aus c und δ zu bestimmen.

Leider läßt sich die Formel Nr. 542) nicht experimentell verwerten, sie wäre sonst äußerst geeignet, um m zu bestimmen.

Für eine einfache transversale Welle kann man die Richtung der Ausbreitung als Achse OX ansetzen und die Ebene der Schwingungen als XY-Ebene; es ist dann

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= r \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Man hat hier nur die zweite der Gleichungen (für β) auszuführen.

Da hier $\varepsilon = 0$ ist, so treten diese Wellen ohne Volumenänderung auf, und man hat

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \frac{\delta}{G} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2},$$

woraus sofort für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c folgt

$$c = \sqrt{\frac{G}{\delta}} = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \cdot \frac{E}{\delta}.$$

Diese Formel gilt wieder innerhalb unbegrenzter Massen.

Der Übergang zu einem freien Stabe ist hier nicht durchführbar. Thatsächlich findet man für eine schwingende Saite, in Übereinstimmung mit den Versuchen der Gebrüder Weber u. A.

$$c = \sqrt{\frac{P}{f} \cdot \frac{1}{\delta}},$$

falls f den Querschnitt der Saite und P den Zug in ihrer Achsenrichtung bezeichnet. Man sieht daraus, daß eine transversal schwingende Saite einem entsprechenden Stabe innerhalb eines Körpers gleichen würde, wenn man ihr die Spannung $\frac{P}{f} = G$ erteilen könnte.

Föppl[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Fortpflanzung longitudinaler Wellen in bestimmten Materialien mit den Werten, welche aus den entsprechenden, auf Grundlage des Hookeschen Gesetzes abgeleiteten Formeln folgen, dafür spricht, daß dieses jedenfalls innerhalb gewisser Grenzen für jene Materialien gilt.

[1]) Vergl. Mechanik, Bd. III, S. 422.

Zwölfte Abteilung.

Der Einfluß von Temperaturschwankungen.

237. **Die Formänderungen bei Temperaturschwankungen und die entsprechenden Spannungen.** Neben den Formänderungen, welche bisher betrachtet wurden, müssen auch gelegentlich noch die Formänderungen berücksichtigt werden, welche der Änderung der Temperatur der festen Körper entsprechen; im allgemeinen ist mit einer Erwärmung eine Vergrößerung und mit einer Abkühlung eine Verkleinerung der Abmessungen eines festen Körpers verbunden.

Bezeichnet l_0 die Länge einer Strecke an einem festen Körper, z. B. der Achse eines Stabes, bei 0^0 C., so ist erfahrungsmäßig die Länge l_t der Strecke bei t^0 C. für die gewöhnlichen Temperaturschwankungen in großer Annäherung darstellbar als

$$l_t = l_0(1 + \nu t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 544)$$

wobei ν eine Materialkonstante bezeichnet, welche „Linearer Ausdehnungskoeffizient für Wärme" heißt.

Bei strengerer Betrachtung ist obige Formel nur gültig, wenn ν durch $\nu_t = \nu + at + bt^2 + \cdots$ ersetzt wird, doch sind die Koeffizienten $a, b, \ldots$ so klein, daß man meist ν statt ν_t festhalten darf.

Bezeichnen l_1 und l_2 bezw. die Länge einer Strecke bei den Temperaturen t_1 und t_2, so gilt

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_0(1 + \nu t_1)}{l_0(1 + \nu t_2)} = \frac{1 + \nu t_1}{1 + \nu t_2}.$$

Für Schmiedeeisen ist z. B. im Mittel

$$\nu = 0{,}000\,011\,76 \sim \frac{1}{85\,000}$$

und auch für die übrigen Materialien, welche in Frage kommen, hat ν entsprechende kleine Werte.

Erweitert man also das aufgestellte Verhältnis $l_1 : l_2$ durch $1 - \nu t_2$, so ist bei Vernachlässigung der Glieder mit ν^2

$$\frac{l_1}{l_2} = 1 + \nu(t_1 - t_2),$$

d. h. man hat

$$l_1 = l_2[1 + \nu(t_1 - t_2)]$$

und entsprechend auch

$$l_2 = l_1[1 - \nu(t_1 - t_2)] = l_1[1 + \nu(t_2 - t_1)].$$

Bezeichnet man $t_1 - t_2$ durch t, so gilt demnach die Gleichung Nr. 544) auch in der Form[1])

$$l_t = l(1 + \nu t), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 545)$$

falls l die Länge einer Strecke bei irgend einer Temperatur und l_t die Länge dieser Strecke nach Erwärmung (+) oder Abkühlung (−) um t^0 C. bezeichnet.

Berechnet man die Dehnung, welche der Temperaturänderung um t^0 C. entspricht, so erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{l_t - l}{l} = \nu t \ldots\ldots\ldots \quad 546)$$

und demnach ist die Spannung, welche dieser Dehnung entspricht

$$\sigma_t = E\nu t \ldots\ldots\ldots \quad 547)$$

d. h. Dehnung und Spannung sind der Temperaturänderung t proportional.

Für $t = 1^0$ C. ist $\varepsilon_t = \nu$, d. h. der lineare Ausdehnungskoeffizient ν bezeichnet die Dehnung für 1^0 C.

Würde die Dehnung ε_t bezw. die Spannung σ_t in einem Stabe vom Querschnitte f längs dessen Achse durch einen Zug oder Druck $[P]$ hervorgerufen, so hätte man

$$P = f \,.\, \sigma_t = f \,.\, E\nu t \ldots\ldots\ldots \quad 548)$$

Für Schmiedeeisen ist im Mittel in Atm.

$$E\nu = 24.$$

Feste Körper aus homogenem Material, welches für die Ausdehnung durch die Wärme isotrop ist, ändern sich bei Temperaturschwankungen so, daß sie sich stets selbst ähnlich bleiben.

Innerhalb des Materials geht unter diesen Voraussetzungen ein Quadrat von der Seite l bei einer Temperaturänderung von t^0 C. über in die Fläche

$$l^2(1 + \nu t)^2 \sim l^2(1 + 2\nu t),$$

so daß die Flächendehnung für eine Änderung von t^0 C.

$$\frac{l^2(1 + \nu t)^2 - l^2}{l^2} \sim 2\nu t$$

beträgt.

Ebenso hat man für die Volumendehnung bei einer Änderung von t^0 C. angenähert $3\nu t$ einzuführen.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Arbeit für die Einheit des Volumens, welche der Temperaturänderung von t^0 C. entspricht, gemäß S. 867 und nach Formel Nr. 547)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \tfrac{1}{2}E\nu^2t^2.$$

[1]) Ein entsprechender Schluß ist für Gase unzulässig, da bei diesen der Ausdehnungskoeffizient bedeutend größer ist. Bei ihnen führt die Gleichung $v_t = v_0(1 + \nu t)$ nicht zu $v_t = v(1 + \nu t)$.

238. Die Berücksichtigung der betrachteten Spannungen. Setzen wir ein- für allemal voraus, daß die in Frage kommenden Materialien sich auch in Bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme isotrop verhalten und daß die aus ihnen gebildeten Konstruktionsteile im unbelasteten Zustande keine Spannungen zeigen[1]), so hat man nur bei statisch-unbestimmten Trägern auf Spannungen infolge von Temperaturveränderungen Rücksicht zu nehmen, vorausgesetzt, daß alle Teile des Trägers gleichmäßig erwärmt werden.

Ist nämlich der Träger statisch-bestimmt, so wird er auch durch die Befestigung nicht daran gehindert, sich bei Temperaturveränderungen stets sich selbst ähnlich zu verändern. Dies gilt z. B. für Balken, die wenigstens an einem Ende frei aufgelagert sind, falls man von der Reibung an der Auflagerstelle (Rollenlager!) absehen kann, oder für Bogenträger mit drei Gelenken, falls man diese als reibungslos betrachten darf.

Ist der Träger dagegen statisch-unbestimmt, so übt auch die Befestigung auf ihn einen Zwang aus, welcher ihn daran hindert, sich bei Temperaturänderungen stets sich selbst ähnlich zu verändern. Dies ist z. B. der Fall für beiderseits eingespannte gerade Balken, für Bogenträger mit zwei Gelenken und für völlig eingespannte Bogenträger.

Um bei statisch-unbestimmten Trägern, zu denen hier auch einfache, beiderseits eingespannte Zugstangen oder Druckstangen zu rechnen sind, die Spannungen durch Temperaturänderungen zu berücksichtigen, hat man stets zu überlegen, welche durch die Temperaturänderungen bestimmten Dehnungen durch den Zwang der Befestigung an ihrer Ausbildung verhindert werden.

Wenn z. B. eine beiderseits eingespannte Zugstange von der Länge l um t^0 C. erwärmt wird, so würde sie sich im freien Zustande gemäß der Dehnung vt verlängern. Diese Dehnung wird durch die Befestigung verhindert, d. h. diese bewirkt die negative Dehnung $-vt$, welcher die Druckspannung $\sigma_t = -Evt$ entspricht. Zu der bereits vorhandenen Zugspannung σ kommt also hier die Druckspannung σ_t infolge der Temperaturänderung hinzu, so daß die erwärmte Stange nur die Zugspannung $\sigma - \sigma_t = \sigma - Evt$ hat. Wird die Zugstange um t^0 C. abgekühlt, so steigt ihre Zugspannung unter gleichen Umständen auf $\sigma + Evt$.

Ist bei Schmiedeeisen $\sigma = 750$ Atm. und $t = 30^0$, so beträgt die Spannung im ersten Falle $750 - 24 \cdot 30 = 30$ Atm. und im zweiten Falle $750 + 24 \cdot 30 = 1470$ Atm.

Bei dem Bogenträger mit zwei Gelenken würde eine Stange zwischen den beiden Gelenken, falls diese den Abstand l haben, bei einer Temperaturänderung t^0 C. die Verlängerung bezw. Verkürzung $l \cdot vt$ zeigen. Hier muß also ein Horizontalschub H_t auftreten, welcher diese Verlängerung oder Verkürzung lvt verhindert.

---

[1]) Dies ist z. B. nicht der Fall bei Gußstücken, welche ungleichmäßig abgekühlt worden sind.

Benutzt man die Formeln des flachen Parabelbogens für H auf S. 1217 für $P = 0$ oder für $Q = 0$ und für $\lambda = lvt$, so erhält man

$$\pm H_t = \frac{lvt \,.\, E\mathfrak{T}\mathrm{r}}{\frac{8}{15} lh^2 + l \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathrm{r}}{f}} = \frac{15}{8} \frac{E\mathfrak{T}\mathrm{r}}{h^2} \cdot \frac{vt}{1 + \frac{15}{8} \frac{\mathfrak{T}\mathrm{r}}{fh^2}}.$$

Natürlich kann man auch hier die Sätze von Castigliano u. s. w. von Fall zu Fall mit Vorteil verwenden.

Um t für derartige Rechnungen zu bestimmen, muß man vor allem die Normaltemperatur für die Aufstellung des statisch-unbestimmten Trägers kennen, d. h. diejenige Temperatur, bei welcher er in unbelastetem Zustande keine Spannungen zeigt.

Vorstehende Betrachtungen gelten natürlich nur für die gewöhnlichen Temperaturschwankungen und nicht für außerordentliche Temperaturänderungen, wie sie etwa bei Bränden auftreten.

Drittes Kapitel.

Statik isotroper elastisch-fester Körper, welche dem Gesetze von Hooke nicht folgen, und Statik entsprechender heterotroper Körper.

239. **Die Aufgabe.** Die Untersuchungen des ganzen zweiten Kapitels [1]) beziehen sich auf isotrope Stoffe, welche dem Gesetze von Hooke folgen, und gelten demnach im allgemeinen innerhalb der Technik nur für Konstruktionen aus Stahl und Schmiedeeisen (Fluß- und Schweißeisen).

Auch bei diesen Stoffen, welche bis zu bestimmten Spannungsgrenzen stets dem Gesetze von Hooke folgen, hat man zwar gelegentlich eine gewisse Heterotropie zu beachten, insofern sich z. B. Schweißeisen parallel zur Sehnenrichtung anders verhält als senkrecht dazu, doch genügt es dabei, schließlich die Konstanten der verschiedenen Richtungen zu berücksichtigen. Vergl. §§ 118 und 120.

Unter Beachtung einer entsprechenden Heterotropie gelten die Untersuchungen des zweiten Kapitels auch für Konstruktionen aus Holz, welches sich gleichfalls parallel zur gewachsenen Faser anders verhält als senkrecht dazu. Vergl. §§ 118 und 120.

Dagegen zeigen von den in der Technik verwandten Stoffen namentlich Gußeisen, Stein, Beton, Mörtel und die Materialien der Riemen und Seile eigenartige Beziehungen, selbst wenn man nur eine bestimmte Richtung in ihnen in Bezug auf Spannungen und Dehnungen untersucht. Für sie gilt nämlich entweder das Gesetz von Hooke überhaupt nicht, oder es liegt bei ihnen die Proportionsgrenze so nahe an der Nullstelle (vergl. Fig. 592 und 593), daß jedenfalls die in der Praxis zulässigen Spannungen und Dehnungen jenem Gesetze nicht folgen.

Es erwächst demnach die Aufgabe, für diese einzelnen Materialien bezw. Gruppen von Materialien, unter Berücksichtigung ihrer Isotropie oder Heterotropie, durch Versuche die Gesetze festzustellen, welche statt des Gesetzes von Hooke für sie gültig sind, und demgemäß entsprechende statische Untersuchungen durchzuführen.

[1]) Vergl. auch §§ 118, 119, 120 und 124 und namentlich Fig. 592 und 593.

240. Die Formeln für Gußeisen[1]. Statt der Formel des Hookeschen Gesetzes $\sigma = \varepsilon \,.\, E$ bezw. $\varepsilon = \alpha \,.\, \sigma$ für $\alpha \,.\, E = 1$ hat man schon früh (Bülfinger 1729) die allgemeine Formel

$$\varepsilon = \alpha \,.\, \sigma^m$$

für die Darstellung des Zusammenhanges von Spannungen und Dehnungen eingeführt, welche für $m = 1$ das Gesetz von Hooke liefert.

Neuerdings haben v. Bach und Schüle diese Formel angewandt, um auf Grund von Versuchen für Gußeisen und andere Materialien den Zusammenhang von Spannungen und Dehnungen darzustellen; sie ist deshalb in der Technik als das v. Bach-Schülesche Gesetz bekannt.

Für eine bestimmte Art Gußeisen gilt z. B. nach den Versuchen von v. Bach und Schüle

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,140\,000}\,\sigma^{1,4} \text{ für Zug,}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,400\,000}\,\sigma^{1,067} \text{ für Druck,}$$

für eine andere Art Gußeisen ebenso

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,381\,700}\cdot\sigma^{1,066} \text{ für Zug,}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,132\,700}\cdot\sigma^{1,895} \text{ für Druck.}$$

Zu demselben Zweck ist von Schüle auch die Formel

$$\sigma = a \,.\, \varepsilon^k - b \,.\, \varepsilon^2$$

benutzt worden, in welcher die Konstanten a, b und k durch Versuche zu bestimmen sind.

Schon früher (1849) hat Hodgkinson die Formel[2])

$$\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$$

benutzt, welche für $k = 1$ aus der vorigen Formel entsteht; auch Hartig (1893) hat mit dieser Formel gearbeitet.

Von anderen Formeln, welche demselben Zweck dienen sollen, mag noch der Ansatz von Cox (1850) erwähnt werden:

$$\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3.$$

Letzterer[3]) zeigt deutlich die Bemühungen, die Formel $\sigma = \alpha \,.\, \varepsilon$, in welcher nur ε vorkommt, durch Einführung höherer Potenzen von ε zu verbessern, wie es auch sonst in der Physik üblich ist.

Ebenso könnte man es auch mit einer Formel

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3$$

---

[1]) Vergl. hierzu und zu den folgenden Paragraphen Mehmke, Zeitschr. für Mathem. u. Physik, 1898.

[2]) Bei graphischer Darstellung in Parallelkoordinaten entspricht ihr eine Parabel; sie wird deshalb nach Mehmke als „paraboliſches Gesetz" bezeichnet.

[3]) Nach Mehmke als „kubisch-paraboliſches Gesetz" bezeichnet.

versuchen, wie sie thatsächlich von J. O. Thompson (1891) bei den Untersuchungen von gezogenen Metalldrähten angewandt worden ist.

241. Die Formeln für Bausteine, Beton u. s. w. Die v. Bach-Schüleschе Formel ist auch für Bausteine, Beton u. s. w. verwandt worden, ebenso die Formel Schüles

$$\sigma = a\varepsilon^k - b\varepsilon^2.$$

Letztere ist, wieder für $k = 1$, von Hartig (1893) auch für Cement benutzt worden.

Für Bausteine und Mörtel hat Lang (1896) eine, ursprünglich von Cox (1850) für Gußeisen verwandte Formel, auch für Bausteine und Mörtel benutzt, nämlich die Formel [1])

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{a - b \,.\, \sigma}.$$

242. Die Formeln für Leder, Fäden u. s. w. Die v. Bach-Schüleschе Formel ist auch für die Materialien von Riemen und Seilen verwandt worden, ebenso die Formel Schüles

$$\sigma = a\varepsilon^k - b\varepsilon^2.$$

Zu gleichem Zweck hat Wertheim (1847) die Formel [2])

$$\varepsilon^2 = \alpha\sigma^2 + b\sigma$$

benutzt, ebenso Hartig (1893) die Formel

$$\sigma = c(e^{m\varepsilon} - 1)$$

und Imbert (1880) im besondern für Kautschuk die Formel

$$\varepsilon = e^{m\sigma} - 1.$$

243. Beurteilung der Formeln der §§ 240, 241 und 242. Ursprünglich hat man das Gesetz von Hooke als ein Grundgesetz für das Verhalten aller elastisch-festen Körper angesehen.

Da das Gesetz von Hooke dieses Gepräge nicht zu haben scheint, so ist es zunächst folgerichtig, nach einem solchen Grundgesetze zu suchen, und zwar mit der Maßgabe, daß sich das Gesetz von Hooke als dessen Sonderfall darstellt.

Die meisten der angeführten Formeln entsprechen diesem Gedanken; eine Ausnahme machen z. B. die Hartigsche und die Imbertsche Formel im § 242, bei welchen das Gesetz von Hooke nicht als Sonderfall, sondern als erste Annäherung (bei Entwickelung der Exponentialgröße) erscheint. Schon die Mannigfaltigkeit der aufgestellten Formeln läßt erkennen, daß es sich bei ihnen um sogenannte empirische Formeln handelt, d. h. um Formeln, welche lediglich dem Zwecke dienen, die Ergebnisse der Versuche in einer brauchbaren Annäherung möglichst einfach darzustellen.

Ob es überhaupt ein Grundgesetz giebt, welches die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen für alle elastisch-festen Körper darstellt, ist natürlich fraglich.

---

[1]) Nach Mehmke als „hyperbolisches Gesetz" bezeichnet.

[2]) Sie liefert bei graphischer Darstellung in Parallelkoordinaten eine Hyperbel.

Es ist möglich, aber es ist ebensowohl möglich, daß statt des Grundgesetzes Gruppen von specifischen Gesetzen auftreten, wonach jeder Stoff oder je eine bestimmte Gruppe von Stoffen ein besonderes Gesetz für die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen hat.

Man würde jede der oben angegebenen empirischen Formeln als ein solches specifisches Gesetz ansehen dürfen, wenn sie sich für die Spannungen und Dehnungen eines Stoffs oder einer bestimmten Gruppe von Stoffen innerhalb eines ausgedehnteren, den Nullpunkt der Spannungen und Dehnungen beiderseits umgebenden Gebietes ausreichend bewährte.

Da sich das Gesetz von Hooke für die meisten Stoffe gültig erweist, solange nur äußerst kleine Werte der Spannungen und Dehnungen berücksichtigt werden, wie sie bei den Schallbewegungen innerhalb der Körper auftreten, so müssen alle solche Formeln für relativ-kleine Werte der Spannungen und Dehnungen dem Gesetze von Hooke näherungsweise entsprechen, d. h. es muß stets

$$lim \left[\frac{\sigma}{\varepsilon}\right]_{\sigma=0,\ \varepsilon=0}$$

eine endliche, von Null verschiedene Konstante geben, welche $E = tng\, TO\varepsilon$ in Fig. 593 entspricht.

Demgemäß sind Darstellungen, wie

$$\sigma = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \cdots$$

oder

$$\varepsilon = b_1\sigma + b_2\sigma^2 + b_3\sigma^3 + \cdots$$

brauchbar, falls a_1 und b_1 von Null verschieden sind, wobei a_1 der Größe $E = \frac{1}{\alpha}$ und b_1 der Größe $\alpha = \frac{1}{E}$ entspricht.

Die v. Bach-Schülesche Formel

$$\varepsilon = \alpha \,.\, \sigma^m$$

würde dagegen, für positive Werte von m, falls nicht $m = 1$ ist,

$$lim \left[\frac{\varepsilon}{\sigma}\right]_{\varepsilon=0,\ \sigma=0} = lim\,[\alpha \,.\, \sigma^{m-1}]_{\sigma=0} = 0$$

oder

$$lim \left[\frac{\sigma}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0,\ \sigma=0} = lim \left[\frac{1}{\alpha \,.\, \sigma^{m-1}}\right]_{\sigma=0} = \infty$$

liefern.

Ebenso wenig entspräche die Schülesche Formel

$$\sigma = a \,.\, \varepsilon^k - b \,.\, \varepsilon^2,$$

falls nicht $k = 1$ ist, der aufgestellten Bedingung.

Da sich anderseits die v. Bach-Schülesche Formel ebenso wie die Schülesche Formel als gute empirische Formeln bewährt haben, so umfassen sie ein bestimmtes Gebiet von Wertepaaren der Spannungen und Dehnungen, in welchem der Nullpunkt und dessen nächste Umgebung nicht enthalten ist; darauf weist übrigens auch schon der Unterschied der Konstanten für Zug und für Druck in der v. Bach-Schüleschen Formel hin.

Die anderen erwähnten Formeln entsprechen meist der aufgestellten Bedingung, so giebt z. B. die Formel Hartigs in § 242 bei Entwickelung von $e^{m\varepsilon}$

$$\sigma = c(e^{m\varepsilon} - 1) = c\left(1 + \frac{m\varepsilon}{1} + \frac{(m\varepsilon)^2}{1 \cdot 2} + \cdots - 1\right)$$
$$= c(m \cdot \varepsilon + \tfrac{1}{2} m^2 \cdot \varepsilon^2 + \cdots).$$

Wenn Föppl[1]) gegen das v. Bach-Schüleſche Geſetz auch mit Rückſicht auf die notwendige Homogeneität der Gleichungen Bedenken erhebt, ſo iſt zu bemerken, daß ſolche Bedenken zunächſt auch für andere bewährte Gleichungen der Phyſik beſtehen, ſich aber auch ſtets entkräften laſſen, wie es ja Föppl in Bezug auf das v. Bach-Schüleſche Geſetz durch den Anſatz

$$\varepsilon = \alpha \left(\frac{\sigma \text{ in Atm.}}{1 \text{ Atm.}}\right)^m$$

ſelbſt zeigt.

244. Verwertung der Formeln der §§ 240, 241 und 242. Wenn man eine der angeführten Formeln, z. B. das v. Bach-Schüleſche Geſetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$, an die Stelle des Geſetzes von Hooke ſetzt und auch die entſprechende Querdehnung einführt, nachdem m gleichfalls durch Verſuche als Funktion von σ oder ε dargeſtellt iſt, ſo iſt damit für eine beſtimmte Art von iſotropen Körpern die Grundlage gegeben, um eine entſprechende Statik aufzubauen, wobei allerdings in Bezug auf die Verwendung des Principes der Übereinanderlagerung (vergl. S. 836) zunächſt die größte Vorſicht geboten iſt[2]).

Man hat derartige Unterſuchungen, namentlich für die Biegung eines Balkens von rechteckigem Querſchnitt aus Gußeiſen oder aus Stein, beim Normalfall der Praxis durchgeführt, dabei aber keine erheblich größere Übereinſtimmung mit der Erfahrung erreicht, als ſie die auf dem Geſetz von Hooke aufgebaute Statik darbietet.

Bei der Biegung gerader Balken von Querſchnitten, für welche $w_1 = w_2$ iſt, beſtätigt ſich zwar im allgemeinen die Verſchiebung der neutralen Schicht aus der Mittellage und eine, von dem linearen Spannungsgeſetze abweichende Verteilung der Spannungen, wie es die obigen empiriſchen Formeln fordern, aber die Übereinſtimmung von Theorie und Erfahrung iſt doch im einzelnen durchaus nicht befriedigend.

Infolgedeſſen bedürfen die einzelnen empiriſchen Formeln, welche für Gußeiſen u. ſ. w. an die Stelle des Geſetzes von Hooke treten ſollen, zur Zeit noch weiterer erneuter Prüfungen, und es iſt mit Freuden zu begrüßen, daß die „Mitteilungen über Forſchungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurweſens“, herausgegeben vom Verein Deutſcher Ingenieure[3]),

[1]) Vergl. Mechanik, Bd. III, S. 56 u. 57.

[2]) Daß dieſes Princip in der bisher benutzten Form zunächſt nur bei Gültigkeit des Geſetzes von Hooke gerechtfertigt erſcheint, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Vergl. dazu auch S. 1082.

[3]) Vergl. S. 845, Anm.

künftig als Sammelstelle für die Ergebnisse aller derartiger Arbeiten dienen werden. Bei den sorgfältigen und scharfsinnigen Bemühungen, welche allen diesen Beziehungen seit geraumer Zeit in reichem Maße gewidmet worden sind, liegt es allerdings nahe zu vermuten, daß die Ungleichmäßigkeit der zu untersuchenden Materialien hier überhaupt einen befriedigenden Abschluß unmöglich macht und daß namentlich das Gußeisen vermöge seiner Bildung (Gußfehler, Gußspannungen u. s. w.) dem Bestreben, eine Formel für den Zusammenhang von Spannungen und Dehnungen abzuleiten, unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet.

Man müßte sich dann darauf beschränken, neue Konstruktionen im Hinblick auf die Ergebnisse der Versuche nach Maßgabe vorhandener und bewährter Konstruktionen auszuführen.

Anderseits hat man auch darauf hingewiesen, daß die Versuche, welche zur Ableitung obiger empirischer Formeln gedient haben, nicht völlig einwandsfrei sind, hauptsächlich, weil man selbst bei einfachen Zug- und Druckversuchen an geraden, prismatischen Stäben eine gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt nur in gewisser Annäherung voraussetzen darf. Mit diesem Hinweise verbindet sich dann meist die Hoffnung, daß das Gesetz von Hooke doch, wenn auch nur in einer gewissen Annäherung, für die in der Praxis verwendbaren Spannungen als elastisches Grundgesetz angesehen werden darf [1]):

Für heterotrope Stoffe steigern sich natürlich die erwähnten Schwierigkeiten noch in hohem Maße.

Hierzu kommt noch der Einfluß der Gestalt der Oberfläche der Konstruktionsteile. Vergl. § 120.

245. Schlußbemerkungen. Im Hinblick auf die dargestellten Verhältnisse pflegt man in der Praxis, namentlich auch mit Rücksicht auf den meist sehr verwickelten Bau der statischen Formeln, welche einem anderen als dem Gesetz von Hooke entsprechen, im allgemeinen die im zweiten Kapitel entwickelte Statik auch für Materialien zu verwenden, welche dem Gesetz von Hooke nicht folgen.

Für die Biegung von geraden Balken aus Gußeisen von Querschnitten, für welche $w_1 = w_2$ ist, rechtfertigt sich dies bei einer Dimensionierung nach der zulässigen Spannung (k_1) der Zugseite insofern, als man dabei sicherer arbeitet, als an und für sich erforderlich ist, was allerdings mit einer gewissen Materialverschwendung verbunden ist. Da Gußeisen nämlich Druck bedeutend besser aushält als Zug, so muß die Zerstörung von Balken aus Gußeisen von Querschnitten, für welche $w_1 = w_2$ ist, bei Biegung stets auf der Zugseite stattfinden, falls die Nullschicht von der Mitte aus hier nicht allzu weit nach der Zugseite hinrückt. Die Versuche bestätigen dies; überdies zeigt sich aber, daß die Bruchspannung (Festigkeit) K_1 für Zug, welche durch Zugversuche bestimmt wird, weit geringer ist, als die aus der Formel $\sigma_w = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}$ für Bruchbelastung bei Biegung berechnete Bruchspan-

[1]) Es würde dann ein ähnliches Schicksal haben, wie das Gesetz von Boyle-Mariotte.

nung K_1'. Daraus folgt, daß der gebogene Balken auf der Zugseite thatsächlich bei einer geringeren Spannung (K_1) zerstört wird, als die Spannung (K_1') der Rechnung nach dem Gesetze von Hooke ergiebt. Unter der Voraussetzung, daß diese Beziehung auch für die in der Praxis verwendbaren Spannungen bestehen bleibt, ist also die Spannung σ' der Rechnung stets größer als die thatsächlich auftretende Spannung σ, d. h. für $\sigma' \leqq k_1$ ist erst recht $\sigma < k_1$.

Aus zahlreichen Versuchen folgert ferner v. Bach[1]) für die Biegungsspannungen des Gußeisens

$$k_b = \mu k_1 \sqrt{\frac{w_1}{s_1}},$$

wobei w_1 den Abstand der äußersten Faser der Zugseite (k_1) und s_1 den Abstand des Schwerpunktes der entsprechenden Querschnittshälfte von der Mittellinie des Querschnittes bezeichnet, während für Stücke mit Gußhaut angenähert $\mu = 1$ ist, für Stücke ohne Gußhaut $\mu = 1{,}20$ bis $1{,}33$, je nach der Form des Querschnittes.

Für die Torsionsspannungen des Gußeisens gilt ebenso nach v. Bach die Formel

$$k_d = \mu k_1,$$

wobei μ hauptsächlich von der Form des Querschnittes abhängt.

Als einen Niederschlag der Erfahrungen an ausgeführten Konstruktionen, welche sich bewährt haben, sind auch die baupolizeilichen Vorschriften anzusehen, von denen hier namentlich die für gußeiserne Säulen[2]) hervorzuheben sind.

Im allgemeinen wird man die Verwendung von Gußeisen bei allen Konstruktionen, welche in Bezug auf ihre Festigkeit nur ungenügend beurteilt werden können, nach Möglichkeit vermeiden müssen.

Für Balken aus Stein und Beton rechtfertigt sie die vorläufige Verwendung der Statik gemäß dem Gesetz von Hooke insofern, als bei diesen Materialien die Abweichung von jenem Gesetz thatsächlich eine weit geringere ist als bei Gußeisen.

Man hat hier versucht[3]), die Formel $\sigma_w' = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w}$ den Versuchsergebnissen entsprechend zu verbessern, und zwar in der Gestalt

$$\sigma_w = \eta \cdot \frac{Mo}{\mathfrak{T}r : w},$$

wobei η für gerade Balken von rechteckigem Querschnitt gemäß der folgenden Tabelle zu bestimmen ist

	η
Granit	0,96
Sandstein	0,84
Beton	0,97

[1]) Vergl. auch v. Bachs Maschinenelemente, S. 42 f.
[2]) Vergl. z. B. die Vorschriften der Berliner Baupolizei vom 21. Febr. 1887.
[3]) Vergl. Föppls Mechanik, Bd. III, S. 144.

Viertes Kapitel.

Kinetik elastisch-fester Körper.

Erste Abteilung.

Die Spannungen bewegter elastisch-fester Körper.

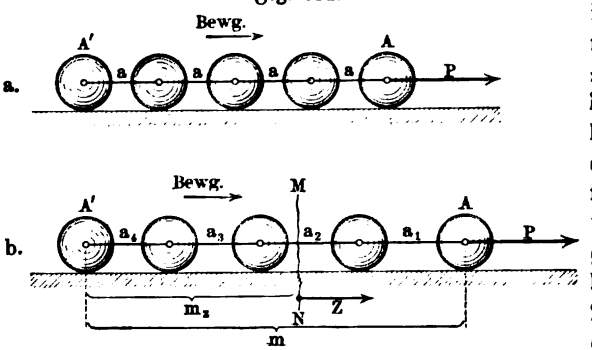
246. Allgemeines. Bewegen sich elastisch-feste Körper, so zeigen sie im allgemeinen andere Spannungen als im Zustande der Ruhe, nur für gleichförmige Verschiebungen stimmt die kinetische Betrachtung natürlich immer mit der statischen Betrachtung überein. Die Bestimmung der Spannungen elastisch-fester Körper, die sich in Bewegung befinden, bietet im Princip keine Schwierigkeiten. Trennt man einen Teil des Körpers durch einen Schnitt ab, so müssen die an dem Teilkörper wirkenden Kräfte gemäß dem Princip von d'Alembert (§ 66) den in der Bewegung zu Tage tretenden Effektivkräften gleichwertig sein bezw. mit den (fingierten) Gegenkräften der Effektivkräfte im Gleichgewicht stehen; als wirkende Kräfte treten natürlich außer den von vornherein gegebenen äußeren Kräften auch wieder die, durch den Schnitt zerstörten Spannkräfte auf.

Da die Effektivkräfte im allgemeinen von Augenblick zu Augenblick veränderlich sind, so gilt der Ansatz für ein solches Kräftesystem im allgemeinen auch nur für einen bestimmten Zeitpunkt, und man hat infolgedessen hier meist eine ziemlich verwickelte Untersuchung durchzuführen, zumal auch die Zusammenfassung der Effektivkräfte der einzelnen Massenteilchen gewöhnlich nicht ohne Schwierigkeiten möglich ist. Infolgedessen berechnet man die Spannungen bewegter elastisch-fester Körper, wie sie als Maschinenteile verwendet werden, vielfach so, als wenn die Körper sich in Ruhe befänden, berücksichtigt deren Bewegung aber bei der Auswahl der Werte der zulässigen Spannungen (k_1 und k_2 und t) und auch sonst im Hinblick auf ausgeführte und bewährte Konstruktionen. Vergl. S. 813.

In einzelnen Fällen läßt sich die kinetische Untersuchung auch in befriedigender Weise durchführen. Dies ist namentlich der Fall, wenn der elastisch-feste Körper innerhalb der Bewegung eine Formänderung annimmt, welche, nachdem sie sich einmal entwickelt hat, während der weiteren Bewegung dauernd oder doch wenigstens während einer endlichen Zeit bestehen bleibt.

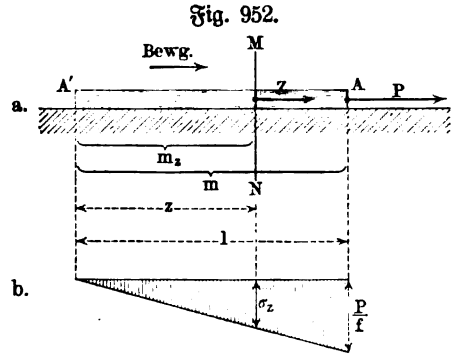
247. Die Spannungen bei Verschiebungen. Eine dauernde Formänderung tritt z. B. ein, wenn ein gerader Stab durch eine konstante, in Richtung seiner Achse wirkende Kraft bewegt wird. Greift die Kraft an dem einen Ende des Stabes als Zugkraft an, so entfernt sie zunächst den Querschnitt, an dem sie wirkt, von dem benachbarten, wodurch zwischen beiden Querschnitten Spannkräfte entstehen, welche nun wieder den zweiten Querschnitt von dem dritten entfernen u. s. f., bis schließlich eine Formänderung zustande kommt, welche des weiteren bestehen bleibt, solange die gegebenen Bedingungen bestehen bleiben; für eine Druckkraft gilt Entsprechendes.

Fig. 951.



Um diesen Vorgang übersehen zu können, denken wir uns zunächst eine Kette von starren Kugeln, die durch elastische Schnüre von gleicher Länge verbunden sind, durch eine konstante Kraft $[P]$ auf einer vollkommen glatten Unterlage, wie es Fig. 951 a für den Beginn der Bewegung andeutet, und Fig. 951 b für die weitere Bewegung, nachdem die bleibende Formänderung eingetreten ist. Da sich die Kugelkette nach Fig. 951 b wie ein starrer Körper verhält, so hat die Beschleunigung j für jeden materiellen Punkt jetzt denselben Wert b, welcher natürlich als $P : m$ gegeben ist, wenn die ganze bewegte Masse durch m bezeichnet wird. Für einen Schnitt MN ist eine Kraft $[Z]$ einzuführen, welche die Masse m_z bewegt, so daß also

Fig. 952.



$$Z = m_z \cdot b$$

ist. Wirkt $[Z]$ an einem Querschnitt f, so ist bei gleichmäßiger Verteilung die zugehörige Spannung σ_z gegeben durch

$$\sigma_z = \frac{Z}{f} = \frac{m_z \cdot b}{f} = \frac{P}{f} \cdot \frac{m_z}{m}.$$

Überträgt man die Beziehungen der Fig. 951 a und b auf einen prismatischen Stab vom Querschnitte f, wie ihn Fig. 952 a darstellt, so ist $m_z : m = z : l$, d. h. hier gilt

$$\sigma_z = \frac{P}{f} \cdot \frac{z}{l}.$$

Für $z = 0$ ist $\sigma_z = 0$, für $z = l$ erreicht σ_z sein Maximum $\frac{P}{f}$ u. s. w., d. h. man gelangt zu der graphischen Darstellung der Spannungen gemäß Fig. 952 b mit dem Spannungsmaximum $\frac{P}{f}$ für das angegriffene Ende A.

Für ein specifisches Gewicht δ des Stabes ist $m_z = \frac{f \cdot z \cdot \delta}{g}$ und infolgedessen läßt sich σ_z auch darstellen als

$$\sigma_z = \frac{b}{g} \cdot \delta \cdot z.$$

Ist die Unterlage nicht vollkommen glatt, so ist bei einer Reibung $[R]$ statt P anzusetzen $P - R$.

Denkt man sich Fig. 952 um 90° gedreht, so hat $[Z]$, falls $[P]$ senkrecht nach oben wirkt, bei Berücksichtigung der Schwere sowohl die Beschleunigung $[g]$ zu überwinden, als auch die beobachtete Beschleunigung $[b]$ zu erzeugen, so daß dann

$$Z = m_z(b + g) \quad \text{und} \quad P = m(b + g)$$

und

$$\sigma_z = \frac{Z}{f} = \frac{m_z(b + g)}{f} = \frac{P}{f} \cdot \frac{m_z}{m}$$

ist. Für den prismatischen Stab ist also wieder

$$\sigma_z = \frac{P}{f} \cdot \frac{z}{l}$$

oder auch

$$\sigma_z = \frac{b + g}{g} \cdot \delta \cdot z.$$

Fällt der Stab der Fig. 952, gehemmt durch eine nach oben wirkende Kraft $[P]$, so ist für eine beobachtete Beschleunigung $[b]$

$$\sigma_z = \frac{-b + g}{g} \cdot \delta \cdot z$$

und demnach gilt für einen frei fallenden Stab ($b = g$), dessen Achse senkrecht zum Horizont gerichtet ist, $\sigma_z = 0$, d. h. er bleibt ohne Spannungen.

Wird ein prismatischer Stab, senkrecht zu seiner Achse, durch eine in seinem Schwerpunkte angreifende konstante Kraft $[P]$ bewegt, so tritt eine Verschiebung ein in Richtung von $[P]$, wobei sich der Stab biegt, wie es Fig. 953 a (a. f. S.) andeutet.

Nach Vollendung der Formänderung ist $[P]$ bei Vernachlässigung des Gewichtes des Stabes gleichwertig mit dem Systeme der gleichsinnig-parallelen und gleichen Effektivkräfte der einzelnen Massenteilchen bezw. im Gleichgewicht mit den in Fig. 953 a und b (a. f. S.) gezeichneten Gegenkräften der Effektivkräfte. Ist $[b]$ die in Richtung der Bewegung beobachtete Beschleunigung, so entspricht einer Scheibe des Stabes, senkrecht zur Achse,

die Effektivkraft $\left(f \,.\, \xi \cdot \frac{\delta}{g}\right) \cdot b$, falls f die Fläche des Querschnittes und ξ die Dicke der Scheibe bezeichnet.

Die ganze Strecke des Balkens zwischen MN und B entspricht der Effektivkraft $\left(f \,.\, z \cdot \frac{\delta}{g}\right) \cdot b$, welche sich in der Mitte von z verdichtet. Für diesen Balkenteil ist also in Bezug auf B als Drehpunkt das Biegungsmoment

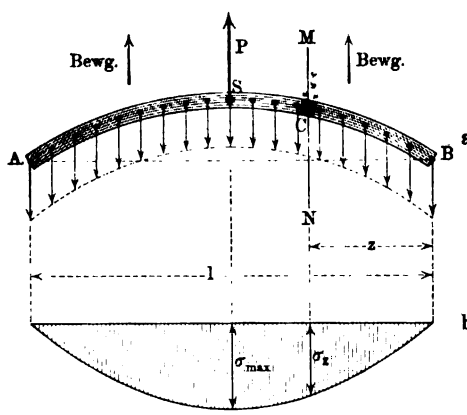
$$Mo = \left(f \,.\, z \cdot \frac{\delta}{g}\right) \cdot b \,.\, \tfrac{1}{2} z = \tfrac{1}{2} \frac{b}{g} \cdot f \delta z^2$$

einzuführen, so daß für MN die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr} : w}$$

anzusetzen ist.

Fig. 953.



Für S hat Mo sein Maximum $\left(z = \frac{l}{2}\right)$, d. h. es ist in S

$$\sigma_{max} = \tfrac{1}{8} \frac{b}{g} \cdot \frac{f \delta l^2}{\mathfrak{Tr} : w}$$

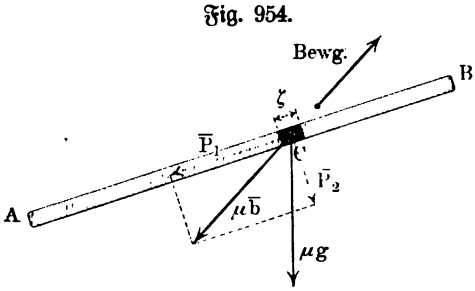
bezw. für G als Gewicht des Stabes

$$\sigma_{max} = \tfrac{1}{8} \frac{b}{g} \cdot \frac{G l}{\mathfrak{Tr} : w} .$$

Ist $[P]$ senkrecht nach oben gerichtet, so tritt bei Berücksichtigung der Schwere wieder für b ein $b + g$.

Ist die Bewegung des betrachteten Stabes eine beliebige Verschiebung mit konstanter Beschleunigung $[b]$, so läßt sich die Gegenkraft der Effektivkraft $[\mu b]$ für eine Scheibe von der Masse μ, wie sie bei C in Fig. 954 angedeutet ist, in die Komponenten $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ zerlegen, von denen die eine in die Achse des Stabes fällt, während die andere senkrecht dazu steht.

Fig. 954.



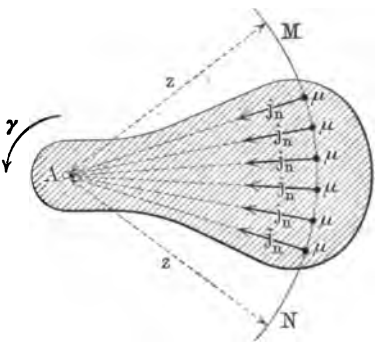
Aus dem Ansatz des Gleichgewichtes für das System der Effektivkräfte und für das System der wirkenden Kräfte, zu denen für die Scheibe bei C auch ihr Gewicht $[\mu g]$ gehört, lassen sich nach Vollendung der Formänderung auch hier die herrschenden Spannungen ableiten. Ist die Beschleunigung nicht konstant, so ist derselbe Ansatz zu machen, aber er gilt dann nur für einen bestimmten Zeitpunkt.

Auch die Ausdehnung auf andere Körperformen als auf die des prismatischen Stabes bietet im Princip keine Schwierigkeiten.

248. Die Spannungen bei Drehungen. Bei einer gleichförmigen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit γ, wie sie Fig. 955 für eine in A auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Achse andeutet, tritt für ein Teilchen μ im Abstande z von der Drehungsachse als Effektivkraft die Centripetalkraft C auf, für welche (vergl. S. 241) gilt

$$C = \mu \,.\, j_n = \mu z \,.\, \gamma^2.$$

Fig. 955.



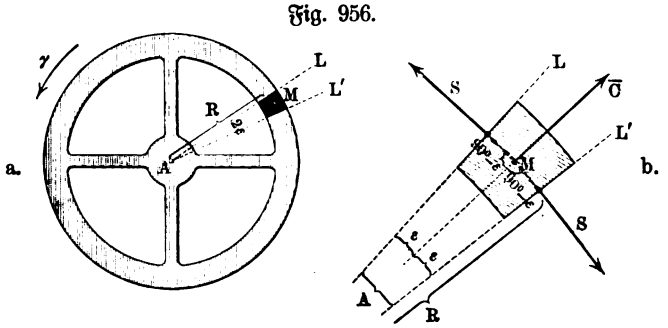
Bei einem cylindrischen Schnitt vom Radius z hat $[C]$ für Teilchen von gleicher Masse denselben Wert.

Trennt man einen Teil des Körpers durch einen Schnitt MN ab, so ist das System $\Sigma[S]$ der durch den Schnitt zerstörten Spannkräfte gleichwertig dem System der Centripetalkräfte des abgetrennten Teiles bezw. im Gleichgewicht mit dem System ihrer (fingierten) Gegenkräfte (Centrifugalkräfte).

Wenn auf die abgetrennten Teile noch andere Kräfte wirken, so sind diese natürlich auch noch zu berücksichtigen.

Ist der sich drehende Körper ein Ring, wie ihn Fig. 956 a zeigt, so gilt für ein Stück, welches durch zwei benachbarte Achsenschnitte AL und AL'

Fig. 956.



ausgeschnitten wird, Fig. 956 b, falls man die durchschnittenen Spannkräfte durch $[S]$ bezeichnet und andere Kräfte nicht in Frage kommen.

Die Komponenten von $[S]$ in Richtung von AM haben den Wert $S \,.\, \sin\varepsilon$, so daß

$$\overline{C} = 2\,S \,.\, \sin\varepsilon \sim S \,.\, arc\,2\,\varepsilon$$

ist.

Darf man die Masse des Ringes in einem mittleren Kreise vom Radius R verdichtet denken, so ist die Masse des Teilchens in Fig. 956 b bei einem Querschnitt f gegeben als

$$\frac{2\varepsilon^0}{360^0} \cdot f \,.\, 2R\pi \cdot \frac{\delta}{g} = arc\, 2\varepsilon \,.\, f \,.\, R \cdot \frac{\delta}{g}$$

und demnach C angenähert darstellbar als

$$arc\, 2\varepsilon \,.\, f \,.\, R^2 \cdot \frac{\delta}{g} \cdot \gamma^2.$$

Entspricht $[S]$ die mittlere Spannung σ, so ist $S = f \,.\, \sigma$, und man hat also

$$arc\, 2\varepsilon \,.\, f \,.\, R^2 \cdot \frac{\delta}{g} \cdot \gamma^2 \sim f \,.\, \sigma \,.\, arc\, 2\varepsilon$$

oder

$$\sigma = R^2 \cdot \frac{\delta}{g} \cdot \gamma^2.$$

Führt man die (lineare) Geschwindigkeit $c = R\gamma$ des mittleren Kreises ein, so ist

$$\sigma = c^2 \cdot \frac{\delta}{g}.$$

Ist der Körper ein prismatischer Stab, wie es Fig. 957 a andeutet, so ist die Berechnung der Spannungen gleichfalls einfach, falls man die Masse des Stabes in der Achse AB verdichtet denken darf. Man hat dann

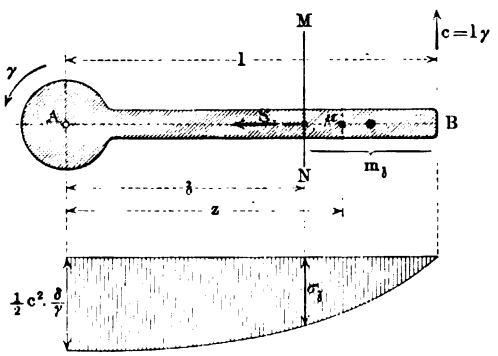
a. für das durch MN abgeschnittene Stück des Stabes gleichgerichtete Centripetalkräfte vom Werte $\mu \,.\, \varepsilon \,.\, \gamma^2$ zu vereinigen, so daß für das ganze

b. Stück

$$C = \Sigma\mu \,.\, \varepsilon \,.\, \gamma^2 = \gamma^2\, \Sigma\mu\varepsilon$$

als Centripetalkraft anzusetzen ist.

Fig. 957.



Da der Schwerpunkt des abgeschnittenen Stückes, falls dessen Masse m_δ ist, von A den Abstand $\delta + \frac{l-\delta}{2} = \frac{l+\delta}{2}$ hat, so ist

$$\Sigma\mu\varepsilon = \frac{l+\delta}{2} \cdot m_\delta$$

und man hat demnach

$$C = \tfrac{1}{2}\gamma^2(l+\delta) \,.\, m_\delta,$$

wobei $m_\delta = (l-\delta) f \cdot \frac{\delta}{g}$ ist.

Für eine mittlere Spannung σ_δ gilt also

$$S = f \,.\, \sigma_\delta = \tfrac{1}{2}\gamma^2(l+\delta) \,.\, m_\delta,$$

d. h. es ist

$$\sigma_\zeta = \tfrac{1}{2}\gamma^2(l + \zeta)\cdot\frac{m_\zeta}{f} = \tfrac{1}{2}\gamma^2(l^2 - \zeta^2)\cdot\frac{\delta}{g}.$$

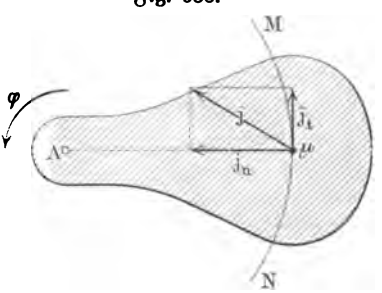
Für $\zeta = l$ ist $\sigma_\zeta = 0$, während σ_ζ für $\zeta = 0$ sein Maximum

$$\sigma_0 = (\sigma_\zeta)_{max} = \tfrac{1}{2}\gamma^2 l^2\cdot\frac{\delta}{g} = \tfrac{1}{2}c^2\frac{\delta}{g}$$

erhält, falls man die (lineare) Geschwindigkeit $c = l\gamma$ des Stabendes einführt; den Verlauf der Spannungen zeigt Fig. 957 b.

Bei einer ungleichförmigen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit φ ist für jedes Massenteilchen (vergl. Fig. 958) neben der radialen Komponente vom Wert $C = \mu\,.\,j_n = \mu\,.\,z\,.\,\varphi^2$ noch eine tangentiale Komponente der Effektivkraft einzuführen, welche bei einer Winkelbeschleunigung ι den Wert $\mu j_t = \mu\,.\,z\,.\,\iota$ hat (vergl. S. 241).

Fig. 958.



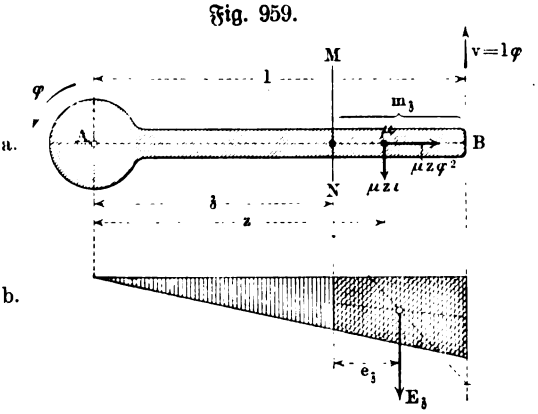
Bei einem prismatischen Stabe, wie ihn Fig. 959 a darstellt, führen die radialen Kräfte zu Achsenspannungen, die tangentialen Kräfte zu Biegungsspannungen, für deren Berechnung man am besten wieder deren Gegenkräfte einführt, wie es Fig. 959 a zeigt.

Die Gruppe der radialen Kräfte führt wieder angenähert zu dem Werte ($v = l\varphi$)

$$\sigma_0 = (\sigma_\zeta)_{max} = \tfrac{1}{2}\varphi^2 l^2\cdot\frac{\delta}{\gamma} = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\delta}{\gamma}.$$

Die Gruppe der tangentialen Kräfte stellt ein System von Parallelkräften dar, dessen graphische Darstellung Fig. 959 b zeigt. Für die Schnittstelle MN ist ihr Moment $Mo = E_\zeta\,.\,e_\zeta$, falls E_ζ die Resultante (vgl. die Schraffierung) für den abgeschnittenen Teil und e_ζ der Schwerpunktsabstand der entsprechenden Kraftfläche ist.

Fig. 959.



Man hat

$$e_\zeta = \tfrac{1}{3}\frac{\delta + 2l}{\delta + l}(l - \zeta).$$

Ferner ist $E_\zeta = \Sigma\mu z\iota = \iota\Sigma\mu z$, wobei sich $\Sigma\mu z$ auf den abgeschnittenen Teil bezieht; bezeichnet man dessen Masse als m_ζ, so ist

$$\left(\delta + \frac{l-\delta}{2}\right) m_1 = \Sigma \mu \varepsilon,$$

d. h. man hat

$$E_1 = \tfrac{1}{2}\iota(l+\delta)\, m_1.$$

Da $m_1 = (l-\delta) f \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}$ iſt, ſo hat man

$$Mo = E_1 \,.\, e_1 = \tfrac{1}{6}\iota(\delta + 2l)(l-\delta) m_1$$
$$= \tfrac{1}{6}\iota(\delta + 2l)(l-\delta)^2 f \frac{\delta}{\gamma}.$$

Dieſem Momente entſpricht die Biegungsſpannung

$$\sigma_1' = \frac{\tfrac{1}{6}\iota(\delta + 2l)(l-\delta)^2 f \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}}{\mathfrak{Tr} : w}.$$

Für $\delta = 0$ erhält σ_1' ſein Maximum $\dfrac{\tfrac{1}{8} l^3 f \dfrac{\delta}{\gamma}}{\mathfrak{Tr} : w} \cdot \iota$.

Für A iſt alſo ($\delta = 0$) das Maximum der Geſamtſpannungen

$$[\sigma_0] \overset{\times}{+} [\sigma_0'] \overset{\times}{=} \left[\tfrac{1}{2}\frac{\delta}{g} \cdot \varphi^2 l^2\right] \overset{\times}{+} \left[\tfrac{1}{3}\frac{\delta}{g} \cdot \iota \frac{l^3 f}{\mathfrak{Tr} : w}\right]$$

oder für $\varphi l = v$ und $\iota l = j$ auch

$$\left[\tfrac{1}{2}\frac{\delta}{g} \cdot v^2\right] + \left[\tfrac{1}{3}\frac{\delta}{g} \cdot j \cdot \frac{l^2 f}{\mathfrak{Tr} : w}\right].$$

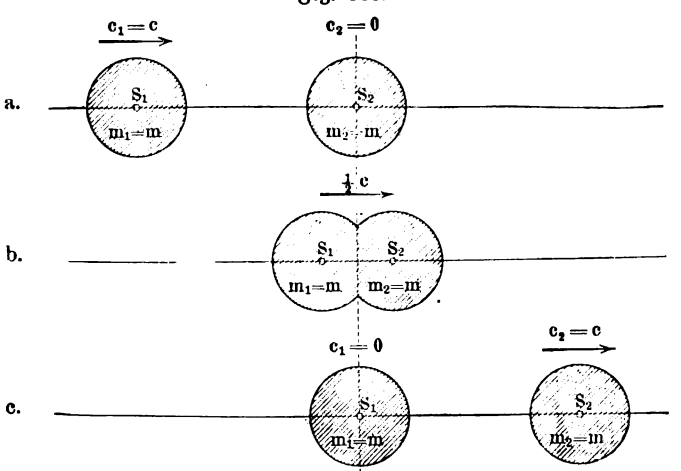
249. Die Spannungen bei Verſchiebungen und Drehungen. Da ſich jede Bewegung in ein Syſtem von Verſchiebungen und von Drehungen auflöſen läßt, ſo reichen die Betrachtungen der vorigen Paragraphen im Princip aus, um die Spannungen bei beliebigen Bewegungen elaſtiſch-feſter Körper zu beſtimmen.

Zweite Abteilung.

Der Stoß elastisch-fester Körper.

250. Der Vorgang des Stoßes. Von besonderer Bedeutung sind die Spannungen elastisch-fester Körper, welche auftreten, wenn zwei relativ zu einander in Bewegung befindliche Körper zur Berührung kommen, vorausgesetzt, daß es sich dabei nicht nur um ein relatives Gleiten oder Rollen oder um eine Verbindung dieser beiden besonderen Bewegungsarten handelt. Man pflegt einen derartigen Vorgang, bei welchem die beiden Körper gewissermaßen das Bestreben zeigen, ineinander einzudringen, einen „Stoß der Körper" zu nennen.

Fig. 960.



Dieser Vorgang zerfällt erfahrungsmäßig in zwei Teile; während des ersten bilden sich an beiden Körpern mehr oder minder deutliche Formänderungen aus, denen bestimmte Spannkräfte entsprechen, während des zweiten verschwinden diese Formänderungen wieder bis zu einem gewissen Grade und zugleich zeigt sich nach Vollendung des Stoßes stets eine Änderung der relativen Bewegung der beiden Körper. In dem Augenblick, welcher die beiden Teile des Stoßes trennt, zeigen die Körper die größte gegenseitige Pressung und bilden einen Körper; wir werden diesen Augenblick als den Grenzpunkt des Stoßes bezeichnen.

Das einfachste Beispiel für einen solchen Stoß wird durch Fig. 960 (a. v. S.) dargestellt; eine Kugel aus Elfenbein von der Masse $m_1 = m$ trifft hier eine ruhende Kugel aus demselben Stoff von der Masse $m_2 = m$ mit der Geschwindigkeit $[c_1]$ vom Werte c und zwar so, daß die Richtung der Bewegung durch die beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 geht (vergl. Fig. 960 a).

Nach dem Stoß bewegt sich die zweite Kugel nahezu mit der Geschwindigkeit $[c_2]$ vom Wert c in der ursprünglichen Bewegungsrichtung der ersten Kugel, während diese zur Ruhe gekommen ist (vergl. Fig. 960 c).

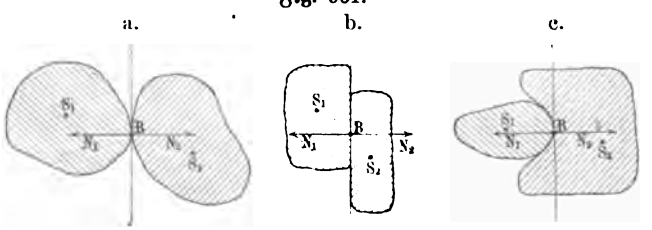
Hat man die Oberfläche der einen Kugel mit Ruß überzogen, die der anderen aber frei gelassen, so ist nach dem Stoß nicht nur ein Punkt, sondern eine ganze Kalotte der unberußten Kugel geschwärzt, woraus sich die Art der Formänderung während des Stoßes (vergl. Fig. 960 b) beurteilen läßt.

Im Grenzpunkt des Stoßes, d. h. im Augenblick der größten gegenseitigen Pressung bilden die beiden Kugeln einen Körper, so daß die beiden Kugeln für diesen Augenblick eine bestimmte gemeinsame Geschwindigkeit (vom Werte $\frac{1}{2}c$) haben. Hier wird während des ersten Teiles des Stoßes, d. h. bei der Bildung der Formänderung, die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ von m_1 auf m_2 übertragen, und während des zweiten Teiles des Stoßes, d. h. bei dem Ausgleich der Formänderung, wiederholt sich dieser Vorgang noch einmal.

Entsprechende Beziehungen treten auch in anderen Fällen des Stoßes auf, nur sind die Änderungen in der relativen Bewegung der beiden Körper dann verwickelter.

251. Der centrale und der excentrische Stoß. Wenn die Berührung der beiden Körper beim Stoß zunächst nur in einem Punkt B stattfindet, wie es Fig. 961 a andeutet, so wird die Normale der gemeinsamen Berührungsebene beider Körper als Stoßlinie, deren Richtung im Sinne von

Fig. 961.



BN_1 oder von BN_2 als Stoßrichtung bezeichnet. Findet die Berührung sofort in einer Fläche statt, wie es Fig. 961 b und c andeuten, so verdichtet sich der auftretende Druck in einem Punkt B dieser Fläche, und man hat dann die zu B gehörige Normale der gemeinsamen Berührungsfläche als Stoßlinie einzuführen.

Man bezeichnet Punkt B in allen Fällen als Stoßpunkt.

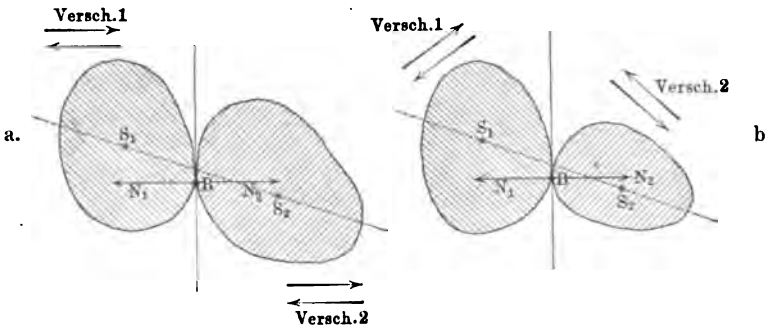
Liegen die Schwerpunkte S_1 und S_2 beider Körper auf der Stoßlinie, so heißt der Stoß central, sonst excentrisch.

252. Stöße bei Verschiebungen. Der Vorgang des Stoßes ist am einfachsten, wenn die Bewegungen beider Körper Verschiebungen sind.

Fallen die Richtungen beider Verschiebungen in die eine oder in die andere Richtung der Stoßlinie, so heißt der Stoß gerade, sonst schief.

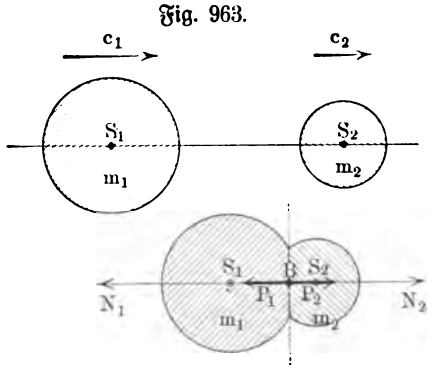
Fig. 962 a stellt einen geraden Stoß dar, Fig. 962 b einen schiefen Stoß; die dargestellten Stöße sind beide excentrisch, weil die Gerade $S_1 S_2$ nicht in die Stoßlinie $N_1 N_2$ fällt.

Fig. 962.



253. Der gerade centrale Stoß bei gleichförmigen Verschiebungen freier Körper. Die beiden Kugeln der Fig. 963 a, welche sich frei bezw. auf einer vollständig glatten Ebene gleichförmig verschieben mögen, kommen unter der Voraussetzung $c_1 > c_2$ mit den Geschwindigkeiten $[c_1]$ und $[c_2]$ zu einem centralen und geraden Stoß, indem die eine (1) die andere (2) einholt (vergl. Fig. 963 b).

Fig. 963.



Von dem Augenblicke der Berührung an platten sich die beiden Kugeln an der Berührungsstelle ab, und dieser sich bildenden Formänderung entsprechen bestimmte veränderliche Spannkräfte beider Körper, deren Resultierende $[P_1]$ und $[P_2]$ stets auf der ursprünglichen Berührungsebene senkrecht stehen.

Dasselbe tritt auch für Körper von anderer Gestalt ein, z. B. für Rotationskörper, für welche BN_1 und BN_2 die Achsen sind.

Nachdem sich die Formänderung vollständig entwickelt hat, sind die beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 für einen Augenblick in relativer Ruhe zu einander (Grenzpunkt des Stoßes), weil jetzt die Spannkräfte beginnen, die Formänderung wieder auszugleichen. Bezeichnet man die gemeinsame Geschwindigkeit von S_1 und S_2 für den Augenblick ihrer relativen Ruhe zu einander durch c, so kann man in diesem Augenblick die beiden Körper von der Masse m_1 und m_2 als einen Körper von der Masse $(m_1 + m_2)$ ansehen.

Da auf das ganze System keine äußeren Kräfte wirken, so behält die Bewegungsgröße während der Bewegung stets denselben Wert (vergl. S. 695 f.).

Bei Beginn der Bewegung ist sie $m_1 c_1 + m_2 c_2$, während sie für den Grenzpunkt des Stoßes den Wert $(m_1 + m_2) c$ hat, und demnach ist

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = (m_1 + m_2) c.$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit $[c]$ für den Grenzpunkt des Stoßes als

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 549)$$

Will man den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße nicht verwenden, so kann man zu dem Werte von c auch folgendermaßen gelangen.

Solange die Körper in Berührung bleiben, ist nach dem Princip der Paarwirkung der Wert des Druckes vom Körper 1 auf Körper 2 dem Wert des Druckes von Körper 2 auf Körper 1 gleich. Bezeichnet man den augenblicklichen Druckwert durch P, so sind die entsprechenden Beschleunigungen für die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Körper gegeben als $\left[\frac{P}{m_1}\right]$ und $\left[\frac{P}{m_2}\right]$ und demnach die entsprechenden Änderungen der Geschwindigkeiten für ein Zeitelement τ als $\left[\frac{\tau P}{m_1}\right]$ und $\left[\frac{\tau P}{m_2}\right]$.

Nimmt $[P]$ während der einzelnen Zeitelemente, welche von Beginn des Stoßes bis zur Erreichung der gemeinsamen Geschwindigkeit $[c]$ verfließen, der Reihe nach die Werte $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... an, so sind die entsprechenden Werte für die Änderung der Geschwindigkeiten gegeben als

$$\frac{\tau P^{(1)} + \tau P^{(2)} + \cdots}{m_1} = \frac{\Sigma P\tau}{m_1} \quad \text{und} \quad \frac{\tau P^{(1)} + \tau P^{(2)} + \cdots}{m_2} = \frac{\Sigma P\tau}{m_2}.$$

Unter Berücksichtigung der Richtungen der Kraftwirkung für die Berührungsstelle (vergl. Fig. 963 c) gilt demnach

$$c = c_1 - \frac{\Sigma P\tau}{m_1} \quad \text{und} \quad c = c_2 + \frac{\Sigma P\tau}{m_2}$$

und daraus folgt

$$\frac{c - c_1}{c - c_2} = -\frac{m_2}{m_1},$$

woraus sich wieder der obige Wert für c ergiebt. Für $\Sigma P\tau$ findet man $m_1 (c_1 - c)$ oder $m_2 (c - c_2)$, woraus sich bei Eintragung des Wertes von c ergiebt

$$\Sigma P\tau = (c_1 - c_2) \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots \quad 550)$$

als Wert des sogenannten **Kraftantriebes** (vergl. S. 695 f.) für den ersten Teil des Stoßes.

Die Richtung des Kraftantriebes ist für den Körper 1 durch $[P_1]$ und für den Körper 2 durch $[P_2]$ in Fig. 963 c bestimmt, wobei der gemeinsame Wert $\Sigma P\tau$ nur von $(c_1 - c_2)$, d. h. also **von der relativen Bewegung** der beiden Körper abhängt.

Sind die Geschwindigkeiten für S_1 und S_2 **nach Vollendung des ganzen Stoßes** bezw. v_1 und v_2, so gilt natürlich ebenso gemäß dem Satze von der Erhaltung der Bewegungsgröße

$$1)\quad m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 551)$$

Damit ist eine Gleichung für die Bestimmung von v_1 und v_2 gegeben, und zwar ist diese abhängig von den gegebenen Größen m_1, m_2, c_1 und c_2, aber unabhängig von der Art des elastischen Verhaltens der beiden Körper.

Eine zweite Gleichung läßt sich nur mit Rücksicht auf die Gerade der Elasticität (vergl. S. 857) der beiden Körper ableiten.

a) Wären die Körper vollkommen-elastisch, so würde während des zweiten Teiles des Stoßes die ganze Formänderung wieder ausgeglichen, so daß kein Verlust V an (aktueller) Energie stattfinden könnte. Man hätte hier vor und nach dem Stoße für diese Energie denselben Wert anzusetzen, so daß sich für v_1 und v_2 eine zweite Gleichung

$$2\,a)\quad \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad 552)$$

ergäbe.

Aus 1) und 2 a) folgt zunächst $m_1 (c_1 - v_1) = m_2 (v_2 - c_2)$ und $\tfrac{1}{2} m_1 (c_1^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2} m_2 (v_2^2 - c_2^2)$, woraus durch Division eine Gleichung entsteht, welche in Verbindung mit 1) die Werte für v_1 und v_2 giebt. Man hat

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2) c_1 + 2 m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1) c_2 + 2 m_1 c_1}{m_1 + m_2}.$$

Durch Einführung der gemeinsamen Geschwindigkeit $[c]$, welche dem Grenzpunkte des Stoßes entspricht, erhält man

für
$$\left.\begin{aligned} v_1 = 2c - c_1 \quad \text{und} \quad v_2 = 2c - c_2 \\ c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 553)$$

Außerdem gilt hier $V = 0$.

Kugeln aus Glas oder aus Elfenbein lassen sich angenähert als vollkommen-elastische Körper ansehen.

b) Wären die Körper vollkommen-unelastisch, so würden vom Grenzpunkte des Stoßes an keine Spannkräfte auftreten, welche auf Ausgleich der Formänderung wirken könnten, d. h. hier würde die ganze Formänderung bestehen bleiben und die beiden Körper würden also wie ein Körper sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $[c]$ dauernd weiter bewegen.

Man hätte also hier

$$2\,b)\quad v_1 = v_2 = c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 554)$$

Da die (aktuelle) Energie vor dem Stoße $E_1 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2$ und nach dem Stoße $E_2 = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) c^2$ beträgt, so ist der auf Formänderung, Erwärmung u. s. w. verwandte Verlust V an (aktueller) Energie

$$V = E_1 - E_2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2 - \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) c^2,$$

welcher nach Einführung von c den Wert

$$V = \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 555)$$

annimmt. Hier teilt sich also die ursprünglich vorhandene (aktuelle) Energie E_1 während des Stoßes in die beiden Teile V und $E_2 = E_1 - V$, wobei V die Energie bedeutet, welche der Arbeit der Formänderung u. s. w. entspricht, während $E_2 = E_1 - V$ der bestehen bleibende Rest an (aktueller) Energie ist.

Plastische Stoffe, wie Thon, Lehm u. s. w., lassen sich angenähert als vollkommen-unelastische Körper ansehen, ebenso Holz unter gewissen Umständen.

Ist der Körper 2 in Ruhe, so hat man ($c_2 = 0$)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \\ V &= \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ E_2 &= E_1 - V = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 556)$$

In diesen Fällen ist $V \gtrless E_2$ für $m_2 \gtrless m_1$.

Soll der Rest an (aktueller) Energie (E_2) möglichst groß sein, so muß demnach $m_1 : m_2$ möglichst groß sein; deshalb muß man beim Einschlagen eines Nagels (m_2) durch einen Hammer (m_1) oder beim Eintreiben von Pfählen (m_2) durch einen Rammklotz (m_1) die Masse des stoßenden Körpers möglichst groß machen gegenüber der Masse des gestoßenen Körpers.

Soll der Verlust an (aktueller) Energie V möglichst groß sein, so muß ebenso $m_2 : m_1$ möglichst groß sein; deshalb muß man in allen Fällen, in denen man eine möglichst starke Formänderung erzielen will, wie z. B. beim Schmieden von Eisen, beim Bearbeiten der Puddelklumpen durch einen Dampfhammer, die gestoßene Masse (Amboß nebst Chabotte u. s. w.) möglichst groß nehmen gegenüber der stoßenden Masse (Hammer u. s. w.).

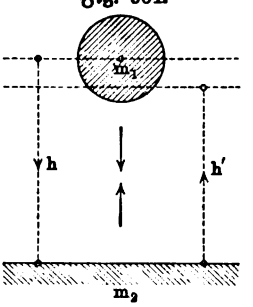
c) Die Körper der Außenwelt entsprechen bei strenger Betrachtung weder dem Ansatze a) noch dem Ansatze b), es tritt bei ihnen vielmehr stets ein auf Formänderung u. s. w. verwandter Verlust an (aktueller) Energie auf, welcher aber nur ein Bruchteil des Wertes in Gleichung Nr. 555) ist, und infolgedessen sind v_1 und v_2 weder genau durch Gleichung Nr. 553) bestimmt, noch durch Gleichung Nr. 554).

Dem ersten Teil des Stoßes entspricht bei allen Körpern der auf Formänderung u. s. w. verwandte Verlust V an (aktueller) Energie, dessen Wert Gleichung Nr. 555) bestimmt.

Während des zweiten Teiles des Stoßes wird durch die Wirkung der Spannkräfte von diesem Verluste $\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_2 - c_1)^2$ ein gewisser Teil $q \cdot \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_2 - c_1)^2$ wiedergewonnen, und zwar würde q für den Stoß vollkommen-elastischer Körper den Wert 1 und für den Stoß vollkommen-unelastischer Körper den Wert 0 haben, so daß q im allgemeinen den Grad der Elasticität für den Stoß der beiden Körper bestimmt. Natürlich hängt q ab von dem Elasticitätsgrade (vergl. S. 857) jeder der beiden Körper, wie er unter den gegebenen Beziehungen vorhanden ist, wobei unter anderem auch die Gestalt der Körper und ihre Geschwindigkeiten von Bedeutung sind.

Da die ganze Betrachtung des Stoßvorganges nicht nur für gleichförmige Verschiebungen der beiden Körper gilt, sondern für beliebige Verschiebungen, falls man dabei unter $[c_1]$ und $[c_2]$ die entsprechenden Geschwindigkeiten für den Augenblick des beginnenden Stoßes versteht (vergl. § 255), so läßt sich q mit einer gewissen Annäherung für zwei Stoffe durch Fallversuche bestimmen; man giebt dabei meist dem Körper aus dem einen Stoffe die Gestalt einer Kugel (m_1) und dem Körper aus dem anderen Stoff die Gestalt einer Platte (m_2). Läßt man die Kugel auf die horizontal befestigte Platte aus einer bestimmten Höhe h fallen (vergl. Fig. 964), so müßte diese Höhe beim Zurückprallen der Kugel wieder erreicht werden, wenn dieses einem Stoße vollkommen-elastischer Körper entspräche; thatsächlich wird nur eine gewisse Höhe h' wieder erreicht. Da die (aktuelle) Energie für den Aufschlag $(m_1 g)h$ ist und da von dieser nur der Teil $(m_1 g)h'$ wieder gewonnen wird, so ist $m_1 g(h - h')$ der thatsächlich beobachtete Verlust an Energie.

Fig. 964.



Stellt man diesen gemäß den obigen Betrachtungen als

$$\cdot\ (1 - q)\tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(c_2 - c_1)^2$$

dar, so ist $c_1 = \sqrt{2gh}$ und $c_2 = 0$, während sich $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ als $\frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$ schreiben läßt; da die Platte mit der Erde fest verbunden ist, so bildet hier Platte und Erde den zweiten Körper und infolgedessen ist $\frac{m_1}{m_2} \sim 0$.

Man hat demnach nach obiger Formel

$$(1 - q)\ .\ \tfrac{1}{2} m_1\ .\ 2gh$$

als Verlust von Energie anzusetzen, während der beobachtete Verlust $m_1 g(h - h')$ beträgt.

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke folgt

$$h - h' = (1 - q)h,$$

d. h. man hat für den Elasticitätsgrad q den Wert

$$q = \frac{h'}{h} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad 557)$$

Die Versuche zeigen, daß q abhängig ist von der relativen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ der Kugel gegen die Platte, und infolgedessen darf man die experimentell gefundenen Werte von $q = \frac{h'}{h}$ auch nur verwenden, wenn $\pm(c_1 - c_2) \sim \sqrt{2gh}$ ist; ferner ist q abhängig von der Gestalt der Körper u. s. w., während außerdem auch noch der Widerstand der Luft zu berücksichtigen wäre.

Bestehen beide Körper aus demselben Stoff, so erhält man durch die Versuche im Mittel angenähert für Elfenbein $q = 0{,}79$, für Glas $q = 0{,}88$, für Stahl $q = 0{,}31$, für Holz $q = 0{,}25$.

Ist q gegeben, so gilt für den Verlust an (aktueller) Energie allgemein

$$V = (1 - q) \cdot \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2 \quad \ldots \quad 558\,a)$$

Mit Hülfe von q lassen sich auch die Geschwindigkeiten $[v_1]$ und $[v_2]$ nach dem Stoße leicht bestimmen, da der Rest von (aktueller) Energie $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ hier bestimmt ist durch

$$2\,c) \quad \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2 - V.$$

Aus 1) und 2 c) folgt

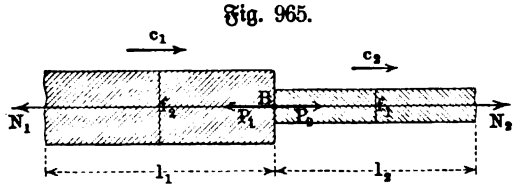
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c_1 + (c_2 - c_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{q}) \\ v_2 &= c_2 + (c_1 - c_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{q}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 558\,b)$$

Für $q = 1$ folgt aus Nr. 558 b) wieder die Nr. 553), für $q = 0$ folgt aus Nr. 558 b) wieder die Nr. 554).

Man bezeichnet $\sqrt{q}$ auch als Koeffizienten der Stoßelasticität bezw. kurz als Stoßmodul oder Stoßzahl (Stoßziffer) der beiden zum Stoße gelangenden Körper.

In welcher Weise die beiden Körper zur Bildung des Wertes von q beitragen, läßt sich nur von Fall zu Fall bestimmen.

Fig. 965.



Haben die beiden Körper die Gestalt von Kreiscylindern, deren Achsen mit BN_1 und BN_2 übereinstimmen (vgl. Fig. 965), so kann man bei Gültigkeit des Gesetzes von Hooke die Verkürzungen λ_1 und λ_2 beider Körper, falls diese die Längen l_1 und l_2 und die Querschnitte f_1 und f_2 haben, bei den Elasticitätsmoduln E_1 und E_2 als

$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{f_1 E_1} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{P l_2}{f_2 E_2}$$

ansetzen, wobei P wieder den Wert des Druckes zwischen den Körpern bezeichnet.

Die Arbeit der Formänderung ist dann (vergl. S. 865)

$$\tfrac{1}{2} P \lambda_1 + \tfrac{1}{2} P \lambda_2 = \tfrac{1}{2} P^2 \left(\frac{l_1}{f_1 E_1} + \frac{l_2}{f_2 E_2} \right)$$

oder für

$$\frac{l_1}{f_1 E_1} = K_1 \quad \text{und} \quad \frac{l_2}{f_2 E_2} = K_2$$

auch

$$\tfrac{1}{2} P^2 (K_1 + K_2).$$

Betrachtet man den Augenblick des Maximums der Formänderung, in

welchem die Schwerpunkte beider Körper die gemeinsame Geschwindigkeit [c] haben, so ist gemäß Gleichung Nr. 555)

$$\tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(c_1 - c_2)^2 = \tfrac{1}{2} P_{max}^2 (K_1 + K_2),$$

d. h. man hat als größten Wert von P gegeben

$$P_{max} = (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{K_1 + K_2}}.$$

Der Verlust an Energie für den ersten Körper entspricht der Formänderungsarbeit $\frac{1}{2} P \lambda_1 = \frac{1}{2} P^2 K_1$, während für den zweiten ebenso $\frac{1}{2} P^2 K_2$ anzusetzen ist. Werden von den Verlusten V_1 und V_2, welche bezw. für P_{max} eintreten, nachher die Teile $q_1 V_1$ und $q_2 V_2$ wieder gewonnen, so beträgt der bleibende Verlust im ganzen

$$(1 - q_1) V_1 + (1 - q_2) V_2 = \tfrac{1}{2} P_{max}^2 [(1 - q_1) K_1 + (1 - q_2) K_2]$$
$$= \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(1 - q_1) K_1 + (1 - q_2) K_2}{K_1 + K_2}.$$

Demgemäß gilt also in diesem Falle

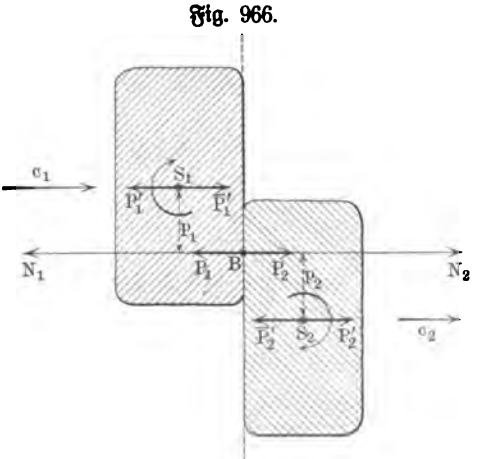
$$1 - q = \frac{(1 - q_1) K_1 + (1 - q_2) K_2}{K_1 + K_2} \quad \ldots \quad 559)$$

Haben $K_1 = \frac{l_1}{f_1 E_1}$ und $K_2 = \frac{l_2}{f_2 E_2}$ denselben Wert, so ist $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, während für $q_1 = q_2$ sich auch $q = q_1 = q_2$ ergiebt.

Es mag noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß der Verlust an Energie stets zu $(c_1 - c_2)^2$ proportional ist, also auch nur von der relativen Bewegung der Körper abhängt.

Kehrt man in sämtlichen Formeln das Vorzeichen von c_2 um, so gelten sie für Fig. 963 mit der Änderung, daß $[c_1]$ und $[c_2]$ gegeneinander gerichtet sind.

Fig. 966.



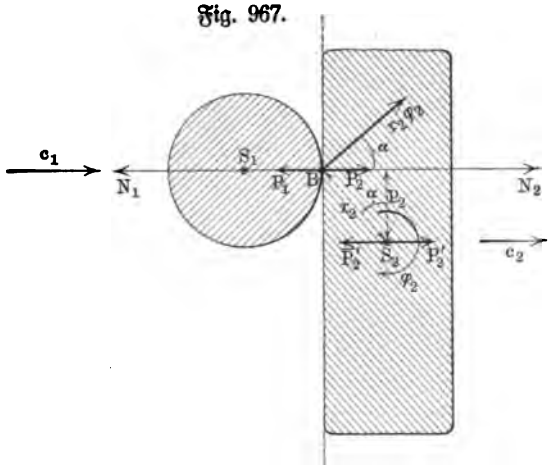
254. Der gerade excentrische Stoß bei gleichförmiger Verschiebung freier Körper. Bleiben die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen erhalten, abgesehen davon, daß die Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und S_2 mit der Stoßlinie zusammenfällt, so entsteht ein gerader excentrischer Stoß, wie ihn Fig. 966 andeutet.

Führt man, den Gegenkräften $[P_1]$ und $[P_2]$ vom Werte P der Berührungsstelle B entsprechend, in S_1 die Kräfte $[P_1']$ und $[\bar{P}_1']$ und in S_2 die Kräfte $[P_2']$ und

$[\overline{P_2'}]$ ein, welche sämtlich den Wert P haben, so sieht man, daß neben den, durch $[P_1']$ und $[P_2']$ bedingten Verschiebungen von S_1 und S_2 auch noch Drehungen um S_1 und S_2 eintreten, welche durch die Kräftepaare von den Werten Pp_1 und Pp_2 bestimmt werden.

Die Art der Drehung erfolgt gemäß § 101 bezw. gemäß § 107, wonach die Ebenen der beiden Kräftepaare senkrecht zu je einer Hauptachse der beiden Körper stehen müssen, falls eine bestimmte Drehungsachse auftreten soll.

Fig. 967.



Wir verfolgen diesen Fall noch etwas weiter, und zwar zunächst unter der Annahme, daß der Stoß nur für den einen Körper excentrisch ist, wie es Fig. 967 zeigt. Für den Grenzpunkt des Stoßes haben beide Körper in Richtung der Stoßlinie die gemeinsame Geschwindigkeit $[c]$. Für den ersten Körper gilt

$$m_1 c = m_1 c_1 - \Sigma P_1 . \tau,$$

falls $\Sigma P_1 . \tau$ den Antrieb des veränderlichen Drucks P_1 für die Zeit vom Beginn der Berührung bis zu dem betrachteten Augenblick bezeichnet, woraus $\Sigma P_1 \tau = m_1 (c_1 - c)$ folgt.

Für den zweiten Körper erwächst $[c]$ aus drei Teilen, nämlich aus $[c_2]$, aus der Verschiebungsgeschwindigkeit, welche ΣP_2 entspricht, und aus der Drehungsgeschwindigkeit, welche $\Sigma P . p_2$ entspricht.

Ist ι_2 die Winkelbeschleunigung für die Drehung um die in S_2 auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehenden Hauptachse, für welche der zweite Körper das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r_2$ haben mag, so ist in jedem Augenblick

$$\iota_2 = \frac{P_2 p_2}{\mathfrak{T}r_2}.$$

Demgemäß ist die Winkelgeschwindigkeit für S_2 in dem betrachteten Augenblick

$$\varphi_2 = \frac{p_2 \Sigma P_2 \tau}{\mathfrak{T}r_2}.$$

Dieser entspricht für B die Geschwindigkeit $[r_2 \varphi_2]$, von welcher eine Komponente vom Werte $r_2 \varphi_2 . \cos\alpha$ in die Stoßlinie fällt; da $p_2 = r_2 \cos\alpha$ ist, so hat diese Komponente den Wert $p_2 \varphi_2 = \frac{p_2^2 \Sigma P_2 \tau}{\mathfrak{T}r_2}$.

Die Verschiebungsgeschwindigkeit erwächst aus der Beschleunigung der Verschiebung $j_2 = \frac{P_2}{m_2}$ als $\frac{\Sigma P_2 \tau}{m_2}$.

Man hat also für den zweiten Körper in B

$$c = c_2 + p_2^2 \frac{\Sigma P_2 \tau}{\mathfrak{T}r_2} + \frac{\Sigma P_2 \tau}{m_2} = c_2 + \frac{p_2^2 m_2 + \mathfrak{T}r_2}{m_2 \mathfrak{T}r_2} \cdot \Sigma P_2 \tau.$$

Führt man für $\mathfrak{T}r_2$ den Trägheitshalbmesser ϱ_2 ein, so ist $\mathfrak{T}r_2 = m_2 \cdot \varrho_2^2$ und also

$$c = c_2 + \frac{p_2^2 + \varrho_2^2}{m_2 \cdot \varrho_2^2} \cdot \Sigma P_2 \tau.$$

Da $\Sigma P_1 \tau = \Sigma P_2 \tau$ ist, so gilt ferner

$$c = c_2 + \frac{p_2^2 + \varrho_2^2}{m_2 \cdot \varrho_2^2} \cdot m_1 (c_1 - c)$$

und es ist also für $\mu_2 = m_2 \cdot \dfrac{\varrho_2^2}{\varrho_2^2 + p_2^2}$

$$c = \frac{m_1 c_1 + \mu_2 c_2}{m_1 + \mu_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 560)$$

Diese Formel stimmt überein mit der Formel für c in Nr. 549), falls man dort m_2 durch die reduzierte Masse μ_2 ersetzt.

Durch c ist auch $\Sigma P_1 \tau = \Sigma P_2 \tau$ gegeben gemäß der Gleichung

$$\Sigma P_1 \tau = m_1 (c_1 - c) = \frac{m_1 \mu_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + \mu_2},$$

woraus sich

$$\varphi_2 = \frac{p_2}{\mathfrak{T}r_2} \cdot \frac{m_1 \mu_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + \mu_2}$$

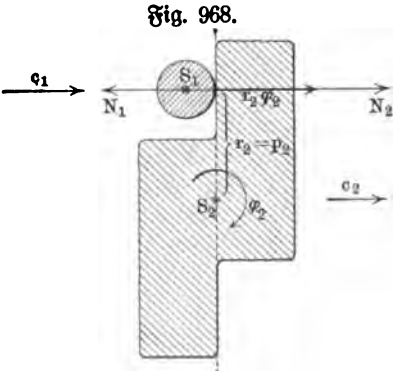
und auch die Verschiebungsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{m_2} \cdot \frac{m_1 \mu_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + \mu_2}$$

ergiebt.

Aus der ganzen Betrachtung folgt, daß nicht bloß die Formel Nr. 549) des centralen Stoßes hier erhalten bleibt, falls man m_2 durch μ_2 ersetzt, sondern daß dies auch für die übrigen oben entwickelten Formeln gilt, solange man nur die Beziehungen in der Richtung der Stoßlinie berücksichtigt, d. h. also die, dem relativen Gleiten der beiden Körper entsprechende tangentiale Geschwindigkeitskomponente vom Werte $r_2 \varphi_2 \sin \alpha$ unberücksichtigt läßt.

Fig. 968.



Bei dem Stoße, der durch Fig. 968 dargestellt wird, tritt überhaupt keine tangentiale Geschwindigkeitskomponente vom Werte $r_2 \varphi_2 \sin \alpha$ auf, da hier $\alpha = 0$ ist.

Ist der Stoß für beide Körper excentrisch, so liefert eine entsprechende Betrachtung

$$c = \frac{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 561)$$

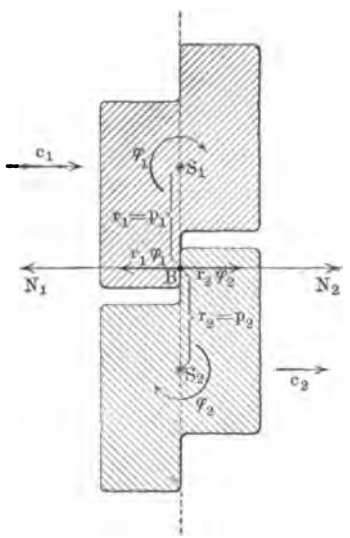
wobei

$$\mu_1 = m_1 \cdot \frac{\varrho_1^2}{\varrho_1^2 + p_1^2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = m_2 \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_2^2 + p_2^2}$$

ist.

Auch hier lassen sich alle Formeln des centralen Stoßes durch Ersatz von m_1 durch μ_1 und von m_2 durch μ_2 unmittelbar übertragen, falls man lediglich die Bewegung in Richtung der Stoßlinie berücksichtigt.

Fig. 969.



Bei dem Stoße, der durch Fig. 969 dargestellt wird, treten überhaupt keine tangentialen Geschwindigkeiten auf.

Bei der ganzen Betrachtung ist die, in Wirklichkeit nicht ganz zutreffende Voraussetzung gemacht, daß die Gestalten der beiden Körper, abgesehen von der Berührungsstelle, unverändert bleiben, daß also thatsächlich auftretende Biegungen u. s. w. nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

255. Weitere Bedeutung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Die Untersuchungen in § 253 und in § 254 bleiben auch in Geltung für beliebige Bewegungen der beiden Körper, wenn nur die gemachten Voraussetzungen unmittelbar vor dem Stoße zutreffen.

Sie gelten im besondern, wie schon bei der Besprechung der Fallversuche für die Bestimmung von q hervorgehoben wurde, auch für beliebige Verschiebungen.

Man hat in allen solchen Fällen unter $[c_1]$ und $[c_2]$ die Geschwindigkeiten zu verstehen, welche bei Beginn des Stoßes vorhanden sind.

256. Der Mittelpunkt des Stoßes. Der Fall des excentrischen Stoßes, welcher durch Fig. 968 bezw. Fig. 970 dargestellt wird, giebt noch Veranlassung zu einer wichtigen Bemerkung. Da die Drehung um S_2 die unterhalb S_2 gelegenen Punkte des Körpers 2 in Fig. 970 nach links bewegt, während die Verschiebung sie nach rechts bewegt, so beträgt die gesamte Geschwindigkeit für Punkte Q der Geraden S_2C, welche unterhalb S_2 gelegen sind, in Richtung von $[c_2]$ für $S_2Q = r$ gemäß S. 1333

$$c_2 - r\varphi_2 + \frac{\Sigma P_2 \tau}{m_2} = c_2 - r r_2 \frac{\Sigma P_2 \tau}{\Sigma r_2} + \frac{\Sigma P_2 \tau}{m_2},$$

falls $\Sigma P_2 \tau$ den Kraftantrieb bedeutet von Beginn des Stoßes an bis zu dem betrachteten Augenblick.

Diese Geschwindigkeit hat den Wert c_2 für einen Punkt M auf S_2C, für welchen gilt

$$-\frac{r r_2 \Sigma P_2 \tau}{\mathfrak{T} r_2} + \frac{\Sigma P_2 \tau}{m_2} = 0$$

oder

$$r = \frac{\mathfrak{T} r_2}{m_2 r_2}.$$

Bezeichnet man diesen Wert von r durch r_0, so bestimmt

$$S_2 M = r_0 = \frac{\mathfrak{T} r_2}{m_2 r_2}$$

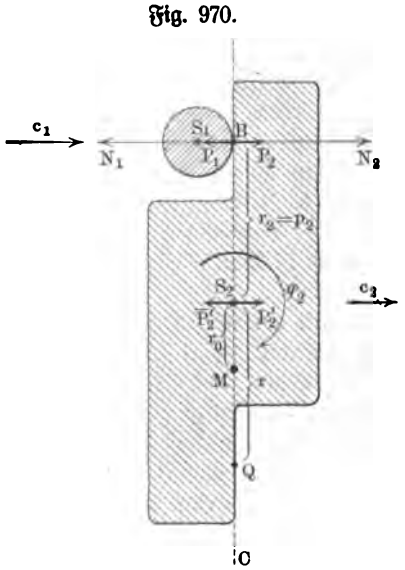
den einen Punkt M, dessen Bewegung durch den Stoß nicht geändert wird und der also im besondern für $c_2 = 0$ während des Stoßes in Ruhe bleibt.

Man hat ferner

$$BM = r_2 + r_0 = r_2 + \frac{\mathfrak{T} r_2}{m_2 r_2} = \frac{\mathfrak{T} r_2 + m_2 r_2^2}{m_2 r_2}.$$

Da $\mathfrak{T} r_2$ das Trägheitsmoment des Körpers 2 in Bezug auf die Achse durch S_2 ist, so ist $\mathfrak{T} r_2 + m_2 r_2^2$ das entsprechende Trägheitsmoment für die Parallelachse durch B, d. h. BM ist die reduzierte Länge (vergl. S. 738) für den um B pendelnden Körper 2 bezw. auch für den um M pendelnden Körper 2; wegen der Vertauschbarkeit von B und M hat man auch $BM = \frac{\mathfrak{T} r_M}{m_2 r_0}$, falls man das Trägheitsmoment für die Achse durch M mit $\mathfrak{T} r_M$ bezeichnet.

Fig. 970.



Denkt man demnach durch M, senkrecht zur Ebene der Zeichnung eine Gerade gelegt, welche für den Körper 2 eine feste Drehungsachse darstellt, so übt der Stoß auf diese Achse keinen Einfluß aus.

Man bezeichnet allgemein den Punkt B des Körpers 2, in welchem der Stoß des Körpers 1 erfolgen muß, wenn durch ihn die Achse durch M keinen Einfluß erfahren soll, als den Mittelpunkt des Stoßes in Bezug auf die Achse durch M.

Soll also ein Körper, der um eine feste Achse drehbar ist, durch Stöße bewegt werden, wie es z. B. bei den Aufwerfhämmern der Fall ist, so ist es zweckmäßig, den Mittelpunkt des Stoßes für die Aufnahme des Stoßes zu wählen, weil dann die Drehungsachse durch die wiederholten Stöße nicht beeinflußt wird und also der Zerstörung möglichst lange widersteht.

Für die Achse durch M lassen sich vorstehende Betrachtungen zusammenfassen wie folgt:

Der Stoß übt keinen Einfluß auf die Drehungsachse aus, wenn

1. die Drehungsachse (M) einer Hauptachse durch den Schwerpunkt des Körpers parallel ist und

2. die Stoßlinie in der Schwerebene liegt, welche auf der Drehungsachse senkrecht steht, und die Schwerebene, welche durch die Drehungsachse geht, unter 90^0 schneidet, und

3. der Stoßpunkt (B) von der Drehungsachse den Abstand

$$BM = \frac{\mathfrak{Tr}_M}{m_2 r_0}$$

hat, falls $\mathfrak{Tr}_M$ das Trägheitsmoment des Körpers für die Drehungsachse und r_0 den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse bezeichnet.

Da r_0 im Nenner des Ausdrucks für BM vorkommt, so darf r_0 nicht den Wert Null annehmen, d. h. die Achse darf nicht durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

Da der Einfluß der Centrifugalkräfte (vergl. S. 639 u. f.) auf die Drehungsachse nur verschwindet, wenn diese eine Hauptachse durch den Schwerpunkt ist, so wirken die im Verlaufe der Bewegung auftretenden Centrifugalkräfte stets zerstörend auf die Achse ein.

Bei der durchgeführten Betrachtung wurde von vornherein ein besonderer Fall der ganzen Anordnung angenommen, so daß noch zu untersuchen bleibt, unter welchen allgemeinen Bedingungen ein Stoß keinen Einfluß auf die Drehungsachse ausübt.

Wenn ein beliebiger Körper sich um eine feste Achse dreht, so ist das System der Effektivkräfte, falls man die Drehungsachse als Z-Achse wählt, durch die Gleichungen Nr. 107 a) und 107 b) gegeben, während die entsprechenden Reaktionen für die Achse durch Gleichung Nr. 193) u. f. bestimmt sind.

Wird ein Körper, welcher um eine feste Achse drehbar ist, durch einen Stoß aus der Ruhelage in Bewegung versetzt, so hat die Winkelgeschwindigkeit bei Beginn der Bewegung den Wert Null und infolgedessen sind auch die Centrifugalkräfte der Gleichung Nr. 195) zunächst Null, während sofort Trägheitskräfte gemäß Gleichung Nr. 196) auftreten.

Wenn die Stoßlinie, innerhalb welcher der Stoßdruck $[P]$ wirkt, die Drehungsachse, welche als Z-Achse gewählt werde, senkrecht kreuzt [1]), so kann man die X-Achse oder die Y-Achse parallel zur Stoßlinie annehmen. Stimmt die Richtung von $[P]$ mit der X-Achse überein, so kann $[P]$ von den Größen der Gleichung Nr. 196)

$$\left.\begin{aligned} X &= +\iota M\eta \\ Y &= -\iota M\xi \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} M_x &= -\iota D_y \\ M_y &= -\iota D_x \end{aligned}\right.$$

die Kraft Y und das Moment M_x nicht beeinflussen.

---

[1]) Bei anderer Lage träte eine Komponente parallel zur Drehungsachse auf, welche nicht auf Drehung wirken kann.

Sollen also bei dem Stoß obige Größen nicht zur Wirkung kommen, so muß zunächst $Y = 0$, d. h. $\xi = 0$ und $M_x = 0$, d. h. $D_y = 0$ sein.

Daraus folgt, daß der Schwerpunkt des Körpers in der YZ-Ebene liegen und daß für die XZ-Ebene das Deviationsmoment verschwinden muß.

Schneidet die Stoßlinie die YZ-Ebene in einem Punkte B, dessen Koordinaten η und ζ sind, so entspricht $[P]$ einem Kräftepaar $[P \,.\, \eta]$, welches um die Z-Achse dreht, und einer Kraft vom Werte P, welche der X-Achse parallel ist und die Z-Achse schneidet.

Da $X = +\iota M\eta$ die Z-Achse gemäß Gleichung Nr. 194) im Abstande $\varepsilon_2 = -\dfrac{D_x}{M\eta}$ schneidet, so fordert die Aufhebung von $[X]$ den Ansatz

$$\zeta = -\frac{D_x}{M\eta} \quad \text{und} \quad P = -\iota M\eta.$$

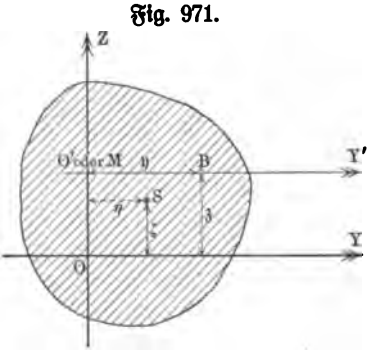
Dabei wird natürlich auch das Moment für die Y-Achse zerstört, da $P \,.\, \zeta = -\dfrac{P \,.\, D_x}{M\eta} = +\iota D_x$ mit dem Werte von M_y übereinstimmt.

Aus dem Werte von P folgt ferner, da $\iota = -\dfrac{P \,.\, \eta}{\mathfrak{T}r_\zeta}$ ist,

$$\eta = \frac{\mathfrak{T}r_\zeta}{M \,.\, \eta}.$$

Da die Lage der XY-Ebene willkürlich ist, so kann man sie so legen, daß $\zeta = 0$ ist, woraus $D_x = 0$ folgt. Da bei dieser Lage der XY-Ebene sowohl $D_y = 0$ als auch $D_x = 0$, so ist für diese Lage des Kreuzes die Z-Achse eine Hauptachse des Körpers und zugleich hat $M_y = -\iota D_x$ den Wert Null.

Fig. 971.



Bei beliebiger Lage der XY-Ebene hat man demnach, nach Umkehrung der Richtung der benutzten Z-Achse, die Koordinaten

$$\eta = \frac{\mathfrak{T}r_\zeta}{M \,.\, \eta} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{D_x}{M \,.\, \eta}$$

für Punkt B, durch den der Mittelpunkt des Stoßes hier bestimmt wird (vergl. Fig. 971).

Soll also ein ruhender Körper, welcher sich um eine feste Achse drehen kann, durch einen Stoß so bewegt werden, daß die Drehungsachse durch die Trägheitskräfte keinen Einfluß erleidet, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Gerade, innerhalb welcher der Stoß erfolgt, muß senkrecht stehen auf der Ebene, welche durch die Drehungsachse (Z-Achse der Fig. 971) und den Schwerpunkt des Körpers (S in Fig. 971) geht.

2. Bildet man aus der Ebene, welche durch die Drehungsachse und durch den Schwerpunkt S des Körpers geht ($Y'Z$-Ebene) und aus der Ebene,

welche auf der Drehungsachse senkrecht steht und durch die Gerade des Stoßes geht (XY'-Ebene), und aus der Drehungsachse selbst (Z-Achse) ein rechtwinkliges Kreuz, so muß die Drehungsachse für dessen Ursprung O' eine Hauptachse sein.

3. Der Abstand (η) zwischen der Geraden des Stoßes und der Drehungsachse hat den Wert

$$\frac{\mathfrak{T}r_\delta}{M \cdot \eta}.$$

Verschiebt man die XY'-Ebene des Kreuzes parallel zu sich selbst (vergl. die XY-Ebene der Fig. 971), so beträgt der Abstand (ζ) der Geraden des Stoßes von ihr

$$\frac{D_x}{M \cdot \eta}.$$

Da der Nenner von η die Größe η enthält, so würde η für $\eta = 0$ unendlich groß werden, d. h. für Drehungsachsen, welche durch den Schwerpunkt gehen, würde der Mittelpunkt des Stoßes ins Unendliche fallen.

Man hat also hier stets vorauszusetzen, daß die Drehungsachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Gemäß Gleichung Nr. 195) werden auch die Centrifugalkräfte, welche im weiteren Verlaufe der Bewegung auftreten, zum Teil annulliert, falls der Stoß in der oben beschriebenen Weise erfolgt.

Da für das Kreuz durch O' die Größen D_x und D_y und auch ξ den Wert Null haben, so ist $M_x = 0$, $M_y = 0$ und $X = 0$, während $Y = + \varphi^2 M\eta$ nicht verschwinden kann, weil η nicht Null ist.

Demnach bleibt für O' in Richtung der Y'-Achse stets eine Centrifugalkraft vom Werte $\varphi^2 M\eta$ in Wirkung.

Aus alledem folgt, daß es für keinen Körper eine Drehungsachse giebt, für welche bei einem Stoße sowohl die Trägheitskräfte als auch die Centrifugalkräfte ohne Einfluß auf die Achse wären.

Vergleicht man die Bedingungen auf S. 1336 mit den eben gewonnenen Bedingungen, so sieht man, daß die besonderen Eigenschaften der Fig. 970 durch die Lage des Schwerpunktes S auf BM in Fig. 970 bezw. auf BO' in Fig. 971 bestimmt sind, und daß also die allgemeinen Bedingungen für $\zeta = \xi$ in die früher für den Sonderfall gefundenen Bedingungen übergehen müssen.

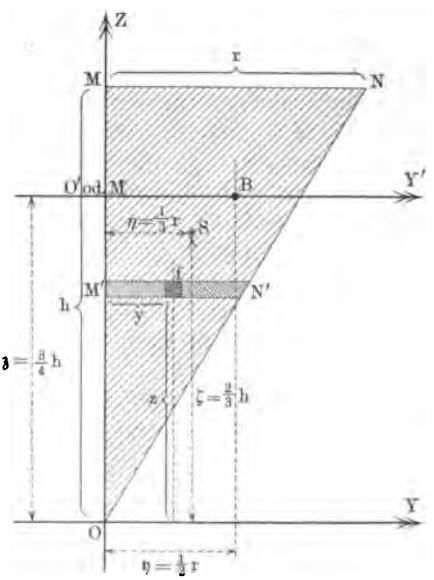
Legt man durch S ein Kreuz, dessen Achsen den bisher benutzten Achsen durch O' parallel sind, so stimmen für $\zeta = \xi$ in beiden Kreuzen die Koordinaten x und z überein, während sich die Koordinaten y um η unterscheiden. Für beide Körper hat demnach $D_y = \Sigma \mu xz$ denselben Wert, dasselbe gilt aber auch für D_x und D_z. Unterscheidet man nämlich die Koordinaten y für die Kreuze durch O' und S bezw. durch y' und $\bar{y}$, so ist $y' = \bar{y} + \eta$ und also $\Sigma \mu y'z = \Sigma \mu \bar{y} z + \eta \Sigma \mu z$ und $\Sigma \mu xy' = \Sigma \mu x\bar{y} + \eta \Sigma \mu x$, wobei $\Sigma \mu z = 0$ und $\Sigma \mu x = 0$ ist wegen der Lage des Schwerpunktes. Vergl. dazu auch S. 657 bezw. S. 668.

Haben nun D_x und D_y für das eine Kreuz den Wert Null, so haben sie auch für das andere Kreuz den Wert Null, d. h. die Z-Achsen sind für beide Kreuze Hauptachsen durch O' bezw. S, wenn eine der Z-Achsen eine solche ist. Demnach ist im Falle $\mathfrak{z} = \zeta$ die Hauptachse $O'Z$ einer Hauptachse durch S parallel, während sich außerdem O' und B wie Aufhängepunkt und Schwingungspunkt eines Pendels verhalten.

Man bezeichnet die Drehungsachse, welche dem Mittelpunkte des Stoßes entspricht, als reaktionsfreie oder auch als empfindungslose Achse.

Wir erläutern die ganze Betrachtung noch an dem Beispiel der Fig. 972; die ebene dreieckige Platte OMN ist um die Achse OZ drehbar, während ihre Symmetrieebene in der YZ-Ebene liegt.

Fig. 972.



Man hat für OZ als Achse, falls δ die Masse für die Flächeneinheit der Dreiecksfläche OMN darstellt,

$$\mathfrak{T}r_{\mathfrak{z}} = \frac{hr^3}{12} \cdot \delta = (\tfrac{1}{2} rh\delta) \cdot \frac{r^2}{6}$$

und ferner $\eta = \frac{r}{3}$; da $M = \frac{1}{2} rh\delta$ ist, so gilt also

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{T}r_{\mathfrak{z}}}{M\eta} = \frac{\frac{1}{6} r^2 \,.\, M}{\frac{1}{3} r \,.\, M} = \tfrac{1}{2} r.$$

Um $D_x = \Sigma \mu yz$ zu berechnen, betrachten wir einen Streifen $M'N'$ von der Breite $\frac{h}{n}$ im Abstande $z = p \cdot \frac{h}{n}$ von O.

Bezeichnet f ein Element des Streifens im Abstande y von M', so ist dessen Deviationsmoment $(yz) \,.\, f \,.\, \delta$ und demnach gilt für den ganzen Streifen $\Sigma (yz) \,.\, f \,.\, \delta = z\delta \Sigma yf$. Da Σyf das Massenmoment des Streifens für die Achse OZ ist, so hat es den Wert $\left(M'N' \cdot \frac{h}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} M'N'$ oder, da $M'N' = MN \cdot \frac{z}{h} = z \cdot \frac{r}{h}$ ist, auch den Wert $\frac{1}{2} \frac{r^2}{h} \cdot \frac{z^2}{n}$, und demnach gilt für den Streifen

$$z\delta \Sigma yf = \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{h} \cdot \frac{z^3}{n} \cdot \delta = \tfrac{1}{2} r^2 h^2 \cdot \frac{p^3}{n^4} \cdot \delta.$$

Setzt man die Fläche OMN aus derartigen Streifen zusammen, so erhält man

$$D_x = \tfrac{1}{2} r^2 h^2 \cdot \delta \cdot \frac{\Sigma p^3}{n^4}$$

für $p = 1, 2, \ldots n$ und $\lim n = \infty$.

Es ergiebt sich ohne weiteres dabei

$$D_x = \tfrac{1}{8} r^2 h^2 \delta = \tfrac{1}{4} rh (\tfrac{1}{2} rh\delta) = \tfrac{1}{4} rh \,.\, M.$$

Man hat also

$$\delta = \frac{D_x}{M\eta} = \frac{\frac{1}{4} rh \,.\, M}{\frac{1}{8} r \,.\, M} = \tfrac{3}{4} h.$$

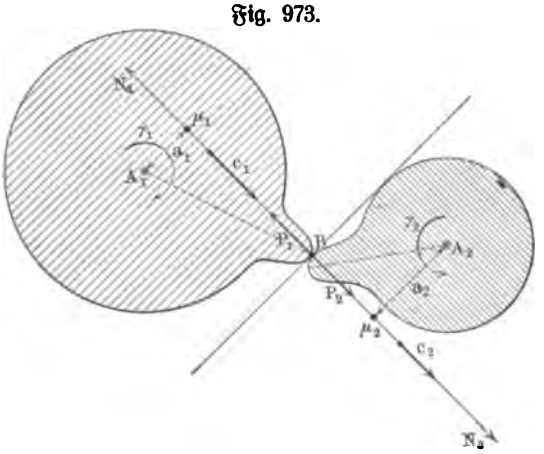
Damit ist für die Platte OMN der Fig. 972 die Lage von B gegeben, d. h. es muß hier die Stoßlinie senkrecht zur Ebene OMN liegen und durch B gehen, wobei $B = (\frac{1}{2} r; \frac{3}{4} h)$ und $S = (\frac{1}{3} r; \frac{2}{3} h)$ ist. Da die YZ-Ebene Symmetrieebene des Körpers ist, so ist $D_y = 0$ und $D_z = 0$, während außerdem für das Kreuz durch O' auch $D_x = 0$ ist; es ist also $O'Z$ eine Hauptachse durch O'.

Die ganze Betrachtung bleibt auch in Geltung, wenn umgekehrt ein sich um eine Achse drehender Körper auf einen ruhenden Körper stößt. Der Stoß muß dann in dem oben bestimmten Mittelpunkte des Stoßes des drehbaren Körpers erfolgen, wenn die Achse durch die Erschütterung möglichst wenig leiden soll. Im Mittelpunkte des Stoßes muß demnach auch das Anhalten eines schwingenden Körpers erfolgen, wenn dessen Achse dabei möglichst wenig in Anspruch genommen werden soll.

Soll ein Hammer in der Hand beim Schlage nicht prellen, so muß er im Mittelpunkte des Stoßes gefaßt werden; Entsprechendes gilt für die Einrichtung von Hammerwerken, bei denen die Daumen eines Rades den Anschlag der Hämmer besorgen.

257. Der Stoß von Körpern, welche um feste Achsen drehbar sind. Wenn in Fig. 973 die Drehungsachsen zweier Körper in A_1 und A_2 senkrecht zur Ebene der Zeichnung hindurchtreten und die Stoßlinie $N_1 N_2$ in der Ebene der Zeichnung liegt, so gilt für die Winkelbeschleunigungen ι_1 und ι_2 der beiden Körper bei einem Stoßdruck vom Werte P

Fig. 973.



$$\iota_1 = \frac{a_1 P}{\mathfrak{T} r_1}$$

und

$$\iota_2 = \frac{a_2 P}{\mathfrak{T} r_2}$$

und also für die Beschleunigungen der in B zusammenstoßenden Umfangspunkte der beiden Körper in Richtung der Stoßlinie bezw.

$$j_1 = \frac{a_1^2 P}{\mathfrak{T} r_1} \quad \text{und} \quad j_2 = \frac{a_2^2 P}{\mathfrak{T} r_2}.$$

Für $\mathfrak{T}r_1 = a_1^2\mu_1$ und $\mathfrak{T}r_2 = a_2^2\mu_2$ hat man $j_1 = P:\mu_1$ und $j_2 = P:\mu_2$, so daß man die früheren Schlüsse auch hier anwenden kann.

Man darf also die Körper ansehen als freie Körper mit den reduzierten Massen μ_1 und μ_2.

Haben die in B zusammenstoßenden Umfangspunkte der beiden Körper bei Beginn des Stoßes in Richtung der Stoßlinie die Geschwindigkeiten $[c_1]$ und $[c_2]$, so folgt ebenso wie in § 253 für die gemeinsame Geschwindigkeit $[c]$ in Richtung der Stoßlinie

$$c = \frac{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Da $c_1 = a_1\gamma_1$ und $c_2 = a_2\gamma_2$ ist, so gilt auch

$$c = \frac{a_1\gamma_1\mu_1 + a_2\gamma_2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{für} \quad \mu_1 = \frac{\mathfrak{T}r_1}{a_1^2} \quad \text{und für} \quad \mu_2 = \frac{\mathfrak{T}r_2}{a_2^2} \qquad 562)$$

Daraus folgt wieder für die Geschwindigkeiten $[v_1]$ und $[v_2]$ der Umfangspunkte in B nach dem Stoß in Richtung der Stoßlinie bezw.

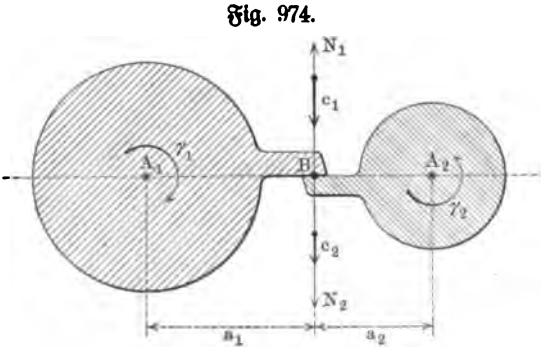
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c_1 - (c_1 - c_2)\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 + \sqrt{q}\right) \\ v_2 &= c_2 + (c_1 - c_2)\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 + \sqrt{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 563)$$

Für die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1 und φ_2 nach dem Stoße gilt demnach

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma_1 - \frac{a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2}{a_1}\,\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 + \sqrt{q}\right) \\ \varphi_2 &= \gamma_2 + \frac{a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2}{a_2}\,\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 + \sqrt{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 564)$$

Der ganze Vorgang ist so, als wenn die reduzierten Massen $\mu_1 = \frac{\mathfrak{T}r_1}{a_1^2}$ und $\mu_2 = \frac{\mathfrak{T}r_2}{a_2^2}$ auf der Stoßlinie mit den Geschwindigkeiten $c_1 = a_1\gamma_1$ und $c_2 = a_2\gamma_2$ zum Stoße kämen, falls man wieder lediglich die Geschwindigkeiten in Richtung der Stoßlinie berücksichtigt.

Fig. 974.



Auch für den Verlust an lebendiger Kraft für die Bewegung in Richtung der Stoßlinie gilt wieder die entsprechende Formel.

Bei der Anordnung der Fig. 974 stellt obige Betrachtung die Bewegung vollständig dar, weil hier für die Umfangspunkte in B die Geschwindigkeiten in die Stoßlinie fallen.

Wenn ein Körper, z. B. der erste frei beweglich ist, während der

zweite an einer Drehungsachse befestigt ist, so hat man die Reduktion der Masse nur für den zweiten durchzuführen, während für den ersten [c_1] und m_1 in den ursprünglichen Formeln stehen bleiben.

Ruht der zweite Körper ($c_2 = 0$ bezw. $\gamma_2 = 0$), so gilt in diesem Falle

$$v_1 = c_1 - c_1 \frac{\mu_2}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q})$$

$$v_2 = a_2 \varphi_2 = c_1 \frac{m_1}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q}).$$

Ruht der erste Körper ($c_1 = 0$), so ist in diesem Falle

$$v_1 = \gamma_2 a_2 \frac{\mu_2}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q})$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 - \gamma_2 \frac{m_1}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q}).$$

Die Geschwindigkeiten des ursprünglich ruhenden Körpers hängen in beiden Fällen bei gegebenen Geschwindigkeiten und bei gegebenen Werten von m_1 und $\mathfrak{Tr}_2$ noch von der Größe a_2 ab. Da im ersten Falle

$$\varphi_2 = c_1 \frac{m_1}{a_2 m_1 + a_2 \mu_2}(1 + \sqrt{q}) = c_1 \frac{m_1}{a_2 m_1 + \frac{\mathfrak{Tr}_2}{a_2}}(1 + \sqrt{q})$$

und im zweiten Falle

$$v_1 = \gamma_2 \cdot \frac{a_2 \mu_2}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q}) = \gamma_2 \frac{\mathfrak{Tr}_2}{a_2 m_1 + \frac{\mathfrak{Tr}_2}{a_2}}(1 + \sqrt{q})$$

ist, so fallen die Maxima von φ_2 und von v_1 mit dem Minimum von $a_2 m_1 + \frac{\mathfrak{Tr}_2}{a_2}$ zusammen, welches, wie leicht zu ersehen, eintritt für

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}}.$$

Für diesen Wert von a_2 hat man

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \tfrac{1}{2} c_1 \sqrt{\frac{m_1}{\mathfrak{Tr}_2}}(1 + \sqrt{q}) \\ v_1 &= \tfrac{1}{2} \gamma_2 \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}}(1 + \sqrt{q}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 565)$$

Der Stoßpunkt B, welcher zu $a_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}}$ gehört, wird Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit genannt.

Hat a_2 in Fig. 975 diesen Wert, so ist $N_1 N_2$ die Stoßlinie, in welcher jeder der beiden Körper aus der Ruhelage seine größte Geschwindigkeit erhält, wenn er von dem anderen Körper gestoßen wird.

Dabei wirken auf die Achse durch A_2 meist Trägheitskräfte, d. h. der Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit fällt im all-

gemeinen nicht mit dem Mittelpunkte des Stoßes (vergl. § 256) zusammen.

Führt man in Fig. 975 wieder das Kreuz der Fig. 971 ein, bei welchem die Drehungsachse Z-Achse ist, so ist nach Gleichung Nr. 196) für $D_x = 0$ und $D_y = 0$ und $\xi = 0$ die Reaktion in Richtung der X-Achse bei einem Stoßdruck $[P]$

$$P - \iota M\eta = P - \iota m_2 \eta$$

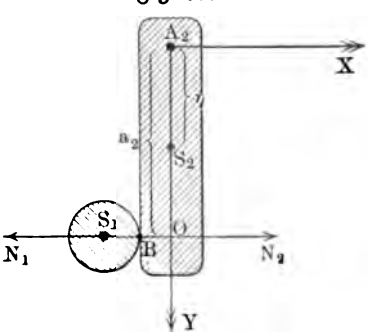
und außerdem

$$\iota = \frac{P a_2}{\mathfrak{Tr}_2}.$$

Man hat also für die Drehungsachse als Reaktion in Richtung der X-Achse

$$P\left(1 - \frac{a_2 \eta m_2}{\mathfrak{Tr}_2}\right) = P\left(1 - \frac{\eta m_2}{\sqrt{m_1 \mathfrak{Tr}_2}}\right).$$

Fig. 975.



Diese Reaktion verschwindet nur für $m_1 = \frac{\eta^2 m_2^2}{\mathfrak{Tr}_2}$, d. h. für einen bestimmten Sonderwert von m_1.

Dasselbe Ergebnis erhält man auch noch durch Gleichsetzung des Wertes von $\eta = \frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_2 \cdot \eta}$ aus § 256 und des Wertes $a_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}}$.

Bemerkt mag noch werden, daß φ_2 für den ursprünglich ruhenden zweiten Körper auf die Form gebracht werden kann

$$\varphi_2 = \frac{(c_1 m_1) a_2}{m_1 a_2^2 + \mathfrak{Tr}_2}(1 + \sqrt{q}),$$

so daß man für $q = 0$ hat

$$\varphi_2 = \frac{\text{Moment der Bewegungsgröße}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Ebenso gilt für v_1 bei dem ursprünglich ruhenden ersten Körper die Darstellung

$$v_1 = \frac{(a_2 \gamma_2) \mu_2}{m_1 + \mu_2}(1 + \sqrt{q}),$$

so daß man für $q = 0$ hat

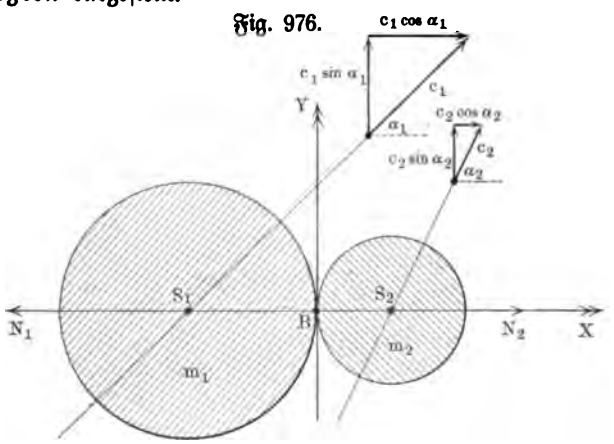
$$v_1 = \frac{\text{Bewegungsgröße}}{\text{Masse}}.$$

258. Schiefe Stöße. Nach § 252 bezeichnet man bei Verschiebungen der Körper den Stoß als schief, wenn nicht beide Richtungen der Verschiebungen mit der Stoßlinie zusammenfallen. In erweitertem Sinne pflegt man überhaupt von einem schiefen Stoße zu sprechen, so oft für wirkliche oder für reduzierte Massen nicht der Fall des in § 253 und in § 254 behandelten geraden Stoßes vorliegt, d. h. so oft irgendwelche außer-

halb der Stoßlinie gelegenen Komponenten zu berücksichtigen sind. Man kann z. B. demnach den Stoß gemäß Fig. 968 noch als gerade ansehen, muß aber den Stoß gemäß Fig. 967 als schief betrachten.

In Fig. 976 ist ein schiefer centraler Stoß für Verschiebungen zweier Kugeln dargestellt.

Fig. 976.



Bilden $[c_1]$ und $[c_2]$ mit der Richtung BN_2 der Stoßlinie bezw. die Winkel α_1 und α_2, so fallen in diese Richtung von $[c_1]$ und $[c_2]$ bezw. die Komponenten $[c_1 \cos \alpha_1]$ und $[c_2 \cos \alpha_2]$.

Für reibungslose Oberflächen darf man annehmen, daß diesen Komponenten ein gerader centraler Stoß entspricht. Man hat dann nach dem Stoße für die Geschwindigkeiten in Richtung der Stoßlinie gemäß Gleichung Nr. 558 b)

$$v_1 = c_1 \cos \alpha_1 - (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{q})$$

$$v_2 = c_2 \cos \alpha_2 + (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{q}).$$

Vereinigt man $[v_1]$ und $[v_2]$ mit den tangentialen Komponenten $[c_1 \sin \alpha_1]$ und $[c_2 \sin \alpha_2]$ zu $[V_1]$ und $[V_2]$, wie es Fig. 977 a und b zeigt, so sind die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stoße $[V_1]$ und $[V_2]$ nach Größe und Richtung gegeben.

Fig. 977 a.

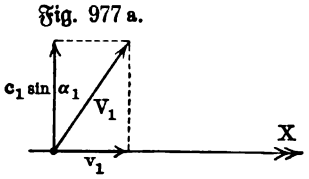
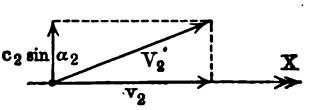


Fig. 977 b.



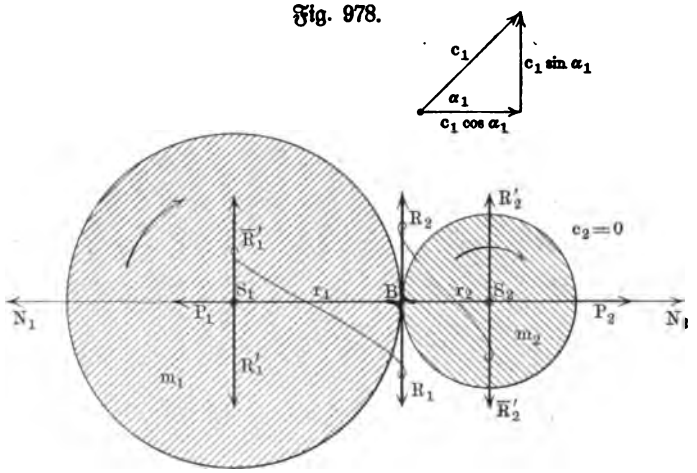
Wenn an den Oberflächen Reibung auftritt, so sind die Beziehungen wesentlich verwickelter. Wir betrachten sie für den Fall, daß $c_2 = 0$ ist, etwas genauer, gemäß Fig. 978. Bei der gegenseitigen Pressung der beiden Körper tritt Reibung vom Werte R auf und zwar für Körper 1 als $[R_1]$

in der Gegenrichtung von $[c_1 \sin \alpha_1]$ und für Körper 2 als $[R_2]$ in der Richtung von $[c_1 \sin \alpha_1]$. Infolge dieser Reibung dreht sich Körper 1 im Sinne des gezeichneten Pfeiles um S_1 und Körper 2 im Sinne des gezeichneten Pfeiles um S_2. Sind $\mathfrak{T}r_1$ und $\mathfrak{T}r_2$ bezw. die Trägheitsmomente der beiden Körper für Achsen durch S_1 und S_2, welche auf der durch $S_1 S_2$ und $[c_1]$ bestimmten Ebene senkrecht stehen, so sind die entsprechenden Winkelbeschleunigungen

$$\iota_1 = \frac{Rr_1}{\mathfrak{T}r_1} \quad \text{und} \quad \iota_2 = \frac{Rr_2}{\mathfrak{T}r_2},$$

falls man davon absieht, daß die Arme für $[R_1]$ und $[R_2]$ infolge der gegenseitigen Pressung der Körper etwas kleiner sind als r_1 und r_2.

Fig. 978.



Für einen Stoßdruck P ist bei voller Entwickelung der Reibung $R = fP$.

Bei Beginn des Stoßes ist P relativ gering und infolgedessen findet anfänglich ein Gleiten der Körper statt und demnach auch eine volle Entwickelung der Reibung. Da die Geschwindigkeit $[c_1 \sin \alpha_1]$ vom Körper 1 durch $[R_1]$ verzögert wird, während R_2 dem Körper 2 eine Geschwindigkeit erteilt, so ist es nicht unmöglich, daß beide Körper in einem bestimmten Augenblick dieselbe Geschwindigkeit in Richtung von $[c_1 \sin \alpha_1]$ erhalten, womit dann ein weiteres Auftreten der Reibung ausgeschlossen ist.

Wird der Kraftantrieb bis zu einem solchen Augenblicke durch $\Sigma P\tau$ bezeichnet, so sind die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1 und φ_2 für diesen Augenblick

$$\varphi_1 = \frac{fr_1}{\mathfrak{T}r_1} \Sigma P\tau \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{fr_2}{\mathfrak{T}r_2} \Sigma P\tau,$$

und demnach sind die Änderungen der Geschwindigkeiten von m_1 und m_2 durch die Drehungen in tangentialer Richtung als $-r_1\varphi_1$ und $r_2\varphi_2$ gegeben.

In Richtung der Stoßlinie hat $\Sigma P\tau$ bis zu dem betrachteten Augenblick für m_1 und m_2 bezw. die Geschwindigkeitsänderungen $\frac{\Sigma P\tau}{m_1}$ und $\frac{\Sigma P\tau}{m_2}$

hervorgerufen. Da m_2 anfänglich die Geschwindigkeit Null hatte, so ist ihre Geschwindigkeit u_2 in Richtung der Stoßlinie in dem betrachteten Augenblick

$$u_2 = \frac{\Sigma P\tau}{m_2},$$

woraus

$$\Sigma P\tau = m_2 u_2$$

folgt. Demnach gilt

$$\varphi_1 = \frac{fr_1}{\mathfrak{T}r_1} m_2 u_2 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{fr_2}{\mathfrak{T}r_2} m_2 u_2.$$

Bezeichnet man die entsprechende Geschwindigkeit von m_1 durch u_1, so ist ebenso

$$\Sigma P\tau = m_1 (c_1 \cos\alpha_1 - u_1)$$

und demnach gilt auch

$$\varphi_1 = \frac{fr_1}{\mathfrak{T}r_1} m_1 (c_1 \cos\alpha_1 - u_1) \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{fr_2}{\mathfrak{T}r_2} m_1 (c_1 \cos\alpha_1 - u_1).$$

Die Reibung wirkt nun, abgesehen von den Drehungen um S_1 und S_2, mit dem Antriebe $\Sigma(Pf)\tau$ in tangentialer Richtung auf m_1 verzögernd und auf m_2 beschleunigend, so daß noch für m_1 eine Geschwindigkeitsänderung $-\frac{\Sigma(Pf)\tau}{m_1}$ und für m_2 eine Geschwindigkeitsänderung $+\frac{\Sigma(Pf)\tau}{m_2}$ in tangentialer Richtung in Rechnung zu stellen ist, welche sich als

$$-\frac{fm_2u_2}{m_1} \quad \text{und} \quad +\frac{fm_2u_2}{m_2}$$

oder als

$$-\frac{fm_1(c_1\cos\alpha_1 - u_1)}{m_1} \quad \text{und} \quad +\frac{fm_1(c_1\cos\alpha_1 - u_1)}{m_2}$$

darstellen lassen, da wieder $\Sigma(fP)\tau = f\Sigma(P\tau)$ ist.

Da in dem betrachteten Augenblick die Geschwindigkeiten in B für beide Körper in tangentialer Richtung dieselben sein sollen, so gilt also bei Benutzung der Werte von φ_1, φ_2 u. s. w. für u_2

$$c_1 \sin\alpha_1 - \frac{fr_1^2 m_2 u_2}{\mathfrak{T}r_1} - \frac{fm_2u_2}{m_1} = \frac{fr_2^2 m_2 u_2}{\mathfrak{T}r_2} + \frac{fm_2u_2}{m_2},$$

woraus folgt

$$u_2 = \frac{c_1 \sin\alpha_1}{f\left(\frac{m_2 r_1^2}{\mathfrak{T}r_1} + \frac{m_2 r_2^2}{\mathfrak{T}r_2} + \frac{m_2}{m_1} + 1\right)}.$$

Reduziert man die Masse m_1 und m_2 auf die Arme p_1 und p_2, so ist $\mathfrak{T}r_1 = m_1 p_1^2$ und $\mathfrak{T}r_2 = m_2 p_2^2$ und man hat

$$u_2 = c_1 \sin\alpha_1 \cdot \frac{m_1}{f\left(m_2 \frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2} + m_1 \frac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}\right)}.$$

Daraus folgt ferner

$$u_1 = c_1 \cos\alpha_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2$$

und

$$\Sigma P\tau = u_2 m_2$$

und

$$\varphi_1 = \frac{f r_1}{\mathfrak{T}r_1} m_2 u_2 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{f r_2 m_2 u_2}{\mathfrak{T}r_2}.$$

Da von dem betrachteten Augenblick an keine Reibung mehr auftritt, so bewegen sich von diesem Augenblick an beide Körper mit der gemeinsamen Tangentialgeschwindigkeit

$$v_t = \frac{f r_2^2 m_2 u_2}{\mathfrak{T}r_2} + \frac{f m_2 u_2}{m_2} = f u_2 \frac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}$$

$$= c_1 \sin\alpha_1 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2 \dfrac{(r_1^2 + p_1^2)}{(r_2^2 + p_2^2)} \cdot \dfrac{p_2^2}{p_1^2}}$$

weiter fort.

Es handelt sich nun darum, festzustellen, ob der bezeichnete Augenblick wirklich vorhanden ist, d. h. ob während des Verlaufes des Stoßes ein solcher Augenblick thatsächlich auftritt.

Um dafür einen Anhalt zu gewinnen, wollen wir zunächst annehmen, daß der Grenzpunkt des Stoßes thatsächlich einem solchen Augenblicke entspricht.

Für den Grenzpunkt des Stoßes ist der Kraftantrieb (vergl. S. 1326)

$$\Sigma P\tau = c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

während er für den bezeichneten Augenblick durch

$$\Sigma P\tau = m_2 u_2$$

gegeben ist.

Für das Zusammenfallen gilt also

$$m_2 u_2 = c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

oder

$$tng\,\alpha_1 = f \cdot \frac{m_2 \dfrac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2} + m_1 \dfrac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}}{m_1 + m_2}.$$

Bezeichnet man den Wert der rechten Seite in vorstehender Gleichung durch h, so tritt für

$$tng\,\alpha_1 \lessgtr h$$

der berechnete Augenblick, in welchem beide Körper gleiche Tangentialgeschwindigkeiten haben, innerhalb des ersten Teiles des Stoßes thatsächlich ein; für $\alpha_1 = 0$, d. h. bei geradem Stoß, hat diese gemeinsame Geschwindigkeit den Wert Null.

Wären die Körper vollständig unelastisch, so würden sie demnach bei $tng\,\alpha_1 \lessgtr h$ nach dem Stoße in Richtung der Stoßlinie die gemeinsame Geschwindigkeit (vergl. S. 1327)

$$c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

und in tangentialer Richtung die gemeinſame Geſchwindigkeit v_t haben, woraus ohne weiteres die geſamte Geſchwindigkeit nach Größe und Richtung folgt.

Wären die Körper vollſtändig unelaſtiſch, ſo würde für ſie bei $tng\,\alpha_1 > h$ der berechnete Augenblick nicht in den erſten Teil des Stoßes fallen, es würde vielmehr die Reibung für dieſen Teil voll entwickelt bleiben. Man hat dann für den Körper 1 als tangentiale Komponente der Geſchwindigkeit

$$c_1 \sin\alpha_1 - \frac{f r_1^2 m_2 u_2}{\mathfrak{T} r_1} - \frac{f m_2 u_2}{m_1} = c_1 \sin\alpha_1 - f\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2}\cdot u_2$$

und für den Körper 2 ebenſo

$$\frac{f r_2^2 m_2 u_2}{\mathfrak{T} r_2} + \frac{f m_2 u_2}{m_2} = f\cdot\frac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}\cdot u_2,$$

wobei $m_2 u_2 = \Sigma P\tau$ iſt, $\Sigma P\tau$ aber jetzt $c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ bedeutet.

In dieſem Falle ($tng\,\alpha_1 > h$) ſind alſo neben einer gemeinſamen Geſchwindigkeit in Richtung der Stoßlinie vom Werte

$$c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

in tangentialer Richtung die Geſchwindigkeitswerte

$$c_1 \sin\alpha_1 - f c_1 \cos\alpha_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2}$$

und

$$f c_1 \cos\alpha_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\frac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}$$

für den erſten bezw. zweiten Körper anzuſetzen, woraus ſich die Geſchwindigkeiten beider Körper leicht ergeben.

Für vollkommen elaſtiſche Körper darf man annehmen, daß der zweite Teil des Stoßes ebenſo lange dauert wie der erſte. Eine gemeinſame Tangentialgeſchwindigkeit tritt demnach hier auf für

$$tng\,\alpha_1 \leqq 2h,$$

während für $tng\,\alpha_1 > 2h$ eine volle Entwickelung der Reibung während des ganzen Stoßes anzunehmen iſt, welche doppelt ſo groß iſt, als im Falle der vollſtändig unelaſtiſchen Körper.

Für die thatſächlich gegebenen Stoffe kann man daher bei einem Elaſticitätsgrade q des Stoßes für

$$tng\,\alpha_1 \leqq h(1 + \sqrt{q})$$

eine gemeinſame Tangentialgeſchwindigkeit vom Werte v_t annehmen, während bei ihnen für $tng\,\alpha_1 > h(1 + \sqrt{q})$ in tangentialer Richtung die Geſchwindigkeitswerte

$$c_1 \sin\alpha_1 - f c_1 \cos\alpha_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2}(1 + \sqrt{q})$$

und

$$f c_1 \cos\alpha_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\frac{r_2^2 + p_2^2}{p_2^2}(1 + \sqrt{q})$$

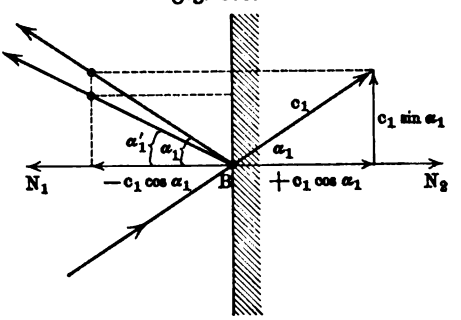
auftreten, neben den, dem geraden Stoße entsprechenden Geschwindigkeiten (vergl. S. 1344) in Richtung der Stoßlinie.

Ist der zweite Körper eine ebene feste Wand ($c_2 = 0$ und $m_2 = \infty$), so sind bei reibungsloser Berührung der Oberflächen in Richtung der Stoßlinie nach dem Stoß als Geschwindigkeiten anzusetzen (vergl. S. 1344)

$$v_1 = -c_1 \cos\alpha_1 \sqrt{q} \quad \text{und} \quad v_2 = 0,$$

während in Richtung der Wand für m_1 noch die Geschwindigkeit $c_1 \sin\alpha_1$ in Rechnung zu stellen ist.

Fig. 979.



Bei vollkommen unelastischen Körpern ($q = 0$) gleitet also m_1 nach dem Stoße an der Wand entlang, während bei vollkommen elastischen Körpern ($q = 1$) an der Wand eine Reflexion (vergl. Fig. 979) unter dem Winkel α_1' gegen die Normale BN_1 stattfindet, wobei $\alpha_1' = \alpha_1$ ist.

Bei den thatsächlich gegebenen Körpern findet gleichfalls an der Wand eine Reflexion statt, wobei aber wegen $v_1 = -c_1 \cos\alpha_1 \sqrt{q}$ und $0 < q < 1$ stets $\alpha_1' < \alpha_1$ ist.

Bei Berücksichtigung der Reibung zwischen m_1 und der festen Wand ($m_2 = \infty$) gelten die oben entwickelten Formeln für $m_2 = \infty$, es ist hier

$$h = f \cdot \frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2}$$

und es gilt also für $tng\,\alpha_1 > h(1 + \sqrt{q})$ für die Geschwindigkeit von m_1 in tangentialer Richtung

$$c_1 \sin\alpha_1 - f c_1 \cos\alpha_1 \frac{r_1^2 + p_1^2}{p_1^2}(1 + \sqrt{q}),$$

während für $tng\,\alpha_1 \leqq h(1 + \sqrt{q})$ sich $v_t = 0$ für $m_2 = \infty$ ergiebt.

Im ersten Falle findet eine Reflexion statt, für welche unter anderem auch $\alpha_1' = \alpha_1$ sein kann, weil sich hier beide Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit verkleinern.

Fig. 980.

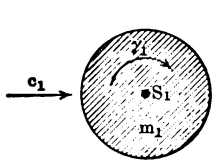


Fig. 981 a.

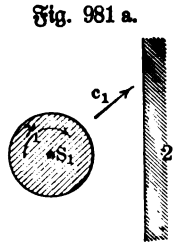
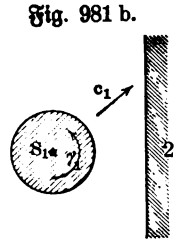


Fig. 981 b.



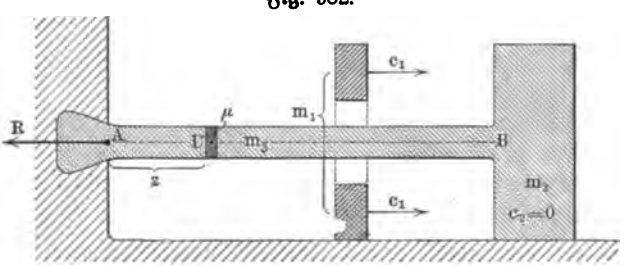
Entsprechende Betrachtungen sind auch für andere Fälle des schiefen Stoßes durchzuführen.

Einfachere Fälle, welche eine gewisse Bedeutung haben, stellen Fig. 980 (a. v. S.) und Fig. 981 a und b dar. In Fig. 980 würde ein gerader centraler Stoß eintreten, wenn nicht m_1 außer $[c_1]$ eine Winkelgeschwindigkeit $[\gamma_1]$ hätte. Fig. 981 a stellt einen schiefen Stoß gegen eine feste Wand dar, bei dem die tangentiale Geschwindigkeit von $[c_1]$ durch die zugleich vorhandene Winkelgeschwindigkeit vermindert wird, während bei Fig. 981 b entsprechend eine Vermehrung dieser Komponente auftritt.

Es hat auch keine Schwierigkeiten, die durchgeführte Untersuchung des schiefen Stoßes auf excentrische Stöße zu übertragen.

259. Beanspruchung auf Zug und Druck infolge von Stößen. Die Spannungen, welche bei der Dehnung eines Stabes in seiner Achsenrichtung durch Stöße auftreten, sind schon auf S. 870 u. f. für einen besonderen Fall angenähert berechnet worden. Wir nehmen jetzt diese Betrachtung wieder auf, um sie zu verallgemeinern. Fig. 982 stelle einen geraden prismatischen Balken dar, dessen Achse wagerecht liegt; bei A ist er in eine feste Wand

Fig. 982.



eingelassen, während er bei B einen Verstärkungskörper von der Masse m_2 trägt, welcher reibungslos auf der Unterlage ruht. Stößt nun ein, in der Mitte durchbrochener Körper von der Masse m_1, welcher ohne Reibung auf der Unterlage gleiten kann, mit der Geschwindigkeit $[c_1]$ gegen den Körper von der Masse m_2, so bewegt sich dieser zunächst unter Dehnung des Balkens AB in der Richtung AB.

Auf den Balken mit seiner Verstärkung wirkt dann einerseits der Stoßdruck $[P]$ in der Richtung AB, anderseits die Reaktion $[R]$ in der Richtung BA, während außerdem noch die Effektivkräfte seiner einzelnen Massenteilchen zu berücksichtigen sind.

Bezeichnet man die Masse eines solchen Teilchens durch μ und dessen Beschleunigung durch $[j]$, so gilt demnach für jeden Augenblick die Beziehung:

$$R + \Sigma(\mu \,.\, j) = P,$$

da die Gegenkräfte der Effektivkräfte die Richtung BA haben.

Bei einem heftigen Stoße kann $\Sigma(\mu \,.\, j)$ zunächst einen so erheblichen Wert erhalten, daß R gegen $\Sigma(\mu j)$ vernachlässigt werden darf, d. h. man darf in diesem Falle den Beginn des Stoßes als einen Stoß zweier freien Körper ansehen.

Wenn man die Masse m_3 des Balkens nicht berücksichtigt, so gilt für die gemeinsame Geschwindigkeit von m_1 und m_2 in dem Augenblick der größten Pressung nach Gleichung Nr. 549)

$$c = \frac{m_1 c_1}{m_1 + m_2}$$

und demnach beträgt die (aktuelle) Energie des Stoßes für den betrachteten Augenblick

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) c^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Von der ursprünglich vorhandenen (aktuellen) Energie vom Werte $\frac{1}{2} m_1 c_1^2$ ist also der Teil $\frac{1}{2} m_1 c_1^2 - \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ als (aktuelle) Energie verloren gegangen, um die Formänderung von m_1 und m_2 an der Stoßstelle u. s. w. zu bilden.

Auf die Ausdehnung des Balkens kann also höchstens der Rest an (aktueller) Energie verwendet werden. Da die Formänderungsarbeit des Balkens bei einem Volumen V für eine Spannung σ den Wert (vergl. S. 867)

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \cdot V$$

hat, so ist die höchste Spannung $\bar{\sigma}$, welche in dem Balken auftreten kann, gegeben durch den Ansatz

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V = \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Denkt man Fig. 982 um 90° gedreht, so daß man den Körper von der Masse m_1 als ein fallendes Gewicht auffassen kann, so wirkt außerdem noch die Senkung von m_1 und m_2 auf Formänderung des Balkens. Beträgt diese Senkung $\bar{\lambda}$, so ist also noch die Arbeit

$$(m_1 + m_2) g \,.\, \bar{\lambda}$$

in Rechnung zu stellen, d. h. man hat jetzt den Ansatz

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V = \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} + (m_1 + m_2) g \,.\, \bar{\lambda}.$$

Da bei Geltung des Gesetzes von Hooke $\bar{\sigma} = \frac{\bar{\lambda}}{l} \cdot E$ ist, so hat man unter dieser Voraussetzung zur Bestimmung von $\bar{\sigma}$ die Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V - (m_1 + m_2) g \cdot \frac{\bar{\sigma} l}{E} - \frac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0,$$

woraus

$$\bar{\sigma} = \frac{(m_1 + m_2) g \,.\, l}{V} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 g^2 l^2}{V^2} + m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{E}{V}} \qquad 566)$$

folgt.

Läßt sich m_2 gegenüber m_1 vernachlässigen, so gelangt man zurück zu der Formel auf S. 870, wenn man außerdem $m_1 g = P$ setzt und die Fall-

höhe h der Masse m_1 gemäß $c_1^2 = 2gh$ einführt. Dies stimmt damit überein, daß dort die ganze (aktuelle) Energie der stoßenden Masse in die Rechnung eingeführt und zugleich die Arbeit der Senkung der gestoßenen Masse vernachlässigt wurde.

Für einen Querschnitt f ist $V = fl$, während $\frac{(m_1 + m_2)g}{f} = \sigma$ die Spannung bezeichnet, welche die ruhende Belastung $(m_1 + m_2)g$ in der Stange AB erzeugt.

Führt man diese Werte in $\bar{\sigma}$ ein, so ergiebt sich

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \frac{m_1 c_1^2}{fl} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot E} \quad \ldots \quad 567\,a)$$

Führt man die Fallhöhe h der Masse m_1 ein gemäß $c_1^2 = 2gh$, so ist

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 2\frac{m_1 g}{f} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot E} \quad \ldots \quad 567\,b)$$

Aus den letzten beiden Ausdrücken ersieht man, daß für $c_1 = 0$ bezw. $h = 0$ oder für $m_2 = \infty$ die größte Spannung $\bar{\sigma}$ während der Belastung des Stabes durch m_1 das Doppelte der Spannung σ für die ruhende Belastung beträgt, während sonst $\bar{\sigma} > 2\sigma$ ist.

Daraus folgt die praktische Regel, daß man Körpern, welche derartigen Stößen ausgesetzt sind, möglichst große Massen (m_2) giebt.

Bisher wurde die Masse m_3 der Stange AB beim Stoße gänzlich vernachlässigt. Um m_3 zu berücksichtigen, hat man zu beachten, daß für den Augenblick der größten Pressung zwischen m_1 und m_2 das Ende B der Stange die Geschwindigkeit $[c]$ hat, während das Ende A stets in Ruhe ist. Nimmt man an, daß die Geschwindigkeit $[v]$ eines Punktes U im Abstande x von A proportional zu x ist, so ist $v = \frac{x}{l} \cdot c$.

Eine bei U gelegene Platte von der Masse μ hat dann die Bewegungsgröße $\mu \cdot \frac{x}{l} \cdot c$ und die (aktuelle) Energie $\frac{1}{2}\mu \frac{x^2}{l^2} \cdot c^2$, woraus sich durch Summation auf bekanntem Wege für die ganze Stange $\frac{1}{2}m_3 c$ als Bewegungsgröße und $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}m_3 c^2)$ als (aktuelle) Energie ergiebt.

Für $R = 0$ giebt dann der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße den Ansatz

$$m_1 c_1 = (m_1 + m_2)c + \tfrac{1}{2}m_3 c$$

und man hat also jetzt

$$c = \frac{m_1 c_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}.$$

Die (aktuelle) Energie für das System der Massen m_1, m_2 und m_3 ist nun

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)c^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}m_3 c^2) = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + \tfrac{1}{3}m_3)c^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_1(m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_3)}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3)^2}.$$

Demnach muß in der Formel Nr. 567) für $\bar{\sigma}$ bei Berücksichtigung von m_3 der Faktor $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ ersetzt werden durch $\frac{m_1 (m_1 + m_2 + \frac{1}{3} m_3)}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3)^2}$.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch, wenn AB durch Stöße gedrückt wird, was z. B. eintritt, wenn sich in Fig. 982 die Stange AB auf der rechten Seite von m_2 befindet, während der Stoß durch m_1 wieder von links aus erfolgt.

Führt man in den entwickelten Formeln für $\bar{\sigma}$ die Bruchspannung (Festigkeit) des Materials ein, so erhält man die Geschwindigkeit c_1 bezw. die Fallhöhe h, bei welcher das Material durch einen Stoß zerstört wird.

Setzt man $\bar{\sigma}$ der zulässigen Spannung k gleich, so erhält man das Maximum der Geschwindigkeit c_1 bezw. der Fallhöhe h, für welche die Konstruktion noch als sicher gelten darf.

Aus Formel 567 b) folgt z. B. für $\bar{\sigma} = k$

$$h = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{k^2 - 2k\sigma}{E \cdot \frac{m_1 g}{f}} \cdot l \quad \text{bei} \quad \sigma = \frac{(m_1 + m_2) g}{f}$$

als zulässige Fallhöhe, wobei $c_1^2 = 2gh$ ist.

Hat der Balken bei senkrechter Achse in A schon durch das Eigengewicht die Spannung σ_0, so darf $\bar{\sigma}$ natürlich nur den Wert $k - \sigma_0$ erreichen.

Die ganze Betrachtung lehrt, daß in Bezug auf Beanspruchung auf Zug und Druck durch Stöße ein Material günstig ist, bei welchem die Formänderungsarbeit für die Einheit des Volumens

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E}$$

für $\bar{\sigma} = k$ möglichst groß ist.

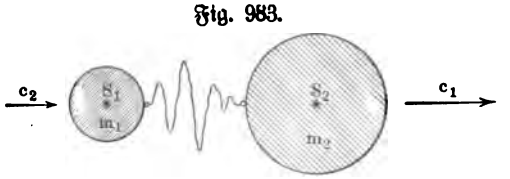
Man pflegt deshalb hier $\frac{1}{2} \frac{k^2}{E}$ als Maß für die Beurteilung der **Zuläßigkeit der Konstruktionen** einzuführen.

Erfolgt der Bruch für $\bar{\sigma} = K$, so bezeichnet

$$\tfrac{1}{2} \frac{K^2}{E}$$

die Arbeit der Formänderung, welche dem Bruche entspricht und welche deshalb hier als Maß der **Stoßfestigkeit** eingeführt werden kann. Vergl. S. 853 und S. 857.

Fig. 983.



Sind zwei Massen m_1 und m_2 gemäß Fig. 983 durch einen schlaffen Faden (Seil bezw. Kette) verbunden, so tritt für $c_1 > c_2$ ein Augenblick ein, in welchem der Faden straff gespannt wird. Von diesem Augenblick an wird der Faden bis zu einem gewissen Maximum gedehnt, worauf dann die Spannkräfte des Fadens je nach dem Grade von

dessen Elasticität wieder auf seine Verkürzung hinwirken. Dieser Vorgang der Ausdehnung und Verkürzung des Fadens entspricht genau den beim Stoße betrachteten Pressungen und Ausdehnungen.

Die gemeinsame Geschwindigkeit des Systems der Fig. 983 im Augenblick der größten Dehnung des Fadens folgt bei Vernachlässigung der Masse des Fadens wieder aus dem Ansatz

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = (m_1 + m_2)\, c.$$

Der entsprechende Verlust (vergl. S. 1327) an (aktueller) Energie ist hier auf die Formänderung (Dehnung) des Fadens verwendet worden, so daß also hier

$$\tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V$$

zu setzen ist, falls $\bar{\sigma}$ die größte Spannung des Fadens und V sein Volumen bezeichnet.

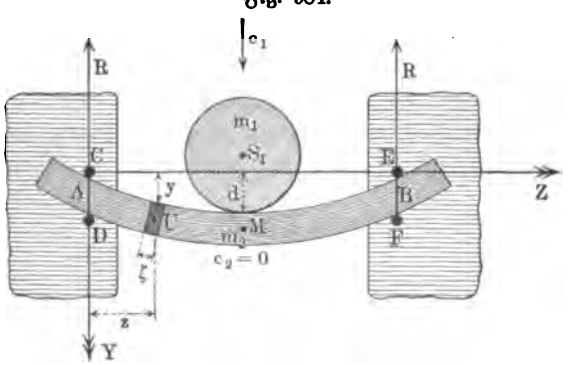
Ruht der Körper 2, so ist ($c_2 = 0$)

$$\tfrac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

260. Beanspruchung auf Schub infolge von Stößen. Eine Betrachtung, welche der im vorigen Paragraphen durchgeführten genau entspricht, zeigt, daß auch die Schubspannungen infolge von Stößen weit größer sind als die entsprechenden Spannungen bei ruhender Belastung. Statt $\frac{\sigma^2}{E}$ tritt hier natürlich $\frac{\tau^2}{G}$ als Maß der Beanspruchung ein. Vergl. S. 853 und S. 857.

261. Beanspruchung auf Biegung infolge von Stößen. Wir betrachten gemäß Fig. 984 einen geraden prismatischen Balken AB, der auf einer vollständig glatten horizontalen Unterlage ruht und dessen Verschiebung, senkrecht zur Achse, durch Pflöcke C, D, E, F gehindert ist. Wird der Balken in der Mitte M, senkrecht zu seiner Achse, durch eine Masse m_1 mit der Geschwindigkeit $[c_1]$ getroffen, so nehmen die einzelnen Punkte der Achse verschiedene Geschwindigkeiten an. Ist der Stoß sehr heftig, so wirkt er nur auf eine bestimmte Umgebung von M ein, pflanzt sich aber nicht oder nur sehr schwach bis zu den Pflöcken fort, wie die Zerstörungen durch Schüsse (z. B. Loch in einer

Fig. 984.



Fensterscheibe) zeigen; ist der Stoß sehr schwach, so entsprechen die Erscheinungen angenähert der Darstellung auf S. 948, wobei auch die Gestalt der Biegungslinie, welche dem Stoßdruck $[P]$ entspricht, angenähert durch die Biegungslinie für ruhende Belastung dargestellt wird.

Bezeichnet man die Beschleunigung eines beliebigen Punktes U in Fig. 984 durch j, so hat die Effektivkraft einer bei U gelegenen Scheibe von der Masse μ den Wert μj. Sieht man die Effektivkräfte der Scheiben, in welche man den Balken zerlegen kann, als ein System von Parallelkräften an, so treten in Richtung von $[R]$ Trägheitskräfte vom Wert $\Sigma \mu j$ auf, und man hat infolgedessen bei einem Stoßdruck $[P]$ für die Kräfte am Balken den Ansatz

$$2R + \Sigma \mu j = P.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Gegenkräfte der Bewegung auch für $R = 0$ mit $[P]$ im Gleichgewicht sein können und daß also die Befestigung des Balkens durch die Pflöcke für den Vorgang des Stoßes nicht von Bedeutung zu sein braucht. Treten, wie es bei einem heftigen Stoße (z. B. bei einem Schuß) der Fall ist, in der Umgebung von μ sofort große Werte von j auf, so ist eine Entstehung der Reaktion $[R]$ nicht erforderlich.

Haben die Durchbiegungen für die Stellen U und M in demselben Augenblick bezw. die Werte y und d, so liegt es nahe, auch das Verhältnis der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen von U und M durch $y : d$ gegeben zu denken.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich $\Sigma \mu j$ leicht durch die Beschleunigung für M darstellen, falls man die Gestalt der Biegungslinie kennt.

Macht man die Annahme, daß diese mit der Biegungslinie für ruhende Belastung übereinstimmt, so ist (vergl. S. 950) ihre Gleichung für die rechte Balkenhälfte in Bezug auf das Koordinatensystem der Fig. 984 gegeben als

$$y = d\left(1 - \frac{6z^2}{l^2} + \frac{4z^3}{l^3}\right).$$

Bezeichnet man die Beschleunigung für M durch j_0, so ist demnach

$$j = j_0\left(1 - \frac{6z^2}{l^2} + \frac{4z^3}{l^3}\right).$$

Ist f der Querschnitt des Balkens von specifischer Masse δ und ζ die Breite einer Scheibe bei U, so ist $\mu = (f \,.\, \zeta) \,.\, \delta$ und man findet für $\zeta = \frac{\frac{1}{2}l}{n}$ und $z = p \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{n}$ durch Summation in bekannter Weise für die rechte Balkenhälfte

$$\Sigma \mu j = \tfrac{5}{16} l f \delta j_0 = \tfrac{5}{16} m_2 \,.\, j_0$$

und demnach für den ganzen Balken

$$\Sigma \mu j = \tfrac{5}{8} m_2 j_0.$$

Man hat also

$$2R + \tfrac{5}{8} m_2 j_0 = P.$$

Bezeichnet man die Beschleunigung von m_1 durch j_1, so ist $P = m_1 j_1$ und es gilt demnach

$$2R + \tfrac{5}{8} m_2 j_0 = m_1 j_1.$$

Setzt man nun voraus, daß R in der aufgestellten Gleichung wieder vernachlässigt werden kann, so folgt

$$j_0 : j_1 = m_1 : \tfrac{5}{8} m_2,$$

d. h. bei M ist der Vorgang so, als wenn die freien Massen m_1 und $\frac{5}{8} m_2$ zusammenstießen.

Man hat dann für die gemeinsame Geschwindigkeit $[c]$ bei M im Augenblick der größten Pressung

$$c = \frac{m_1 c_1}{m_1 + \frac{5}{8} m_2}.$$

Für diesen Augenblick ist die Geschwindigkeit von U als

$$c\left(1 - \frac{6\varepsilon^2}{l^2} + \frac{4\varepsilon^3}{l^3}\right)$$

anzusetzen, woraus für eine bei U gelegene Scheibe

$$\tfrac{1}{2}\mu c^2 \left(1 - \frac{6\varepsilon^2}{l^2} + \frac{4\varepsilon^3}{l^3}\right)^2$$

als Wert der (aktuellen) Energie folgt.

Die Summation für den, aus Scheiben zusammengesetzten Balken liefert wieder auf bekanntem Wege

$$\tfrac{17}{70} m_2 c^2$$

als Wert der (aktuellen) Energie für den ganzen Balken.

Im Augenblick der größten Pressung ist also an aktueller Energie

$$\tfrac{1}{2}\left(m_1 + \tfrac{17}{35} m_2\right) c^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \cdot \frac{m_1 \left(m_1 + \frac{17}{35} m_2\right)}{\left(m_1 + \frac{5}{8} m_2\right)^2}$$

vorhanden.

Bei der Unsicherheit der Grundlagen der ganzen Ableitung darf $\frac{17}{35} \sim \frac{1}{2}$ und $\frac{5}{8} \sim \frac{1}{2}$ gesetzt werden, wodurch der Wert der (aktuellen) Energie in

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_2}$$

übergeht.

Von der ursprünglich vorhandenen (aktuellen) Energie $\frac{1}{2} m_1 c_1^2$ ist also der Teil $\frac{1}{2} m_1 c_1^2 - \frac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} = \frac{\frac{1}{2} m_2}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} \cdot \frac{1}{2} m_1 c_1^2$ für die Formänderung beider Körper an der Berührungsstelle verwendet worden, während der Rest für die Biegung des Balkens in Frage kommt.

Da die Formänderungsarbeit der Biegung bei einer Spannung $\bar{\sigma}$ durch (vergl. S. 1073)

$$\tfrac{1}{6} \frac{\mathfrak{Tr} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{\bar{\sigma}^2}{E}$$

bestimmt ist, so wird das Maximum von $\bar{\sigma}$, welches dem Stoße entspricht, gegeben durch

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} = \tfrac{1}{6} \frac{\mathfrak{Tr} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \quad \ldots\ldots \quad 568)$$

Für einen Balken von rechteckigem Querschnitt (b, h) ist

$$\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} = \tfrac{1}{3}(bhl) = \tfrac{1}{3} V,$$

so daß dann gilt

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} = \tfrac{1}{18} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V.$$

Betrachtet man Fig. 984 als Darstellung eines Vertikalschnittes für eine Anordnung, bei welcher die frei fallende Masse m_1 den Balken mit der Geschwindigkeit $[c_1]$ trifft, so wirkt noch die Arbeit der Senkung beider Massen auf Biegung. Hat die Senkung von M den Wert d, und faßt man den Balken als eine freie Masse vom Wert $\frac{5}{8} m_2$ auf, so ist also noch ein Glied

$$d(m_1 + \tfrac{5}{8} m_2) g \sim d(m_1 + \tfrac{1}{2} m_2) g$$

zu berücksichtigen.

Da für den Zweistützenträger bei Mittelbelastung $d = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ und $\sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w} = \frac{1}{4} Pl$ ist, so ist hier $d = \frac{1}{12} \frac{\sigma \cdot l^2}{wE}$, d. h. man hat in diesem Falle zur Bestimmung von $\bar{\sigma}$

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} + \tfrac{1}{12} \frac{\bar{\sigma} l^2}{wE} \cdot g(m_1 + \tfrac{1}{2} m_2) = \tfrac{1}{6} \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot \quad 569)$$

Bei einer Fallhöhe h ist $c_1^2 = 2gh$.

Für $\bar{\sigma} = k$ erhält man wieder die zulässigen Werte von c_1 bezw. h.

Hat der Balken vor dem Stoße infolge seines Gewichtes bezw. einer gleichmäßigen Belastung in M schon die Spannung σ_0 in M, so darf $\bar{\sigma}$ natürlich höchstens den Wert $k - \sigma_0$ annehmen.

Die ganze Betrachtung lehrt, daß in Bezug auf Beanspruchung auf Biegung durch Stöße ein Material günstig ist, bei welchem die Formänderungsarbeit für die Einheit des Volumens

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6} \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{\bar{\sigma}^2}{E}$$

für $\bar{\sigma} = k$ möglichst groß ist.

Man pflegt deshalb hier $\frac{1}{6} \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{k^2}{E}$ als Maß für die Beurteilung der Zulässigkeit der Konstruktion einzuführen.

Erfolgt der Bruch für $\bar{\sigma} = K$, so bezeichnet

$$\tfrac{1}{6} \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} \cdot \frac{K^2}{E}$$

die Arbeit der Formänderung, welche dem Bruch entspricht.

Für den rechteckigen Balken (b, h) ist

$$\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot l}{w^2} = \frac{bhl}{3} = \tfrac{1}{3} V,$$

so daß bei diesem hier für die Volumeneinheit

$$\frac{1}{18}\frac{K^2}{E}$$

als Stoßfestigkeit eingeführt werden kann.

Für den kreisförmigen Balken (r) ist

$$\frac{\mathfrak{T}r \cdot l}{w^2} = \frac{1}{4} V,$$

so daß bei diesem hier für die Volumeneinheit

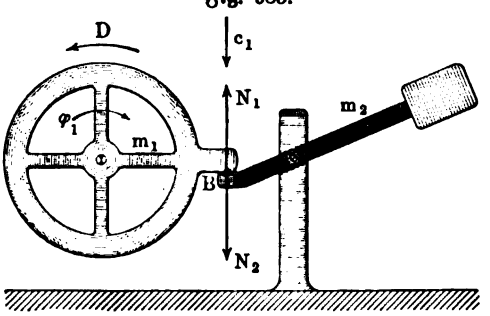
$$\frac{1}{24}\frac{K^2}{E}$$

als Stoßfestigkeit eingeführt werden kann.

Für andere Anordnungen gilt Entsprechendes wie in dem durchgeführten Fall, doch können derartige Rechnungen bei der Unsicherheit der Grundlagen für die Ansätze doch nur darauf Anspruch machen, eine leidliche Annäherung für $\bar{\sigma}$ zu geben.

262. Beanspruchung auf Verdrehung infolge von Stößen. Wenn, wie Fig. 985 andeutet, in B ein Stoß zwischen einer Radwelle und einem Hammer stattfindet, so gilt für die gemeinsame Geschwindigkeit c der im Punkte B sich berührenden Punkte beider Körper im Augenblick ihrer größten gegenseitigen Pressung

Fig. 985.



$$c = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_1 + \mu_2},$$

falls μ_1 und μ_2 die auf B reduzierten Massen beider Körper sind.

Der größte Verlust an (aktueller) Energie beträgt hier

$$\frac{1}{2}\mu_1 c_1^2 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Da dieser Verlust auf die Formänderung von Radwelle und Hammer verwandt wird, so kommt höchstens eine diesem Verlust entsprechende Torsion der Radwelle im Sinne des Pfeiles D in Frage.

Für eine cylindrische Welle ist die Arbeit der Formänderung bei einem Volumen V für eine Schubspannung τ gegeben (vergl. S. 1107) durch

$$\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{G} \cdot V.$$

Für die größte Spannung $\bar{\tau}$ hat man also hier den Ansatz

$$\frac{1}{4}\frac{\bar{\tau}^2}{G} \cdot V = \frac{1}{2}\mu_1 c_1^2 \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Ist das Rad nicht als volle Scheibe konstruiert, so wirkt das Ver-

drehungsmoment der Welle zugleich für die zwischen Kranz und Nabe befindlichen Arme auf Biegung.

Es ist dann für jeden Arm noch die Formänderungsarbeit für Biegung nach dem Ansatze

$$\tfrac{1}{6} \cdot \frac{\mathfrak{T}r \,.\, l}{w^2} \cdot \frac{\sigma^2}{E}$$

zu berücksichtigen.

Für rechteckige Arme, welche in der Richtung der Wellenachse die Breite b und senkrecht dazu die Höhe h haben, ist

$$\frac{\mathfrak{T}r \,.\, l}{w^2} = \frac{bhl}{3} = \tfrac{1}{3} v,$$

falls man das Volumen eines Armes durch v bezeichnet.

Für n Arme von rechteckigem Querschnitt ist also

$$n \,.\, \tfrac{1}{18} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot v$$

anzusetzen oder, falls man $n \,.\, v = V'$ setzt,

$$\tfrac{1}{18} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot V'.$$

Für eine cylindrische Welle und ein Rad mit rechteckigen Armen gilt also

$$\tfrac{1}{4} \frac{\bar{\tau}^2}{G} \cdot V + \tfrac{1}{18} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \cdot V' = \tfrac{1}{2} \mu_1 c_1^2 \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

falls V das Volumen der Welle und V' das gesamte Volumen der Arme bezeichnet und falls $\bar{\tau}$ die größte Schubspannung für die Verdrehung der Welle und $\bar{\sigma}$ die größte Biegungsspannung für die Biegung der Arme darstellt.

Da dasselbe Kraftmoment die Verdrehung der Welle und die Biegung der Arme bewirkt, so gilt einerseits für die (cylindrische) Welle (vergl. S. 1095) $Mo = \tau \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w}$ und anderseits für die Arme $Mo = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$, d. h. man hat

$$\tau \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{w} = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$$

oder bei den Abmessungen r und b, h

$$\tau \,.\, \tfrac{1}{2} \pi r^3 = \sigma \cdot \frac{bh^2}{6}.$$

Setzt man $b = \mu h$, so läßt sich für $\tau = t$ bezw. k_d und $\sigma = k$ bezw. k_b aus dieser Gleichung $r : h$ bestimmen.

Sind μ_1 und μ_2 gegeben und sind ferner die Länge l der Welle und die Längen l' der Arme gegeben, so führt die Arbeitsgleichung, da $V = r^2 \pi l$ und $V' = n \,.\, bhl' = n \,.\, \mu h^2 l$ ist, zu einer zweiten Gleichung zwischen r und h, so daß damit diese Abmessungen gegeben sind.

Für andere Wellenquerschnitte gilt Entsprechendes.

Hier ist die Beanspruchung im wesentlichen von der Arbeit $\frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$ für die Volumeneinheit abhängig, ebenso wie bei Zug, Druck und Biegung von dem Werte $\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$.

263. Schlußbemerkungen. Bei der Beanspruchung durch Stöße ist die Arbeit der Formänderung für die Einheit des Volumens als Maß der Beurteilung einzuführen, also bei Zug und Druck bezw. Biegung $\frac{1}{2}\frac{k^2}{E}$ und bei Schub bezw. Verdrehung $\frac{1}{2}\frac{t^2}{G}$.

Für Konstruktionen, welche Stöße auszuhalten haben, sind also nicht die Stoffe günstig, bei welchen k oder t einen relativ hohen Wert hat, sondern die, bei welchen $\frac{1}{2}\frac{k^2}{E}$ oder $\frac{1}{2}\frac{t^2}{G}$ einen relativ hohen Wert hat.

Bei Schmiedeeisen ergiebt sich z. B. für $k = 400$ Atm. und $E = 2\,000\,000$

$$\frac{1}{2}\frac{k^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{400^2}{2\,000\,000} = 0{,}040,$$

während für $t = 300$ Atm. und $G = 800\,000$

$$\frac{1}{2}\frac{t^2}{G} = \frac{1}{2}\frac{300^2}{800\,000} = 0{,}056$$

ist.

Bei Holz ergiebt sich ebenso für $k_1 = 30$ und $E = 90\,000$

$$\frac{1}{2}\frac{k_1^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{30^2}{90\,000} = 0{,}005$$

und für $k_2 = 20$ und $E = 90\,000$

$$\frac{1}{2}\frac{k_2^2}{E} = 0{,}002$$

und ferner für $t = 15$ und $G = 36\,000$

$$\frac{1}{2}\frac{t^2}{G} = 0{,}003.$$

Da die Zahlen in Atmosphären angesetzt sind, so muß das entsprechende Volumen V in Kubikcentimetern berechnet werden.

Da $\frac{1}{2}\frac{k^2}{E} \cdot V$ oder $\frac{1}{2}\frac{t^2}{G} \cdot V$ in die Formeln eingeht und da das Volumen proportional ist zu dem Preise (ε) der Volumeneinheit des Materials, so hat die Auswahl des Materials unter übrigens gleichen Umständen nach Maßgabe des Zahlenwertes von $\frac{1}{2}\frac{k^2}{E} \cdot \varepsilon$ zu geschehen.

Dritte Abteilung.

Das Princip von der Erhaltung der Energie.

264. Der Satz von der Erhaltung der Energie als Princip für die Auffassung der Bewegungen der Außenwelt. Mit dem Worte Energie wurde ursprünglich (vergl. S. 243 u. f.) ein bestimmtes Maß für die Wirkung eines bewegten Atoms eingeführt, um die Wirkung bewegter Materie darzustellen, welche man im gewöhnlichen Leben Wucht oder Anprall u. s. w. zu nennen pflegt. Bezeichnet man für Atome eines beliebigen materiellen Systems Masse und Geschwindigkeit bezw. durch μ und v, so ist die Energie des Systems durch die (stets positive) Größe

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\mu v^2$$

gegeben, welche im physikalischen Maßsystem die Dimension

$$m l^2 t^{-2}$$

und im technischen Maßsystem die Dimension

$$Kl$$

hat (vergl. S. 271).

Dabei zeigt es sich, daß die Energie eines materiellen Systems stets mit einer Größe von derselben Dimension, nämlich mit der Arbeit, in einer engen Beziehung steht, insofern bei einem materiellen Systeme die Änderung der Energie innerhalb einer bestimmten Zeit zugleich die Arbeit darstellt, welche die Kräfte des Systems inzwischen geleistet haben (vergl. S. 243 u. f., S. 252 und S. 702).

Infolgedessen kann man, wie es bei unseren Untersuchungen schon vielfach geschehen ist, stets aus Arbeitsleistungen auf Änderungen der Energie schließen, und umgekehrt.

Im besondern zeigte sich bei der Betrachtung von Stößen elastisch-fester Körper, daß die vor dem Stoße vorhandene Energie (E) sich bei diesem Vorgange in zwei Teile zerlegt, von denen der eine als Energie vorhanden bleibt, während der andere der Formänderung an der Stoßstelle entspricht.

Diese Formänderung, welche im Grenzpunkte des Stoßes am stärksten entwickelt ist, verschwindet von diesem Punkt an wieder bis zu einem gewissen Grade, wobei die Energie, welche zur Bildung dieses verschwindenden Teiles verwandt wurde, zurückgewonnen wird, während der bleibenden Formänderung ein bestimmter Verlust an Energie entspricht. Von jenem Teil der

Energie, welcher erst bei der Formänderung verbraucht worden war und dann wieder auftrat, wird man annehmen müssen, daß er auch inzwischen in irgend einer Gestalt vorhanden war, man wird ihn für die Zeit seines scheinbaren Verschwindens als potentielle Energie (vergl. S. 252 und S. 702) zu bezeichnen haben. Entsprechendes gilt auch für eine gespannte Feder, durch welche man Bewegung hervorruft, wie es z. B. bei unseren Taschenuhren der Fall ist, oder für die gespannte Sehne eines Bogens u. s. w.

Ob auch der Teil der Energie, welcher zu der Arbeit einer bleibenden Formänderuug verwandt worden ist, irgendwie als potentielle Energie weiter vorhanden ist, läßt sich zunächst nicht entscheiden. Daß es aber Fälle giebt, in welchen zu Arbeit verwandte Energie als potentielle Energie bestehen bleibt, lehren verschiedene Erscheinungen. Das einfachste Beispiel dafür bietet die Bewegung eines freien Körpers auf einer Vertikalen in der Nähe der Erdoberfläche (vergl. S. 252).

Wirft man den Körper von der Erdoberfläche aus mit einer Verschiebungsgeschwindigkeit $[v]$ senkrecht empor, so erteilt man ihm dabei die Energie $\frac{1}{2}mv^2$, falls m die Masse des Körpers bezeichnet. Wird $v = 0$, falls der Körper um die Strecke h gestiegen ist, so ist die Energie $\frac{1}{2}mv^2$ verbraucht, während dafür die Arbeit der Hebung des Körpers um die Strecke h vorliegt, welche für $G = mg$ den Wert $-Gh$ hat; da $v^2 = 2gh$ ist, so ist die Änderung der Energie $0 - \frac{1}{2}mv^2$ ebenso groß wie die Arbeitsleistung $-Gh$.

Fällt der Körper von der erreichten Höhe h frei zurück, so ist beim Aufschlagen die Arbeit $+Gh$ geleistet, während die Geschwindigkeit des Aufschlagens durch $v^2 = 2gh$ gegeben ist, d. h. man hat wieder den Ansatz $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = +Gh$.

Mit dem Aufschlagen des Körpers scheint die ihm ursprünglich mitgeteilte Energie vom Werte $\frac{1}{2}mv^2$ bezw. Gh, die beim Aufstiege verzehrt und beim Falle wiedergewonnen wurde, verloren zu sein. Hat aber der Körper einen hohen Elasticitätsgrad und schlägt er auf eine wagerechte Platte auf, welche gleichfalls einen hohen Elasticitätsgrad hat, so kehrt sich infolge der Formänderungen, welche dem Stoße des Aufschlagens entsprechen, die Richtung der Geschwindigkeit um, während ihr Wert nahezu unverändert bleibt, d. h. es stellt sich nahezu der ursprünglich betrachtete Zustand wieder ein. Könnte man bei dem Versuche vollständig elastische Körper verwenden und den Einfluß des Luftwiderstandes beseitigen, so würde der Körper sich fortwährend auf und ab bewegen, d. h. Schwingungen vollführen, die bis zu einem gewissen Grade mit einer halben Pendelschwingung zu vergleichen wären.

Man schließt daraus, daß die Energie beim Aufschlagen auch dann nicht verloren geht, wenn ein weiteres Aufsteigen nicht erfolgt, daß sie vielmehr von dem Körper, dem sie erteilt wurde, auf andere Körper, auf die umgebende Luft und die Stelle der Erdoberfläche, an der das Aufschlagen erfolgt u. s. w., übergegangen ist. Anderseits lehrt dieses einfache Beispiel, daß der Körper beim Aufschlagen auch die Energie $\frac{1}{2}mv^2$ zeigen kann, wenn man ihm gar keine Geschwindigkeit erteilt, sondern ihn auf irgend eine Weise um

die Strecke $h = \frac{v^2}{2g}$ hebt, ihn dann zur Ruhe kommen und schließlich frei fallen läßt, wobei man nur die Arbeit der Hebung $-Gh$ durch eine Arbeit $+Gh$ überwindet, d. h. also von außen die Arbeit Gh vom Werte $\frac{1}{2}mv^2$ zuführt.

Da im letzten Falle infolge der von außen zugeführten Arbeit Gh beim freien Falle des Körpers Energie vom Werte $\frac{1}{2}mv^2 = Gh$ auftritt, so pflegt man dem, um die Strecke h gehobenen Körper im Verein mit der Erde die Fähigkeit zuzuschreiben, Energie vom Werte $\frac{1}{2}mv^2 = Gh$ zu entwickeln, wofür man auch kurz sagt, der Körper habe die potentielle Energie vom Werte $\frac{1}{2}mv^2 = Gh$. Ist der Körper bei seiner aufwärts gerichteten Bewegung um die Strecke p gestiegen bezw. bei seiner abwärts gerichteten Bewegung um die Strecke $(h-p)$ gefallen, so hat er die Energie $\frac{1}{2}mv_p^2$, wobei $v_p^2 = 2g(h-p)$ ist, d. h. seine Energie zeigt dann gegen die Energie des Aufschlagens den Unterschied $\frac{1}{2}m(v^2 - v_p^2) = Gp$. Dieser Wert bezeichnet sowohl die Arbeit, welche der Körper beim Aufstieg um p bereits geleistet hat, als auch die Energie, welche er nach dem Fallen um $(h-p)$ noch entwickeln kann, d. h. die potentielle Energie für die betrachtete Stelle.

Für eine beliebige Stelle der Bahn, welche von der Erdoberfläche den Abstand p hat, gilt also (vergl. S. 252)

$$\tfrac{1}{2}mv_p^2 + Gp = Gh,$$

d. h. in jedem Augenblick hat die Summe aus der vorhandenen Energie $(\frac{1}{2}mv_p^2)$ und aus der potentiellen Energie (Gp) einen konstanten Wert (Gh), und zwar nimmt die potentielle Energie des Körpers immer wieder denselben Wert an, so oft der Körper eine bestimmte Stellung (p) zur Erdoberfläche hat, ist also unabhängig von der Zeit.

Bezeichnet man für einen bestimmten Augenblick die Energie durch E und die potentielle Energie durch U, so gilt also für das betrachtete, aus Körper und Erde bestehende System in jedem Zeitpunkte die Gleichung

$$E + U = C,$$

d. h. die Summe aus Energie (E) und aus potentieller Energie (U) ist in jedem Augenblick eine Konstante (C), und zwar nehmen E und U stets denselben Wert an, so oft die Teile des Systems dieselbe relative Lage zu einander haben.

Wenn man die Gleichung $E + U = C$ des betrachteten Beispiels für zwei verschiedene Zeitpunkte ansetzt, so erhält man die Bedingung ihrer allgemeinen Gültigkeit. Bezeichnen nämlich t und $\bar{t}$ zwei Zeitpunkte, denen bezw. die Gleichungen $E + U = C$ und $\overline{E} + \overline{U} = C$ entsprechen, so gilt $\overline{E} - E = -(\overline{U} - U)$ oder, da die Änderung der Energie $\overline{E} - E$ stets der inzwischen geleisteten Arbeit A gleich ist, auch $A = -(\overline{U} - U)$.

Daraus folgt umgekehrt die Bedingung: Wenn sich die Arbeit A, welche der Änderung der Energie $\overline{E} - E$ eines materiellen Systemes für die beliebig ausgewählte Zeit $t \ldots \bar{t}$ gleich ist, in der Form $-(\overline{U} - U)$ dar-

stellen läßt, und wenn dabei U und $\overline{U}$ durch die relativen Lagen der materiellen Punkte des Systems zur Zeit t und zur Zeit $\bar{t}$ eindeutig bestimmt sind, so gilt die Gleichung (vergl. S. 252, 280, 702)

$$E + U = C$$

und zwar nehmen E und U stets dieselben Werte an, so oft die materiellen Punkte des Systems eine bestimmte relative Lage haben.

Dabei läßt sich der Begriff der potentiellen Energie, welcher zunächst in Bezug auf das Beispiel des vorigen Paragraphen eingeführt wurde, folgendermaßen allgemein bestimmen:

Wenn sich in einem materiellen System, für welches die betrachtete Gleichung $E + U = C$ gilt, höchstens die aktuelle Energie C entwickeln kann, während für eine bestimmte relative Lage seiner materiellen Punkte nur ein Teil E von C entwickelt ist, so bezeichnet man $U = C - E$ als die potentielle Energie des Systems für jene relative Lage.

Man bezeichnet den Inhalt der Gleichung $E + U = C$ unter der für U gemachten Annahme als den Satz von der Erhaltung der Energie.

Dabei wird die Energie E, welche wirklich vorhanden ist, im Gegensatz zu der potentiellen Energie U, welche auch Energie der Lage oder Spannungsenergie heißt, auch als aktuelle Energie oder als Bewegungsenergie (kinetische Energie) oder auch als lebendige Kraft bezeichnet, während man C die gesamte Energie des Systems nennt.

Der Satz sagt aus, daß die gesamte Energie eines materiellen Systems, welche in einem Zeitpunkte den Wert C hat, unverändert bleibt, vorausgesetzt, daß dem System nicht von außen Energie zugeführt oder entzogen wird, und daß dann die Zerlegung der Energie C in einen aktuellen Teil E und in einen potentiellen Teil U durch die relative Lage der materiellen Punkte des Systems eindeutig bestimmt ist.

Macht man in Übereinstimmung mit der Erfahrung die Annahme, daß dieser Satz für die materiellen Systeme, welche uns unsere Außenwelt darbietet, durchweg in Geltung ist, so führt man ihn damit ein als „Princip“ (vergl. S. 6) der Erhaltung der Energie.

265. Die Deutung der potentiellen Energie auf Grund einer kinetischen Theorie der Körper. Während es keine besonderen Schwierigkeiten macht, sich den Übergang aktueller Energie von bewegten materiellen Punkten auf andere materielle Punkte anschaulich vorzustellen, weil jeder Schlag oder Stoß, der eine Bewegung einleitet, diesen Vorgang zeigt, bietet die Umsetzung von aktueller Energie in potentielle Energie und umgekehrt, wie sie an dem Beispiele des auf einer Vertikalen steigenden und fallenden Körpers erläutert wurde, einem anschaulichen Verständnisse erhebliche Schwierigkeiten. Man hat diese Schwierigkeiten dadurch zu heben gesucht, daß man auch die potentielle Energie als eine Art aktueller Energie auffaßt, so daß es sich dann bei dem Übergange von potentieller Energie in aktuelle Energie und umgekehrt im Grunde auch nur um Übertragungen aktueller Energie handeln würde. Man muß dabei die potentielle Energie auf Bewegungen zurückführen, welche sich

jedenfalls zunächst den Wahrnehmungen entziehen, also etwa auf Bewegungen von Atomen der materiellen Körper oder auf Bewegungen hypothetischer Stoffe anderer Art (Äther u. s. w.).

Um eine solche Aufgabe in Angriff zu nehmen, hat man zunächst alle die Fälle zusammenzustellen, in welchen aktuelle Energie auftritt oder verschwindet, ohne daß sich dabei wahrnehmbare aktuelle Energie als Zufluß oder Abfluß nachweisen läßt.

Für eine solche Zusammenstellung kommen im wesentlichen in Frage:

1. Die potentielle Energie der Nerven und Muskeln bezw. entsprechender Organe belebter Wesen.
2. Die potentielle Energie schwerer Massen für eine bestimmte Falltiefe (h).
3. Die potentielle Energie deformierter elastisch-fester Körper.
4. Die potentielle Energie gespannter Gase (und Dämpfe).
5. Die potentielle Energie im Gebiet der Wärmeerscheinungen.
6. Die potentielle Energie im Gebiet der Lichterscheinungen und der elektro-magnetischen Vorgänge.
7. Die potentielle Energie der chemischen Prozesse.

Ob diese vorläufige Einteilung bei einer durchgeführten Darstellung der verschiedenen potentiellen Energieen als Arten der aktuellen Energie erhalten bleibt oder ob eine andere Zusammenfassung geboten erscheint, kann natürlich erst nach Lösung der fraglichen Aufgaben entschieden werden.

Für die Lösung dieser Aufgabe ist die sogenannte kinetische Theorie der Gase (und Dämpfe) von besonderer Bedeutung. Durch sie gelingt es zunächst, die potentielle Energie gespannter Gase und Dämpfe in ziemlich befriedigender Weise auf die aktuelle Energie ihrer Atome zurückzuführen. Außerdem führen diese Betrachtungen aber zugleich dazu, die Deutung der potentiellen Energie im ganzen Gebiet der Wärmeerscheinungen wenigstens bis zu einem Grade zu ermöglichen, wobei dann wieder, in Bezug auf andere Gebiete (chemische Vorgänge, Lichterscheinungen und elektro-magnetische Vorgänge) weitere Aufschlüsse gewonnen werden.

Allen diesen Betrachtungen liegt die Thatsache zu Grunde, daß man sich eine Kraft (vergl. S. 101 u. 102) sowohl als periodisch als auch als stetig wirksam denken darf, falls man nur dabei im ersten Falle die Annahme macht, daß in jede endliche, noch so kleine Zeit ihrer Wirksamkeit unendlich viele Perioden derselben fallen.

Eine konstante Kraft läßt sich demgemäß im besondern durch eine unendliche Reihe gleichmäßig aufeinander folgender, unter sich völlig gleicher Stöße von unendlich-kleiner Dauer auffassen.

Bei dieser Auffassung muß eine konstante Kraft auch einer Reihe solcher Stöße das Gleichgewicht halten können.

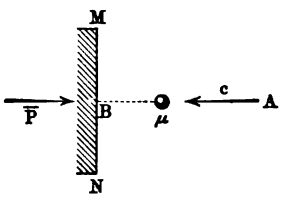
Wenn eine Kugel von der Masse μ mit der Geschwindigkeit $[c]$ senkrecht gegen eine ruhende Platte MN stößt, so springt die Kugel bei Voraussetzung vollkommen elastischer Stoffe mit einer Geschwindigkeit $[\bar{c}]$ senkrecht zurück (vergl. Fig. 986 a. f. S.).

Im Grenzpunkte des Stoßes hat die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper den Wert Null, so daß also die Platte im ersten Teile des Stoßes die Bewegungsgröße $[\mu c]$ der Kugel in der Richtung AB aufhebt bezw. eine Bewegungsgröße $[\mu \bar{c}]$ in der Richtung BA entwickelt, um im zweiten Teile des Stoßes der Kugel eine Bewegungsgröße $[\mu \bar{c}]$ von der Richtung BA mitzuteilen. Der Änderung der Bewegungsgröße entsprechend, ist also für den Kraftantrieb anzusetzen

$$\Sigma P\tau = 2\mu c,$$

wie auch aus den Formeln des § 253 hervorgeht.

Fig. 986.



Ist t die Dauer des ganzen Stoßes, so bestimmt die Gleichung

$$\bar{P} \,.\, t = \Sigma P\tau$$

ein Mittelwert $\bar{P}$ des Stoßdruckes, und zwar gilt

$$\bar{P} = \frac{2\mu c}{t}.$$

Reihen sich nun n Stöße, welche dem betrachteten völlig gleich sind, innerhalb der Zeit T unmittelbar aneinander, so ist $T = n \,.\, t$ und man hat auch

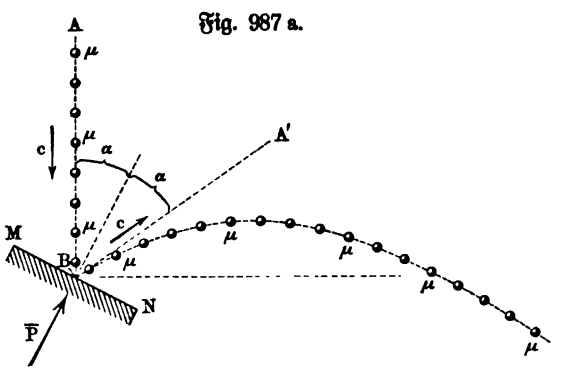
$$\bar{P} = n \cdot \frac{2\mu c}{T}$$

oder für $n \,.\, \mu = m$ auch

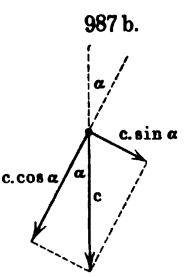
$$\bar{P} = \frac{2mc}{T}.$$

Ist die Dauer t eines Stoßes unendlich-klein, so muß n für einen endlichen Wert von T unendlich-groß sein und daraus folgt weiter, daß auch μ unendlich-klein sein muß, falls m einen endlichen Wert haben soll.

Fig. 987 a.



987 b.



Je kleiner t ist, um so rascher erfolgen die Schwankungen von P, welches thatsächlich in jeder Periode (t) vom Werte Null über einen Maximalwert zum Werte Null symmetrisch steigt und fällt, und um so eher kann der veränderliche Wert von P durch den konstanten Mittelwert $\bar{P}$ ersetzt gedacht werden.

Um die ganze Betrachtung durch einen Versuch zu veranschaulichen, kann man etwa, wie Fig. 987 zeigt, Kugeln von gleicher Beschaffenheit (μ) von

demselben Punkte A nach B auf die geneigte Platte MN frei fallen lassen. Unter Voraussetzung eines reibungslosen Stoßes hat dabei die Komponente $[c \sin\alpha]$ von $[c]$, welche in die Richtung MN fällt, keinen Einfluß auf die Beanspruchung der Platte, während der Stoß selbst der Geschwindigkeit $c \cdot \cos\alpha = \sqrt{2gh} \cdot \cos\alpha$ entspricht für $AB = h$. Hier ist also für eine Reihe von n Kugeln, deren jede die Masse μ hat, bei einer Gesamtdauer T des Vorganges

$$\bar{P} = \frac{n \cdot 2\mu\sqrt{2gh}\cos\alpha}{T}.$$

Verwendet man nun statt der ruhenden Platte eine Platte MN, welche mit einer Federwage (Dynamometer) fest verbunden ist, so muß deren Zeiger während der ganzen Reihe der Stöße nahezu auf derselben Stelle bleiben und dabei nahezu die berechnete Belastung $\bar{P}$ anzeigen, und zwar um so genauer, je genauer die Bedingungen der Entwickelung verwirklicht werden können.

E. Fenzl hat thatsächlich auf diesem Wege die Richtigkeit der ganzen Betrachtung experimentell veranschaulicht, allerdings unter Verwendung einer Hebelwage statt einer Federwage, und ist dabei zu einer recht guten Übereinstimmung zwischen Berechnung und Versuch gelangt [1]).

Man kann nun die ganze Betrachtung auch dazu verwenden, um den Druck eines Gases auf die umschließenden Gefäßwandungen auf Stöße der materiellen Punkte, welche das Gas bilden, zurückzuführen.

Alle unsere Erfahrungen weisen darauf hin, daß eine Gasmenge sich unbegrenzt zerstreuen würde, wenn sie allein im Raum vorhanden wäre. Dieser Erfahrung gemäß nimmt man an, daß bei einem Gase die Bewegungen, welche einer gegenseitigen Anziehung seiner materiellen Punkte entsprechen, und etwaige Drehbewegungen gegenüber den fortschreitenden Bewegungen, welche diese Punkte relativ zu einander zeigen, zurücktreten. Setzt man nun ferner voraus, daß diese materiellen Punkte vollkommen-elastische Kugeln sind und daß auch ihr Stoß an einer Wandung als vollkommen-elastisch angesehen werden darf, so gilt für den mittleren Druck $\bar{P}$ des senkrechten Stoßes eines Gasteilchens von der Masse μ bei einer Geschwindigkeit vom Werte c wieder die Beziehung

$$\Sigma P\tau = 2\mu c.$$

Wenn das Gefäß, welches das Gas abschließt, ein hohler Würfel von der Kante a ist, so kann man durch Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigen, daß die wirklichen Bewegungen der Gasteilchen, abgesehen von Drehungen, die bei ihrem Zusammenstoße entstehen, u. s. w. ersetzt werden können durch die folgenden Bewegungen: Zwischen je zwei parallelen Flächen des Würfels geht, senkrecht zu ihnen, je ein Drittel der vorhandenen Gasteilchen mit konstanter Geschwindigkeit c hin und her.

Da bei diesen Bewegungen die Strecke a von jedem Gasteilchen in der

[1]) Vergl. Fenzl, Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr., Berlin 1902, S. 141. Vergl. auch ebenda die Abhandlung von O. Reichel, 1891, S. 290.

Zeit $\frac{a}{c}$ durchlaufen wird, so gelangt ein solches Teilchen stets nach Ablauf der Zeit $\frac{a}{c}$ zum Stoße, und zwar im Wechsel mit der einen und mit der anderen der entsprechenden parallelen Flächen.

Eine Wand des Würfels wird also immer nach Ablauf der Zeit $\frac{2a}{c}$ von demselben Gasteilchen getroffen, so daß demnach auf diese Zeit nur ein Stoß des Teilchens zu rechnen ist. Da der Kraftantrieb $\Sigma P\tau = 2\mu c$ hier auf die Zeit $t = \frac{2a}{c}$ gleichmäßig zu verteilen ist, so hat man für den Mittelwert $\overline{P}$ des Stoßdruckes gemäß dem Ansatze

$$\overline{P} \,.\, t = \Sigma P\tau$$

den Wert

$$\overline{P} = \frac{\mu c^2}{a}.$$

Ist n die Anzahl der Gasteilchen, welche in dem Würfel enthalten sind, so kommt für die benutzte Wand ein Drittel derselben zur Wirkung, so daß der mittlere Stoßdruck der ganzen Gasmasse m für die Wand den Wert

$$\frac{n}{3} \cdot \frac{\mu c^2}{a} = \tfrac{1}{3}\frac{mc^2}{a}$$

hat.

Da sich dieser Druck auf eine Fläche von der Größe a^2 verteilt, so ist die entsprechende Spannung p gegeben als

$$p = \tfrac{1}{3}\frac{mc^2}{a} : a^2 = \tfrac{1}{3}\frac{mc^2}{a^3}.$$

Führt man noch das Volumen v der Gasmasse ($v = a^3$) ein, so gilt also für die Spannung der Wandung

$$p = \tfrac{1}{3}\frac{mc^2}{v} = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}mc^2\right) \cdot \frac{1}{v}.$$

Da nun für Flüssigkeiten und Gase, falls deren Gewicht und andere entsprechende Kräfte nicht in Frage kommen, im Gegensatz zu festen Körpern die Spannung in jedem Punkte der Masse denselben Wert hat, so bezeichnet p überhaupt die Spannung des Gases.

Damit ist auch die aktuelle Energie $\frac{1}{2}mc^2$ der Gasmasse bei Vernachlässigung der aktuellen Energie von Drehbewegungen u. s. w. bestimmt, und zwar hat man

$$\tfrac{1}{2}mc^2 = \tfrac{3}{2}pv.$$

Bezeichnet man das Verhältnis der berechneten Energie $(\frac{1}{2}mc^2)$ zu der ganzen vorhandenen Energie E durch λ, so gilt ferner

$$E = \tfrac{3}{2}(pv) \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Der Ausdruck pv erinnert an das Boyle-Mariottesche Gesetz, welches für Gase innerhalb gewisser Grenzen gilt, solange deren Temperatur unver-

änderlich ist, und welches infolgedessen auch als das isothermische Gesetz für Gase bezeichnet wird.

Dieses Gesetz sagt aus, daß für eine bestimmte Gasmenge (z. B. für 1 kg) das Produkt aus Spannung (p) und Volumen (v) eine Konstante ist, solange sich die Temperatur des Gases nicht ändert.

Die Abhängigkeit des Volumens einer bestimmten Gasmenge von ihrer Temperatur (t) stellt innerhalb gewisser Grenzen das Gesetz von Gay-Lussac dar, solange die Spannung der Gasmenge unveränderlich ist. Der Ausdruck dieses isobarischen Gesetzes ist

$$v_t = v_0(1 + \alpha t),$$

und zwar bezeichnet dabei v_t das Volumen bei t^0 C. und demnach v_0 das Volumen bei 0^0 C., während α der sogenannte Ausdehnungskoeffizient der Gase ist, welcher für alle Gase angenähert den Zahlenwert $\frac{1}{273}$ hat.

Haben für eine bestimmte Gasmenge (z. B. für 1 kg) Spannung, Volumen und Temperatur in einem bestimmten Zeitpunkte (I) die Werte

$$\text{I)}\quad p_1,\quad v_1,\quad t_1,$$

während sie in einem anderen bestimmten Zeitpunkte (II) die Werte

$$\text{II)}\quad p_2,\quad v_2,\quad t_2$$

haben, so kann man sich die Gasmenge unter anderem aus dem ersten Zustand in den zweiten durch Einschaltung eines Zwischenzustandes (Z) übergeführt denken, für welchen obige Größen die Werte

$$Z)\quad p_2,\quad v,\quad t_1\quad .$$

haben.

Für den Übergang von I zu Z, den man thatsächlich ausführen kann, wenn man die Spannung des Gases unter Erhaltung seiner Temperatur (t_1) von p_1 in p_2 verändert, wobei sein Volumen von v_1 in v übergeht, gilt im allgemeinen das Gesetz von Boyle-Mariotte, d. h. man hat

$$1)\quad p_1 v_1 = p_2 v.$$

Für den Übergang von Z zu II, den man thatsächlich ausführen kann, wenn man die Temperatur des Gases unter Erhaltung seiner Spannung (p_2) von t_1 in t_2 verändert, wobei sein Volumen von v in v_2 übergeht, gilt im allgemeinen das Gesetz von Gay-Lussac, d. h. man hat

$$v = v_0(1 + \alpha t_1) \quad \text{und} \quad v_2 = v_0(1 + \alpha t_2)$$

oder auch

$$2)\quad \frac{v}{v_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen 1) und 2) entsteht

$$3)\quad \frac{p_1 v_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2 v_2}{1 + \alpha t_2}.$$

Da $\alpha = \frac{1}{273}$ ist, so ist es zweckmäßig, auf beiden Seiten der Gleichung 3) die Nenner durch α zu dividieren, wobei man für $\frac{1}{\alpha} = 273$ erhält

$$4) \quad \frac{p_1 v_1}{273 + t_1} = \frac{p_2 v_2}{273 + t_2}.$$

Aus Gleichung 4) folgt, daß für eine bestimmte Gasmenge (z. B. 1 kg) der Ausdruck

$$\frac{pv}{273 + t}$$

in zwei beliebigen Zeitpunkten denselben Wert hat, d. h. dieser Ausdruck ist eine Konstante, welche durch R bezeichnet werden mag. Bezeichnet man noch $273 + t$ durch T, so gilt also

$$5) \quad \frac{pv}{T} = R.$$

Man bezeichnet Gleichung 5), welche die Vereinigung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes und des Gesetzes von Gay-Lussac darstellt, als die Zustandsgleichung der Gase. Sie sagt aus, daß die drei Größen v, p und $T = 273 + t$, durch welche der augenblickliche Zustand eines Gases bestimmt wird, nicht voneinander unabhängig sind, daß vielmehr stets pv zu T proportional ist.

Die Größe $T = 273 + t$ nennt man im Gegensatz zu der Temperatur t die absolute Temperatur; sie entspricht einer Skala, deren Grade mit den Graden der Einteilung nach Celsius übereinstimmen, während ihr Nullpunkt bei -273^0 C. liegt.

Würde das Gesetz von Gay-Lussac auch noch für $t = -273^0$ gelten, so würde die Gleichung $v_t = v_0(1 + \alpha t)$ für $t = -273^0$ ein Volumen vom Werte Null anzeigen, d. h. bei 273^0 Kälte nach der Skala von Celsius (Nullpunkt für die absolute Temperatur) müßte dann das Volumen jedes Gases verschwinden.

Die Konstante R läßt sich für eine bestimmte Menge eines bestimmten Gases leicht aus irgend drei zusammengehörigen Werten von v, p, T berechnen.

Da ein Kubikmeter (reiner) Luft erfahrungsmäßig bei 0^0 C. und einem Barometerstande von 760 mm ein Gewicht von 1,2932 kg hat, so hat 1 kg Luft unter diesen Bedingungen das Volumen $\frac{1}{1{,}2932}$ cbm; da das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0^0 für Wasser von 4^0 C. als Einheit den Wert 13,596 hat, so ist die Spannung der Luft bei 0^0 C. $13{,}596 . 76 . 1 = 1033{,}3$ für 1 qcm in Gramm oder 10 333 für 1 qm in Kilogramm. Für den betrachteten Zustand der Luft ist also $T = 273$, $v = \frac{1}{1{,}2932}$ und $p = 10\,333$ zu setzen, woraus sich für (reine) Luft (bei 1 kg als Einheit) ergiebt

$$R = \frac{10\,333}{1{,}2932 . 273} = 29{,}27 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 570)$$

Ist δ die Dichtigkeit eines anderen Gases bei 0^0 C. und einem Barometerstand von 760 mm, bezogen auf Luft in dem gleichen Zustande, so ist für dieses (bei 1 kg als Einheit)

$$v = \frac{1}{1{,}2932} \cdot \frac{1}{\delta}$$

und demnach

$$R = \frac{29{,}27}{\delta}.$$

Führt man den Wert von pv, den die Zustandsgleichung liefert, in die oben entwickelten Formeln für die Energie ein, so erhält man (für 1 kg als Einheit) für die Energie der fortschreitenden Bewegungen innerhalb der Gasmenge

$$\tfrac{1}{2} m c^2 = \tfrac{3}{2} R \,.\, T,$$

wobei $m = \frac{1\,\text{kg}}{g}$ ist. Daraus folgt für die mittlere Geschwindigkeit der materiellen Punkte eines Gases

$$c = \sqrt{3 g R \,.\, T} = \sqrt{3 \,.\, 29{,}27 \,.\, g \cdot \frac{T}{\delta}} = 29{,}35 \sqrt{\frac{T}{\delta}}$$

für eine Dichtigkeit δ und eine Temperatur T, falls $g = 9{,}81$ gesetzt wird.

Für $\delta = 1$ und $T = 273^0$ ergiebt sich $c = 485 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, d. h. die fortschreitende Geschwindigkeit der Luftteilchen beträgt bei 0^0 C. im Mittel $485 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Für Sauerstoff bezw. Stickstoff ergiebt sich ebenso $c = 461$ bezw. $c = 492$, für Wasserstoff $c = 1844$.

Für die gesamte Energie der Gasmenge ergiebt sich ferner

$$E = \tfrac{3}{2} R \cdot \frac{T}{\lambda}.$$

Während die Energie der fortschreitenden Bewegungen innerhalb der Gasmasse der absoluten Temperatur T proportional ist, ist deren gesamte Energie proportional zu $\frac{T}{\lambda}$.

Die Größe λ, welche eine Funktion von p, v, T sein kann, wobei aber natürlich $pv = RT$ ist, läßt sich zunächst nicht bestimmen.

Da die Energie der fortschreitenden Bewegungen innerhalb der Gasmenge stets der absoluten Temperatur proportional ist, so steigert die Zufuhr von Wärme diesen Teil der Energie gemäß einem sehr einfachen Gesetze, und es liegt nahe, zu vermuten, daß auch die gesamte Energie durch die Zufuhr von Wärme nach einem bestimmten Gesetz gesteigert wird, welches natürlich erst durch die Bestimmung von λ gegeben wird.

Die Auffassung von der Spannung eines Gases, von der wir ausgingen, drängt demnach dazu, der Wärme eine gewisse potentielle Energie zuzuschreiben, welche bei der Erwärmung eines Gases in dieses als aktuelle Energie übergeht.

Man hat sich demnach in dem Rahmen dieser ganzen Betrachtung die Wärme als eine Art von Bewegungen vorzustellen, welche unter anderem

dadurch gekennzeichnet ist, daß solche Bewegungen in unserem eigenen Körper zugleich mit den bekannten Wärmeempfindungen auftreten.

Diese Auffassung der Wärme wird nun durch eine Reihe von Erfahrungen gerechtfertigt, welche von den Voraussetzungen unserer Betrachtung durchaus unabhängig sind.

Zu diesen Erfahrungen gehört vor allem die Beobachtung, daß ein scheinbarer Verlust an aktueller Energie, wie er bei Reibungen auftritt, stets mit einer gelegentlich sehr starken Erwärmung der sich reibenden Teile verbunden ist. Ferner ist für das Gebiet der Gase noch besonders auf die Thatsache hinzuweisen, daß eine mechanische Pressung eines Gases im allgemeinen mit einer Steigerung seiner Temperatur (z. B. beim pneumatischen Feuerzeug) und daß eine mechanische Ausdehnung eines Gases im allgemeinen mit einem Sinken seiner Temperatur (z. B. bei gewissen Kältemaschinen) verbunden ist u. s. w.

Derartige Erfahrungen haben es nahegelegt, die Wärme thatsächlich als eine Art der Bewegung aufzufassen und im besonderen eine rechnerische Darstellung für die bei der Erwärmung übertragene Energie zu suchen (mechanische Theorie der Wärme).

Um den Vorgang der Erwärmung der verschiedenen Stoffe meßbar zu machen, pflegt man die Erwärmung von (reinem) Wasser der Vergleichung zu Grunde zu legen. Die Leistung, welche in der Erwärmung von 1 kg Wasser von 0° C. auf 1° C. vorliegt, wird eine Kalorie genannt; sind s Kal. für die entsprechende Erwärmung von 1 kg eines anderen Stoffes erforderlich, so heißt s die specifische Wärme des betreffenden Stoffes.

Die Versuche zeigen, daß die Erwärmung um 1° C. an einer beliebigen Stelle der Temperaturskala innerhalb gewisser Grenzen der Erwärmung von 0° C. auf 1° C. gleichwertig ist, so daß also im allgemeinen eine Erwärmung von 1 kg Wasser um t° C. t Kal. und eine Erwärmung von 1 kg eines anderen Stoffes st Kal. entspricht.

Bei den Gasen zeigt es sich ferner, daß der Erhöhung ihrer Temperatur von 0° C. auf 1° C. eine größere specifische Wärme entspricht, wenn dabei die Spannung des Gases unverändert bleibt, als wenn dabei das Volumen des Gases konstant gehalten wird; man hat demnach hier die specifische Wärme für konstante Spannung s_p von der specifischen Wärme für konstantes Volumen s_v zu unterscheiden.

Man kann s_p durch Versuche unmittelbar bestimmen, während außerdem das Verhältnis $\varkappa = \frac{s_p}{s_v}$ unter anderem durch die, gleichfalls durch Versuche bestimmte Schallgeschwindigkeit, für welche der Ausdruck $\sqrt{\varkappa g R T}$ gilt, mittelbar gegeben ist, so daß man damit auch s_v mittelbar erhält; die Versuche zeigen, daß $\varkappa$ für alle einfachen Gase und die entsprechenden Gemenge innerhalb gewisser Temperaturgrenzen angenähert denselben Wert 1,41 hat.

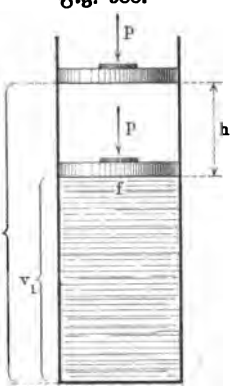
Nimmt man nun in Übereinstimmung mit der Erfahrung an, daß die Leistung, welche in der Erwärmung vorliegt, eine Arbeitsleistung im Sinne der Mechanik darstellt, so muß es eine konstante Zahl W

geben, welche das Verhältnis von 1 mkg Arbeit zu 1 Kal. darstellt; durch Multiplikation mit W gehen dann die Kalorien in Arbeitseinheiten über, während die Arbeitseinheiten durch Multiplikation mit $A = \frac{1}{W}$ in Kalorien umgerechnet werden.

Man nennt W das mechanische Äquivalent der Wärme (Arbeitswert der Wärmeeinheit) und $A = \frac{1}{W}$ das thermische Äquivalent der Arbeit (Wärmewert der Arbeitseinheit).

Bei den Gasen hat man die größere mechanische Arbeit $W \cdot s_p$ für Erwärmung bei konstanter Spannung von der kleineren mechanischen Arbeit $W \cdot s_v$ für Erwärmung bei konstantem Volumen zu unterscheiden. Da erstere mit einer mechanischen Arbeit (positive oder negative Ausdehnung des Gases unter bestimmter Spannung) verbunden ist, letztere aber nicht, so entspricht der Überschuß $W(s_p - s_v)$ für den ersten Fall der dabei außerdem geleisteten mechanischen Arbeit. Richtet man nun bei einem Gase einen Versuch so ein, daß man die mechanische Arbeit, welche dem Überschuß $W(s_p - s_v)$ entspricht, anderweitig messen kann, so erhält man den Zahlenwert von W.

Fig. 988.



Am einfachsten führt der durch Fig. 988 dargestellte Versuch zur Bestimmung von W, bei welchem eine Gasmenge vom Volumen v_1 und der Temperatur T_1 durch einen beweglichen Kolben unter der Spannung p abgesperrt ist. Bei der Erwärmung auf die Temperatur T_2 dehnt sich das Volumen unter Erhaltung der Spannung p um $v_2 - v_1$. Da dabei bei einer Kolbenfläche f der Druck $f \cdot p$ auf der Strecke h überwunden wird, so liegt eine Arbeitsleistung vom Werte $(f \cdot p)h = p(fh) = p(v_2 - v_1)$ vor. Der Zustand des Gases ist bei Beginn des Versuches durch

$$\text{I)} \quad v_1, \quad p, \quad T_1$$

und bei Vollendung des Versuches durch

$$\text{II)} \quad v_2, \quad p, \quad T_2$$

bestimmt, so daß nach der Zustandsgleichung für I bezw. II

$$v_1 p = R T_1 \quad \text{und} \quad v_2 p = R T_2$$

gilt, woraus

$$p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1)$$

folgt.

Die Arbeitsleistung $p(v_2 - v_1)$ hat also den Wert

$$R(T_2 - T_1).$$

Da diese Arbeitsleistung anderseits für Erwärmung um 1^0 C. durch $W(s_p - s_v)$ gegeben ist, so beträgt sie für $T_2 - T_1$

$$W(s_p - s_v)(T_2 - T_1).$$

Aus der Vergleichung beider Werte folgt unmittelbar

$$W = \frac{R}{s_p - s_v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 571\,a)$$

Da für (reine) Luft $s_p = 0{,}237\,51$ und $s_v = 0{,}168\,44$ und $R = 29{,}272$ ist, so ist

$$W = 423{,}80\,\text{mkg} \sim 424\,\text{mkg} \ldots\ldots\ldots 571\,b)$$

d. h. man hat die Kalorien angenähert mit 424 zu multiplizieren, um sie in Meterkilogramm auszudrücken, während man umgekehrt die Arbeitseinheiten mit $A = \frac{1}{424}$ zu multiplizieren hat, um sie in Kalorien umzurechnen.

Im Anschluß an den, in Fig. 988 dargestellten Versuch, ist es nun auch möglich, die oben eingeführte Größe λ und damit die gesamte Energie eines Gases zu berechnen.

Da für die gesamte Energie der Ansatz gilt

$$E = \tfrac{3}{2} R \cdot \frac{T}{\lambda},$$

so beträgt der Unterschied an (aktueller) Energie für die Zustände I und II

$$\tfrac{3}{2} R \left(\frac{T_2}{\lambda_2} - \frac{T_1}{\lambda_1}\right),$$

falls man durch λ_1 und λ_2 die Werte von λ für diese Zustände bezeichnet. Da außerdem beim Übergange von I in II die mechanische Arbeit $R(T_2 - T_1)$ geleistet ist, so beträgt die gesamte Arbeitsleistung für den Übergang von I in II

$$\tfrac{3}{2} R \left(\frac{T_2}{\lambda_2} - \frac{T_1}{\lambda_1}\right) + R(T_2 - T_1).$$

Da diese Arbeitsleistung anderseits als eine Erwärmung bei konstanter Spannung um $T_2 - T_1$ erscheint, so ist sie auch darstellbar als

$$W \,.\, s_p (T_2 - T_1) = R \cdot \frac{s_p}{s_p - s_v} (T_2 - T_1).$$

Durch Vergleichung der beiden Werte folgt unmittelbar

$$\tfrac{3}{2} \left(\frac{T_2}{\lambda_2} - \frac{T_1}{\lambda_1}\right) = \left(\frac{s_p}{s_p - s_v} - 1\right)(T_2 - T_1) = \frac{s_v}{s_p - s_v} (T_2 - T_1)$$

und ferner

$$T_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \tfrac{2}{3} \frac{s_v}{s_p - s_v}\right) = T_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \tfrac{2}{3} \frac{s_v}{s_p - s_v}\right),$$

d. h. man hat

$$T \left(\frac{1}{\lambda} - \tfrac{2}{3} \frac{s_v}{s_p - s_v}\right) = K,$$

wobei K eine bestimmte Konstante bezeichnet.

Daraus folgt

$$\frac{T}{\lambda} = K + \tfrac{2}{3} \frac{s_v}{s_p - s_v} \cdot T$$

und ebenso

$$E = \tfrac{3}{2} R \left(K + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{s_v}{s_p - s_v} \cdot T \right).$$

Wenn die Entwickelungen noch für $T = 0$ gültig wären, so würde das Volumen des Gases nach dem Gesetze von Gay-Lussac bezw. nach der Zustandsgleichung für $T = 0$ den Wert Null annehmen, so daß dann auch für $T = 0$ die Energie den Wert Null haben müßte. Gemäß der eben entwickelten Formel ist $E = \frac{3}{2} R \,.\, K$ für $T = 0$, woraus $K = 0$ folgt, d. h. man hat im Rahmen der ganzen Auffassung $K = 0$ zu setzen. Demnach ergiebt sich endgültig

$$E = \frac{s_v}{s_p - s_v} \cdot R \,.\, T \quad \ldots\ldots\ldots 572\,\text{a})$$

für die gesamte Energie der betrachteten Gasmenge (1 kg), während die Größe λ durch

$$\lambda = \tfrac{3}{2} \frac{s_p - s_v}{s_v} \quad \ldots\ldots\ldots 572\,\text{b})$$

gegeben ist, also eine Konstante ist.

Demnach ist nicht nur die (aktuelle) Energie der fortschreitenden Bewegung, sondern auch die gesamte Energie der Gasmenge der absoluten Temperatur T proportional.

Führt man $\varkappa = \frac{s_p}{s_v} = 1{,}41$ ein, so ergiebt sich

$$E = \frac{R}{\varkappa - 1} \cdot T \sim \tfrac{5}{2} R \,.\, T \quad \text{und} \quad \lambda = \tfrac{3}{2}(\varkappa - 1) = 0{,}615 \sim \tfrac{3}{5}.$$

Die Energie $E = 5(\frac{1}{2} RT)$ zerfällt also bei allen einfachen Gasen ($\varkappa = 1{,}41$) und den entsprechenden Gemengen angenähert in die Teile $E_1 = 3(\frac{1}{2} RT)$ für die fortschreitenden und $E_2 = 2(\frac{1}{2} R \,.\, T)$ für die anderen Bewegungen der materiellen Punkte des Gases, so daß $E_2 = RT$ und $E_1 : E_2 = 3 : 2$ ist.

Für $R = \frac{29{,}272}{\delta}$ ergiebt sich noch (1 kg als Einheit)

$$E = 29{,}272 \cdot \frac{T}{\delta(\varkappa - 1)} \sim 73 \cdot \frac{T}{\delta} \quad \ldots\ldots 573)$$

und zwar bezeichnet dabei δ die Dichtigkeit des Gases bei 0° C. und bei einem Barometerstande von 760 mm.

In Bezug auf die weitere Verwendung der entwickelten Formeln und in Bezug auf die Begrenzung ihrer Gültigkeit muß auf die betreffenden Abschnitte des zweiten Bandes verwiesen werden, wo auch im besondern das Verhalten des Wasserdampfes (bei Sättigung und Überhitzung) genauer behandelt wird. Hier sollte nur der Weg gekennzeichnet werden, auf dem für gewisse Fälle die Deutung potentieller Energie als aktueller Energie in befriedigender Weise gelingt.

Um der kinetischen Theorie der Gase eine kinetische Theorie der tropfbaren Flüssigkeiten und der festen Körper zur Seite zu stellen, wobei natürlich zugleich beachtet werden muß, daß die Wärme als eine Art von Bewegungen aufzufassen ist, hat man folgende Annahmen gemacht.

In einem festen Körper schwingen bestimmte Atomgruppen, welche als Moleküle bezeichnet werden, um bestimmte Gleichgewichtslagen, während außerdem noch relative Bewegungen der Atome innerhalb ihrer Moleküle zu beachten sind.

In einer tropfbaren Flüssigkeit finden auch Schwingungen von Molekülen um Gleichgewichtslagen statt, aber diese Gleichgewichtslagen wechseln mit der Zeit, so daß auch stets fortschreitende Bewegungen der Moleküle zu beachten sind.

Der Übergang eines festen Körpers in eine tropfbare Flüssigkeit und der Übergang einer solchen in Dampf bezw. in Gas durch Erwärmung erklärt sich innerhalb dieser Anschauung dadurch, daß die Zufuhr von Energie den stabilen Zustand eines festen Körpers mehr und mehr stört, bis schließlich bei der Verdampfung die mitgeteilten Geschwindigkeiten so groß geworden sind, daß die gegenseitige Anziehung der Moleküle, auf welcher die Stabilität des festen Körpers beruht, nicht mehr von nennenswertem Einflusse ist. Gelegentlich hat man auch versucht, die ganze Theorie noch dadurch auszugestalten, daß man neben den Atomen und Atomgruppen der materiellen Stoffe noch Atome und Atomgruppen anderer, dazwischen gelagerter Stoffe (Äther u. s. w.) eingeführt hat, hauptsächlich in der Erwartung, damit auch die potentielle Energie von schweren Massen für eine bestimmte Falltiefe und auch die potentielle Energie im Gebiete der elektromagnetischen Erscheinungen (bezw. überhaupt bei sogenannten Fernkräften) deuten zu können.

Während alle diese Versuche bisher zu keinem sicheren Ergebnis geführt haben, ist es anderseits gelungen, die Auffassung der mechanischen Theorie der Wärme auch für die chemischen Prozesse, zunächst für die Verbrennungserscheinungen, einschließlich der Explosionen, mit Nutzen zu verwenden.

Im besondern gilt dies auch für die chemischen Vorgänge, welche sich in den Körpern belebter Wesen abspielen und welche zu der potentiellen Energie der Nerven und Muskeln bezw. entsprechender Organe in enger Beziehung stehen.

Dabei ist es zweckmäßig, sich daran zu erinnern, daß die oft erstrebte mechanische bezw. kinetische Theorie aller Naturerscheinungen, für welche die mechanische bezw. kinetische Theorie der Wärmeerscheinungen ein befriedigendes Beispiel der Durchführung ist, ursprünglich durch die Arbeiten eines Arztes (R. Mayer) als greifbare Aufgabe hingestellt wurde, und daß dieser seine grundlegenden Schlüsse zunächst an physiologischen Vorgängen machte.

Als Schiffsarzt hatte R. Mayer[1]) während einer hunderttägigen Seereise bei einer Besatzung von 28 Mann keinen erheblichen Krankheitsfall zu verzeichnen gehabt, wenige Tage aber nach der Ankunft auf der Reede von Batavia trat unter dem Schiffsvolk eine akute (katarrhalisch-entzündliche) Affektion der Lungen auf. Bei den Aderlässen, welche R. Mayer an-

[1]) Vergl. die Mechanik der Wärme, Stuttgart 1874, S. 100 u. f. Die betreffende Abhandlung Mayers stammt aus dem Jahre 1845, seine erste diesbezügliche Veröffentlichung aus dem Jahre 1842.

wandte, zeigte das Blut der Venen die hellrote arterielle Färbung statt der gewöhnlichen dunkeln, was nur durch eine allzu geringe Sauerstoffabgabe des Hämoglobins bedingt sein konnte und demnach auf einen mangelhaften Verbrennungsprozeß im Körper (zwischen dem Kohlenstoff und Wasserstoff der zugeführten Nahrung und dem in den Lungen aufgenommenen Sauerstoff des Blutes) schließen ließ. Da die Wärmeabgabe eines Körpers von dessen Temperatur und von der Temperatur des umgebenden Raumes abhängt und da die Temperaturdifferenz vor der Landung 15° und darüber betragen hatte, während sie auf dem Ankerplatze höchstens 5° ausmachte, so war die Bedingung für das Herabsinken des Verbrennungsprozesses im Körper ersichtlich. Damit erklärte sich auch im allgemeinen die Erkrankung des Schiffsvolkes, falls man die Annahme von einem konstanten Arbeitsvermögen der zugeführten Nahrung machte und dabei berücksichtigte, daß unter den gegebenen Umständen ein allzu geringer Teil in Wärme umgesetzt wurde.

R. Mayer machte, abgesehen von der Form des Ausdrucks, diese Annahme von einem konstanten Arbeitsvermögen der zugeführten Nahrung und zog daraus zunächst (1842) die Folgerungen für das einfachere Gebiet der Kräfte innerhalb der anorganischen Natur, indem er für dieses das mechanische Äquivalent der Wärme[1]) berechnete, dehnte die Untersuchung aber bald darauf (1845) auf die organische Natur aus. Daß der Gedanke von der Erhaltung der Energie erst etwas später durch die, von Mayers Arbeiten durchaus unabhängigen Untersuchungen und Entwickelungen von Joule und Helmholtz, und zwar zunächst für das Gebiet der anorganischen Natur, so begründet wurde, daß man ihn allgemein als ein sicheres Princip der Forschung und zwar auch für das Gebiet der organischen Natur anerkannte, nimmt den genialen und umfassenden Betrachtungen Mayers nichts von ihrem Werte.

Diese stehen in vollem Einklange mit der jetzt herrschenden Auffassung von der Erhaltung der Energie im Ganzen unserer Außenwelt, wobei man sich jede potentielle Energie im Grunde als eine Art von aktueller Energie denkt, mag man dies nun zur Zeit von Fall zu Fall veranschaulichen können oder nicht.

Neben das Princip von der Erhaltung des Stoffes, wonach die Massensumme für ein beliebiges materielles System stets eine Konstante ist, ist das Princip von der Erhaltung der Energie als zweites, das Ganze unserer Außenwelt beherrschendes Princip getreten, wonach auch die gesamte Energie für ein solches System eine Konstante ist. Beide Principien sind an die Bedingung gebunden, daß dem betrachteten System nicht von außen neue Massen oder neue Energieen zugeführt werden, und daß es gegebenen Falles erlaubt ist, sich die Zwischenräume zwischen den eigentlichen Massenteilchen eines Systems durch Atome eines hypothetischen Stoffes (Äther u. s. w.) mehr oder weniger ausgefüllt zu denken.

[1]) Er fand damals $W = 365$ bezw. $W = 367$ statt $W = 424$ und zwar auf Grund der zu seiner Zeit bekannten, erst später durch Regnault verbesserten Werte der Konstanten für die Zustände der Gase.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über Maschinen und über statische Konstruktionen.

266. Die Maschine als Leitung für einen Energiestrom. Die statischen Konstruktionen des Hochbaus und des Ingenieurbaus stellen sich als Systeme von Körpern dar, welche, abgesehen von den innerhalb gewisser Grenzen auftretenden Formänderungen, untereinander und gegen die Erde selbst dann in relativer Ruhe verharren, wenn ihnen in beliebiger Weise Energie zugeführt wird, deren Wert eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

Dagegen stellen sich die kinetischen Konstruktionen des Maschinenbaus (Maschinen) als Systeme von Körpern dar, welche, ganz abgesehen von den innerhalb gewisser Grenzen auftretenden Formänderungen, bei einer bestimmten Art der Zuführung von Energie ihre gegenseitige Lage in bestimmter Weise verändern.

Wären die Körper, welche in einer Konstruktion zu einem Systeme verbunden sind, starre Körper, so würde Zuführung von Energie bei statischen Konstruktionen überhaupt keine Rolle spielen, während kinetische Konstruktionen ihren, von Fall zu Fall gegebenen Zwecken ohne Zuführung von Energie überhaupt nicht entsprechen könnten.

Unter Berücksichtigung der Formänderung der thatsächlich gegebenen Stoffe hat man also bei einer statischen Konstruktion auf die Zuführung von Energie nur in Bezug auf die Sicherheit der Konstruktion Rücksicht zu nehmen, während eine kinetische Konstruktion des Maschinenbaus, davon abgesehen, stets der Aufnahme von Energie bedarf, um ihrem Zwecke zu genügen.

So ist z. B. die aktuelle Energie des Windes, welche durch den Winddruck für die Flächeneinheit gemessen wird, für eine Dachkonstruktion nur insofern von Bedeutung, als deren Abmessungen u. s. w. so bestimmt werden müssen, daß die Konstruktion selbst bei einer bestimmten größten Stärke des Winddrucks nur zulässige Spannungen und Formänderungen erleidet, während die aktuelle Energie des Windes einer Windmühle die Energie zuführt, welche für ihren Betrieb nötig ist.

So ist die aktuelle Energie des bewegten Wassers für Uferbauten, Dämme u. s. w. nur in Bezug auf deren Sicherheit von Bedeutung, während diese Energie für eine Turbine die Bedingung ihrer Arbeitsleistung ist.

So ist die potentielle Energie einer ruhenden Belastung ($m \cdot g$) von bestimmter Falltiefe (h) für deren Unterlage (z. B. Fußboden in einem Hause oder Bahn einer Brücke) nur insofern von Bedeutung, als sie durch Masse (m) und Fallbeschleunigung (g) mitbestimmt ist, d. h. man hat die Unterlage dem Druck $m \cdot g$ entsprechend anzulegen, während z. B. bei einer Gewichtsuhr die potentielle Energie des gehobenen Gewichtes deren Mechanismus im Gange hält.

Während die statischen Konstruktionen des Hochbaus und des Ingenieurbaus mannigfachen Zwecken dienen, welche nur von Fall zu Fall bestimmt werden können, scheint der Zweck einer Maschine allgemein in einer Arbeitsleistung zu bestehen.

Thatsächlich ist dies vielfach der Fall, aber nicht immer.

Bei einer Anlage für Spinnerei oder Weberei oder bei einem Schienenwalzwerk zeigt die Benennung deutlich die Art der Arbeitsleistung an, welche im allgemeinen bezweckt wird, und daher auch für die dazu gehörige kinetische Konstruktion zweckbestimmend ist. Dagegen wird z. B. durch eine Uhr gar keine Arbeitsleistung bezweckt, sie soll vielmehr die Zeit angeben; man sucht dazu eine möglichst gleichförmige Drehung der Zeiger zu erreichen, was wegen der Reibung nicht ohne mechanische Arbeitsleistung möglich ist, aber man bezweckt diese Arbeitsleistung durchaus nicht. Wollte man die Uhren aus der Zahl der Maschinen ausscheiden, weil ihr Zweck keine Arbeitsleistung ist, so müßte man auch alle Maschinen, die dem Transport von Lasten dienen, wenigstens zeitweilig ausscheiden. Wenn z. B. eine Lokomotive einem Zuge eine bestimmte Geschwindigkeit erteilt hat, mit der er sich weiter bewegen soll, so würde sie bei wagerechter Bahn und reibungslosen Materialien vollständig außer Thätigkeit treten können, bis ein Anhalten des Zuges erforderlich wäre. Thatsächlich leistet die Lokomotive Arbeit durch Überwindung der Reibungen, aber ihr Zweck ist der Transport von Menschen und Gütern und nicht die Überwindung von Reibungen.

Man wird sich daher darauf beschränken müssen festzustellen, daß jede Maschine ebenso wie jede statische Konstruktion irgend einem bestimmten Bedürfnisse dient, welches innerhalb der kulturellen Entwickelung der Menschheit aufgetreten ist, das Eigenartige der Maschine statischer Konstruktionen gegenüber aber darin sehen dürfen, daß eine Maschine gegebene Energie als aktuelle Energie aufnimmt und vermöge ihrer Konstruktion infolge dieser Aufnahme befähigt wird, unter Arbeitsleistung ihrem von Fall zu Fall zu bestimmenden Zwecke zu dienen.

Da die, während einer bestimmten Zeit von einem materiellen Systeme geleistete Arbeit ein Maß für die inzwischen eingetretene Änderung seiner (aktuellen) Energie (vergl. S. 702) ist, so folgt gemäß dem Princip von der Erhaltung der Energie (vergl. § 63 und § 64), daß eine im Gange befindliche Maschine fortwährend Energie aufnimmt und abgiebt und demnach als eine Leitung für einen Energiestrom bezeichnet werden

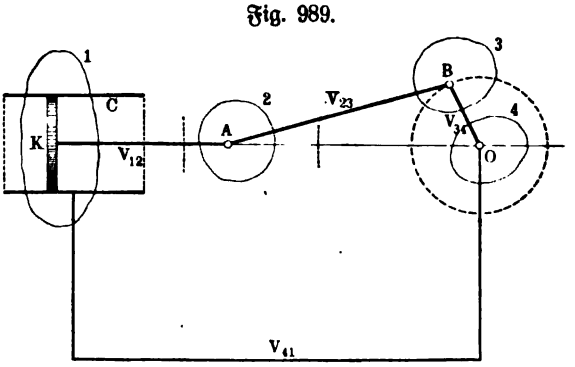
kann, der sie gewissermaßen durchfließt. So wird z. B. bei einer Wassermühle für Getreide fortwährend die (potentielle) Energie des sinkenden bezw. die (aktuelle) Energie des aufschlagenden Wassers als aktuelle Energie aufgenommen, weitergeführt und wieder abgegeben, zum Teil während der Weiterführung unter Überwindung der Reibungen u. s. w., zum Teil bei der Arbeitsleistung, welche in der bleibenden Formänderung der zu Mehl und Kleie zerriebenen Körner besteht.

So wird z. B. bei einer Uhr fortwährend die (potentielle) Energie eines sinkenden Gewichtes oder die (potentielle) Energie einer gespannten Feder als aktuelle Energie aufgenommen, weitergeführt und wieder abgegeben, und zwar geschieht die Abgabe hier lediglich während der Weiterführung unter Leistung der zur Überwindung der Reibungen nötigen Arbeit.

Aus dieser Auffassung ergiebt sich auch die Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile, d. h. einer Maschine, die ohne dauernde Zuführung von Energie dauernd im Gange wäre, da eine solche zum mindesten die Energie, welche der Überwindung der stets vorhandenen Reibungen entspricht, dauernd abgeben müßte, ganz abgesehen von der Abgabe der Energie, welche einer bezweckten Arbeitsleistung entspräche.

267. Die Maschine als Getriebe bezw. System von Getrieben. Um einem Energiestrome eine sichere, dem Zwecke der Maschine entsprechende Leitung gewähren zu können, muß das System von Körpern, durch welches die Maschine gebildet wird, bestimmte Eigenschaften haben. Diese sind zum erstenmal von Reuleaux[1]) in systematischer Weise festgestellt worden, indem er den Begriff der kinematischen Kette (Bewegungskette) einführte. Wir erläutern diesen Begriff zunächst an der schon mehrfach von uns betrachteten Verbindung einer schwingenden Kolbenbewegung (K) und einer Drehbewegung (O) durch Kreuzkopfgelenk (A), Schubstange (AB) und Kurbelgelenk (B). Grenzt man bei Fig. 989 je zwei Teile, welche unter Flächenberührung relativ zu einander beweglich sind, durch die Schnitte 1, 2, 3, 4 gegeneinander ab, so sieht man, daß die Bewegung des ganzen Körper-

Fig. 989.



[1]) Vergl. Lehrbuch der Kinematik (Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1875 und 1890). Mit Kinematik (Zwanglauflehre) bezeichnet Reuleaux den Teil der Phoronomie und Dynamik, welcher für das Verständnis der Maschinenbewegungen von Bedeutung ist; er lehrt, wie die Maschine eingerichtet ist oder wie man sie einzurichten hat, damit die in ihr eingeleiteten Bewegungen bezüglich aller ihrer Bahnen zu bestimmten werden.

systems durch vier Paare von relativ zu einander beweglichen Flächen bestimmt wird.

Bezeichnet man nach wirklicher Ausführung der Schnitte 1, 2, 3, 4 die Körperpaare, an welchen sich jene Flächenpaare befinden, als Elementenpaare, so stellt sich das betrachtete Körpersystem als eine Verbindung von vier Elementenpaaren dar, bei welcher jedes Element eines Paares mit einem Element irgend eines anderen Paares zu einem Gliede fest verbunden ist. Die Verbindungsstellen sind in Fig. 989 durch V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{41} bezeichnet, und zwar entspricht V_{12} der festen Verbindung des Kolbens und des einen Elementes des Kreuzkopfgelenkes durch die Kolbenstange (erstes Glied), V_{23} der festen Verbindung des anderen Elementes des Kreuzkopfgelenkes und des einen Elementes des Kurbelgelenkes durch die Schubstange (zweites Glied), V_{34} der festen Verbindung des anderen Elementes des Kurbelgelenkes und der Achse in O durch den Kurbelarm (drittes Glied) und V_{41} der, etwa durch ein festes Gestell vermittelten Verbindung des Lagers in O mit dem Cylinder C.

Jedes der vier Glieder ist also ein fester Körper, an dessen Enden sich hier je ein Element des einen der zwei verschiedenen Elementenpaare befindet, welche die bewegliche Verbindung mit den anschließenden Gliedern herstellen.

Die Gesamtheit der vier, beweglich verbundenen Glieder stellt eine kinematische Kette dar, welche geschlossen ist, weil kein Element irgend eines Elementenpaares unverbunden geblieben ist.

Außerdem hat die Kette noch die besondere Eigenschaft, daß die Bewegung eines Gliedes die Bewegung der anderen Glieder eindeutig bestimmt, falls irgend ein Glied (z. B. V_{14}) als unbeweglich angesehen wird. Diese Eigenschaft, welche durch das Wort zwangläufig bezeichnet wird, würde verloren gehen, wenn man z. B. die beiderseitig eingelenkte Schubstange AB etwa auf der Strecke AB noch mit einem Gelenk versähe.

Das Körpersystem der Fig. 989 erscheint also bei dieser Betrachtung als eine geschlossene und zwangläufige Kette, von der ein Glied als unbeweglich gilt; man nennt eine solche Kette einen Mechanismus.

Aus einer geschlossenen und zwangläufigen Kette kann man zunächst eine Reihe von Mechanismen bilden, indem man irgend ein Glied der Kette als unbeweglich ansieht.

In Fig. 989 wurde das Glied V_{41} als unbeweglich angesehen und damit war ein bestimmter Mechanismus der betrachteten viergliedrigen Kette gegeben; ebenso kann man jedes der anderen drei Glieder als unbeweglich ansehen und also im ganzen aus der Kette vier Mechanismen bilden, deren praktische Verwendung nur von Fall zu Fall zu entscheiden ist.

Bei dem Mechanismus der Fig. 989, in welchem V_{41} als unbewegliches Glied betrachtet wird, ist noch keine Entscheidung darüber getroffen worden, welches Glied der Aufnahme des Energiestromes dienen soll, wofür sich offenbar drei Möglichkeiten ergeben, von denen zwei sich ohne weiteres als praktisch brauchbar erweisen: die zugeführte Energie kann von dem Kolben aufgenommen werden, so daß infolge von dessen schwingender Bewegung die Energie über A nach B und O geführt wird, wie es bei der Dampfmaschine der Fall ist, die zugeführte Energie kann aber auch von der Kurbel auf-

genommen werden, so daß infolge von deren Drehbewegung die Energie über B nach A und K geführt wird, wie es bei Pumpen der Fall ist. Mit der Auswahl des Gliedes für die Aufnahme der Energie (Energieglied) ist die Wirkungsweise des Mechanismus bestimmt, er ist damit als **Getriebe** gekennzeichnet [1]).

Nimmt man an, daß Fig. 989 einer Dampfmaschine entsprechen soll, so ist das Körpersystem der Fig. 989 als **Getriebe** bestimmt, d. h. es stellt sich dar als eine **geschlossene und zwangläufige Kette, bei welcher ein bestimmtes Glied als unbewegliches Glied und ein anderes bestimmtes Glied als Energieglied ausgewählt worden ist.**

Nimmt man außerdem an, daß in Fig. 989 bei O eine Welle mit Förderseil zum Heben von Lasten angebracht ist, so geht das Getriebe in eine im Gange befindliche **Maschine** über, so bald es in K einen Energiestrom aufnimmt und nach O weiterleitet und damit die Last hebt, d. h. das Getriebe wird zur im Gange befindlichen **Maschine**, sobald es, von einem Energiestrom unter Arbeitsleistung durchflossen, in den Dienst eines bestimmten kulturellen Bedürfnisses tritt.

Entsprechende Betrachtungen von anderen Körpersystemen, welche Maschinen oder Teile von Maschinen bilden, zeigen, daß die eingeführten und erläuterten **Begriffe** für das Wesen der Maschinen **bestimmend** und auch **ausreichend** sind, vorausgesetzt, daß sie sachgemäß erweitert werden. Bei der wirklichen **Abgrenzung dieser Begriffe** beschränkt man sich zunächst auf **Systeme von Körpern**, welche, abgesehen von den zulässigen Formänderungen, als **starr** angesehen werden können, schließt aber z. B. Systeme, in denen biegsame Körper, wie Seile und Riemen, oder Flüssigkeiten auftreten, vorläufig aus.

Demgemäß bezeichnet man zunächst **zwei starre Körper**, welche sich **nur unter einer besonderen Art der Berührung** relativ zu einander **bewegen**, als ein Paar kinematischer Elemente oder kurz als ein **Elementenpaar** oder auch nur als ein **Paar**, und ferner als kinematische Kette oder kurz als **Kette** eine Verbindung von Paaren, bei welchen Elemente verschiedener Paare in beliebiger Weise je zu einem starren Körper vereinigt werden, ohne daß doch dabei die Elemente eines Paares zur relativen Ruhe gezwungen würden; die so gebildeten starren Körper und etwa unverbunden bleibende Elemente heißen **Glieder** der Kette.

Bleibt bei der Kettenbildung ein Element unverbunden oder auch mehrere, so heißt die Kette **offen**, sonst **geschlossen**, d. h. eine Kette ist geschlossen, wenn jedes ihrer Glieder wenigstens zwei Elemente enthält.

Enthält eine Kette kein Glied mit mehr als zwei Elementen, so wird die Kette **einfach** [2]) genannt, sonst **zusammengesetzt**.

---

[1]) Der Sprachgebrauch schwankt hier, man bezeichnet auch jeden Mechanismus als Getriebe und umgekehrt.

[2]) Die Kette, welche Fig. 989 entspricht, ist einfach; wird noch eine Gleitbahn für Kolbenstange oder Kreuzkopf hinzugefügt, so geht die Kette in eine zusammengesetzte Kette über.

Ein Elementenpaar läßt sich demnach auch als Grenzfall einer Kette auffassen, und zwar als eine offene und einfache Kette von zwei Gliedern.

Für die Bildung der im Maschinenbau verwandten Ketten haben zwei geschlossene Gruppen von Paaren eine besondere Bedeutung, weil die Relativbewegungen, welche der vorgeschriebenen Art der Berührung ihrer Elemente entsprechen, besonders einfach sind.

Wenn die Bewegung eines Körpers dadurch eingeschränkt ist, daß er stets einen anderen im Raume unbeweglichen Körper berühren soll, so hat jeder seiner Punkte ein bestimmtes Bewegungsgebiet im Raume, welches aus der Gesamtheit seiner möglichen Lagen besteht, und zwar kann ein solches Bewegungsgebiet ein Teil des Raumes oder eine Fläche oder eine Linie oder auch im Grenzfalle ein Punkt sein.

Ruhen zwei Körper I und II, denen für ihre Relativbewegungen eine bestimmte Art der Berührung vorgeschrieben ist, im Raume, so kann man jeden Punkt A des Raumes als A_1 mit I und als A_2 mit II fest verbunden denken. Bewegt sich nun von der Anfangslage (Ruhe) aus das eine Mal I, während II ruht, und das andere Mal II, während I ruht, so haben die Punkte A_1 und A_2 im allgemeinen verschiedene Bewegungsgebiete, während ihre Übereinstimmung einen besonderen Fall darstellt.

Für den Sonderfall, daß die Bewegungsgebiete von A_1 und von A_2 für jeden Punkt A übereinstimmen, heißen die Relativbewegungen der beiden Körper umkehrbar.

Das System dieser umkehrbaren Relativbewegungen zweier Körper läßt sich leicht vollständig gewinnen, wenn man auf die beiden Regelflächen (vergl. § 37) zurückgreift, durch welche die Bewegung eines Körpers im Raume bestimmt ist [1]).

Welche von allen diesen umkehrbaren Relativbewegungen durch je zwei sich berührende, starre, materielle Körper, d. h. durch je ein, für den Maschinenbau verwendbares Elementenpaar dargestellt werden können, ist eine weitere Frage. Man kann diese weitere Frage unmittelbar beantworten, wenn man beachtet, daß sich die Elementenpaare, welche umkehrbaren Relativbewegungen entsprechen, durch zwei Körper von kongruenten Oberflächen darstellen lassen.

Wählt man nämlich als Punkt A einen Punkt, in dem sich die Körper I und II in ihrer anfänglichen Ruhelage berühren, so ist bei materieller Ausführung das Gebiet des Raumes, welches durch II eingenommen wird, für A_1, und ebenso das Gebiet des Raumes, welches durch I eingenommen wird, für A_2 als Bewegungsgebiet ausgeschlossen. Da anderseits die Oberfläche von II zum Bewegungsgebiet von A_1, und die Oberfläche von I zum Bewegungsgebiete von A_2 gehört, abgesehen etwa von Teilen dieser Oberflächen, an welchen infolge von Einbuchtungen u. s. w. eine Berührung unmöglich gemacht wird, so sind die Oberflächen von II und I im allgemeinen bezw. Grenzen für die Bewegungsgebiete von A_1 und A_2. Sollen diese Bewegungsgebiete zusammenfallen, so müssen diese Oberflächen, abgesehen von Einbuch-

[1]) Vergl. z. B. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, S. 10.

tungen u. s. w., welche für die gegenseitige Berührung nicht in Frage kommen, zusammenfallen.

Die Elementenpaare, welche umkehrbaren Relativbewegungen entsprechen, lassen sich also durch einen Körper und den entsprechenden Hohlkörper (Kongruenz der sich berührenden Oberflächenteile), d. h. als sogenannte Umschlußpaare, darstellen, denen als Bewegungsgebiete für A_1 und A_2 bei beliebigem A demnach höchstens Flächen entsprechen.

Sind die Bewegungsgebiete thatsächlich Flächen, so müssen diese wegen der Möglichkeit einer Relativbewegung in sich kongruente Flächen sein, d. h. Flächen, von denen sich ein beliebiger Teil innerhalb der Fläche ohne Dehnung verrücken läßt.

Die in sich kongruenten Flächen sind Ebene, Kugel und Pseudosphäre nebst den, aus ihnen durch ausdehnungslose Biegung entstandenen und auf ihnen abwickelbaren Flächen. Da die Verschiebung eines Teiles der Fläche innerhalb der Fläche bei der Pseudosphäre und den entsprechenden abwickelbaren Flächen nur unter Biegung möglich ist, so kommt diese Fläche hier nicht in Frage.

Zu berücksichtigen sind demnach hier nur die Ebene nebst den ihr entsprechenden abwickelbaren Flächen, wie Kreiscylinder, Kreiskegel u. s. w., und die Kugel nebst den ihr entsprechenden abwickelbaren Flächen, wie Spindel u. s. w.

Von diesen Flächen sind Ebene, Kreiscylinder und Kugel für die Bildung von Elementenpaaren brauchbar, die übrigen nicht, falls die gemeinsamen Bewegungsgebiete von A_1 und A_2 eine Fläche sein sollen.

Sind die Bewegungsgebiete Linien, so müssen diese wegen der Möglichkeit einer Relativbewegung in sich kongruente Linien sein, d. h. Linien, von denen sich ein beliebiger Teil innerhalb der Linie ohne Formänderung verrücken läßt.

Die in sich kongruenten Linien sind Gerade, Kreis und (gemeine) Schraubenlinie, welche sämtlich für die Bildung von Elementenpaaren brauchbar sind.

Um die letzte Gruppe als Umschlußpaare auszuführen, hat man folgendermaßen zu verfahren: Für die Gerade hat man den Mantel eines prismatischen Körpers mit dem kongruenten Mantel eines entsprechenden Hohlraumes zur Deckung zu bringen, wobei für den prismatischen Körper auch ein cylindrischer Körper eintreten kann, falls dieser nicht einem geraden Kreiscylinder entspricht; man bezeichnet dieses Paar als Prismenpaar.

Für den Kreis hat man den Mantel eines Rotationskörpers (Drehkörpers), welcher nicht einem geraden Kreiscylinder entspricht, mit dem kongruenten Mantel eines entsprechenden Hohlraumes zur Deckung zu bringen; man bezeichnet dieses Paar als Drehkörperpaar.

Für die Schraubenlinie hat man eine gemeine Schraube nebst Mutter zu verwenden; man bezeichnet dieses Paar als Schraubenpaar.

Um die erste Gruppe als Umschlußpaare auszuführen, hat man folgendermaßen zu verfahren:

Für die Ebene hat man eine planparallele Platte mit dem entsprechen-

den Hohlraum zur Deckung zu bringen; man bezeichnet dieses Paar als Plattenpaar.

Für den Cylinder hat man den Mantel eines Kreiscylinders mit dem kongruenten Mantel des entsprechenden Hohlraumes zur Deckung zu bringen; man bezeichnet dieses Paar als Cylinderpaar.

Für die Kugel hat man die Kugeloberfläche mit dem entsprechenden Hohlraume zur Deckung zu bringen; man bezeichnet dieses Paar als Kugelpaar.

Selbstverständlich ist die materielle Ausführung dieser Paare insofern nur in beschränkter Weise möglich, als sie sich, von dem Kugelpaare abgesehen, ins Unendliche erstrecken, während anderseits gerade auf dieser Beschränkung ihre praktische Verwendung beruht; bei dem Kugelpaare ist die praktische Verwendung gleichfalls durch eine beschränkte Darstellung bedingt, da man z. B. für ein Kugelgelenk natürlich nur einen Teil der Hohlkugel materiell ausführen darf.

Ferner ist zu bemerken, daß man aus Cylinderpaaren durch Einschränkung ihrer Beweglichkeit, sowohl Prismenpaare als auch Drehkörperpaare herstellen kann, im ersten Falle z. B. durch Anfügung einer axial gerichteten Nute, im zweiten Falle z. B. durch Anfügung eines peripherisch verlaufenden Wulstes u. s. w.

Endlich ist hervorzuheben, daß die sechs betrachteten Paare nicht als Umschlußpaare ausgeführt zu werden brauchen. So kann z. B. der Hohlcylinder eines Cylinderpaares durch drei axial verlaufende Stäbe ersetzt werden oder auch durch zwei Ringe, deren Hauptebenen senkrecht zur Cylinderachse verlaufen u. s. w.; statt eines Stabes kann man auch zwei Stützpunkte und statt eines Ringes drei Stützpunkte einführen, so daß also in jedem Falle sechs Stützpunkte vorhanden sein müssen, deren Verteilung natürlich, wie leicht zu sehen, an gewisse Bedingungen gebunden ist. Entsprechendes gilt auch für die anderen Paare; der Ersatz der Hohlkörper fordert höchstens acht Stützpunkte.

Diese sechs Elementenpaare, welche umkehrbaren Relativbewegungen entsprechen und als Umschlußpaare ausgeführt werden können, zerfallen in Bezug auf die Art ihrer gegenseitigen Beweglichkeit in die beiden Gruppen, welche sich bei unserer Ableitung darboten.

Bei Prismenpaaren, Drehkörperpaaren und Schraubenpaaren wird jedem Punkte des einen Elementes, relativ zu dem anderen eine bestimmte Linie vorgeschrieben, während bei Plattenpaaren, Cylinderpaaren und Kugelpaaren statt der Linie eine Fläche als Bewegungsgebiet auftritt.

Wir bezeichnen die erste Gruppe als die Gruppe der niederen, die zweite als die der mittleren Paare, während wir alle anderen, noch nicht betrachteten Paare als höhere Paare bezeichnen.

Während die drei niederen Paare in Bezug auf ihre gegenseitige Beweglichkeit eine gewisse Gleichmäßigkeit zeigen, insofern eine Linie als Bewegungsgebiet jedem Punkte seine Bahn eindeutig vorschreibt, zerfällt die Gruppe der drei mittleren Paare, obwohl ihre Bewegungsgebiete

sämtlich Flächen sind, doch in Bezug auf die gegenseitige Beweglichkeit in zwei Untergruppen, in deren einer die Cylinderpaare und in deren anderer die Plattenpaare und die Kugelpaare stehen.

Da jede Lageänderung eines frei beweglichen Körpers im Raume stets durch drei Verschiebungen nach den Achsen und durch drei Drehungen um die Achsen eines räumlichen Koordinatenkreuzes dargestellt werden kann, so schreibt man einem frei beweglichen Körper sechs Freiheitsgrade zu; durch bestimmte Einschränkungen der freien Beweglichkeit läßt sich die Anzahl der Freiheitsgrade Schritt für Schritt herabsetzen.

Um diese Anzahl von Fall zu Fall zu bestimmen, kann man unter anderem die Gleichungen abzählen, durch welche die Koordinaten der drei Ecken (je drei) eines Bewegungsdreiecks (vergl. S. 40) bestimmt werden; für den Fall der freien Beweglichkeit sind diese neun Koordinaten durch drei Gleichungen verbunden, weil die drei Entfernungen der Punkte unveränderlich sind, so daß sechs von ihnen beliebige Werte annehmen können.

Auch bei anderer Art der Abzählung ist die freie Beweglichkeit, ihren sechs Freiheitsgraden entsprechend, stets durch sechs beliebig veränderliche Größen gekennzeichnet.

Für Elemente eines Paares werden die Einschränkungen der freien Beweglichkeit des einen Elementes gegen das andere natürlich durch die Festsetzungen über die Art ihrer Berührung bestimmt.

Wir geben dafür zunächst einige Beispiele, indem wir solche Festsetzungen für Flächen angeben, welche als Oberflächen oder als Teile von Oberflächen von Elementen angesehen werden können.

1. Eine Kugel, welche frei beweglich ist mit der Einschränkung, daß sie stets eine unbewegliche Ebene berühren soll, hat fünf Freiheitsgrade, weil sie jede Drehung um ihren Mittelpunkt ausführen kann, aber nur Verschiebungen, welche keine Komponente senkrecht zur unbeweglichen Ebene haben; ist r der Radius der Kugel, so wird deren Mittelpunkt, welcher als eine Ecke des Bewegungsdreiecks angesehen werden kann, stets in der Entfernung r von der Ebene gehalten, was einer weiteren Gleichung zwischen den neun Koordinaten der Ecken des Bewegungsdreiecks entspricht, so daß also hier $6 - 1 = 5$ Größen beliebig veränderlich bleiben. Entsprechendes gilt für die Bewegung einer Ebene, welche stets eine unbewegliche Kugel berühren soll.

Im ersten Falle hat jeder Punkt der Kugel und auch jeder mit dieser fest verbundene Punkt im allgemeinen den Raum einer zur Ebene planparallelen Platte als Bewegungsgebiet, nur für den Mittelpunkt der Kugel schrumpft dieses auf eine Ebene zusammen; im zweiten Falle hat jeder Punkt der Ebene und auch jeder mit dieser fest verbundene Punkt im allgemeinen den ganzen Raum mit Ausnahme einer zur Kugel konzentrischen Kugel als Bewegungsgebiet, nur für Punkte, welche von der Ebene den Halbmesser der Kugel als Abstand haben und auf der von der Kugel berührten Seite der Ebene liegen, stellt sich der ganze Raum ohne Einschränkung als Bewegungsgebiet dar. Für eine materielle Ausführung kann man etwa eine Kugel vom Durchmesser d in einen Hohlkörper einführen, dessen Hohlraum ein gerader Kreiscylinder vom Durchmesser d' und der Höhe h ist für $h = d$ und $d' > d$;

natürlich stellt die materielle Ausführung die betrachtete Relativbewegung nur für ein gewisses Gebiet dar, für $\lim d' = \infty$ würde sie jene ganz zur Darstellung bringen. Ersetzt man die Ebene des betrachteten Beispieles durch die Fläche eines Kreiscylinders, wobei zu unterscheiden ist, ob die Kugel mit der Außenseite oder mit der Innenseite des Cylinders in Berührung ist, so haben die entsprechenden Relativbewegungen im allgemeinen gleichfalls fünf Freiheitsgrade, ebenso bei Ersatz der Ebene durch eine zweite Kugel; wenn aber der Cylinder die Kugel umschließend berührt und beide Körper gleichen Durchmesser haben, so sinkt die Anzahl der Freiheitsgrade auf vier, und wenn die eine Kugel die andere umschließend berührt und beide Körper gleichen Durchmesser haben, so sinkt die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei und das Bewegungsgebiet wird zur Fläche.

2. Ersetzt man die Kugel des betrachteten Beispiels (1) durch einen Kreiscylinder, dessen Erzeugende die Ebene berühren, so hat die entsprechende Relativbewegung vier Freiheitsgrade, weil jetzt z. B. bei unbeweglicher Ebene auch eine Drehung des Cylinders um Achsen, welche der Ebene parallel sind und die Cylinderachse senkrecht kreuzen, nicht mehr möglich ist; legt man zwei Ecken des Bewegungsdreiecks in zwei Punkte der Cylinderachse, so haben beide Punkte von der Ebene stets die Entfernung des Cylinderradius, was zwei Gleichungen entspricht, so daß der Freiheitsgrad durch $6 - 2 = 4$ bestimmt ist.

Das Bewegungsgebiet eines Punktes des einen Körpers für eine Relativbewegung der Körper ist wieder ein Teil des Raumes.

3. Ersetzt man die Kugel des Beispiels (1) oder den Cylinder des Beispiels (2) durch eine Ebene, so handelt es sich um zwei Körper, die sich in einer beiden Körpern angehörenden Ebene berühren. Diesem Falle entsprechen drei Freiheitsgrade (zwei Verschiebungen und eine Drehung), das Bewegungsgebiet ist eine Fläche (Parallelebene zur Berührungsebene).

Auch die Relativbewegung zweier Kreiscylinder, die sich in einer Erzeugenden (äußerlich oder umschließend) berühren, hat im allgemeinen drei Freiheitsgrade, das entsprechende Bewegungsgebiet ist ein Teil des Raumes; wenn aber der eine Cylinder den anderen umschließend berührt und beide Körper gleiche Durchmesser haben, so sinkt die Anzahl der Freiheitsgrade auf zwei und das Bewegungsgebiet wird zur Fläche.

4. Als Beispiel für zwei Freiheitsgrade können zwei Kegel dienen, die mit den Spitzen zusammenfallen und sich in Erzeugenden (äußerlich oder umschließend) berühren, das Bewegungsgebiet ist eine Fläche; wenn die Kegel sich umschließend berühren und dieselbe Öffnung haben, so liegt nur ein Freiheitsgrad vor (Drehung um die Achse) und das Bewegungsgebiet ist eine Linie.

5. Als Beispiel für einen Freiheitsgrad können zwei Körper dienen, die sich in zwei sich schneidenden beiden Körpern angehörenden Ebenen berühren, wie es z. B. der Bewegung in einer Keilnut (eine Verschiebung) entspricht; das Bewegungsgebiet ist eine Linie.

6. Als Beispiel für das Fehlen jedes Freiheitsgrades können zwei beliebige der unter 1 bis 5 erwähnten Paare dienen, falls man noch

weitere Berührungsbedingungen hinzufügt. So verliert z. B. das Beispiel von Nr. 5 seine Bewegungsfreiheit, wenn man senkrecht zu den sich schneidenden Ebenen noch eine dritte beiden Körpern angehörende Ebene als weiteres Berührungsgebiet einführt.

Das Abzählen der Gleichungen für die verschiedenen Freiheitsgrade zeigt, daß ein beliebiger Punkt des einen Elementes relativ zu den anderen bei fünf, vier und drei Freiheitsgraden im allgemeinen ein Stück des Raumes, bei zwei Freiheitsgraden eine Fläche und bei einem Freiheitsgrade eine Linie als Bewegungsgebiet hat, während dieses bei Mangel jeder Freiheit auf einen Punkt zusammenschrumpft; in besonderen Fällen können Einschränkungen der Bewegungsgebiete eintreten, wie unsere Beispiele zeigen.

Man bezeichnet nun die Paare, deren Relativbewegung nur einen Freiheitsgrad zeigt, als zwangläufig.

Auf Grund dieser Betrachtungen ergiebt sich folgende Einteilung der bisher betrachteten Paare:

I. Niedere Paare. Umkehrbare Relativbewegung bei einem Freiheitsgrade und mit einer Linie als Bewegungsgebiet.
   1. Prismenpaare (eine Verschiebung) mit einer Geraden als Bewegungsgebiet jedes Punktes.
   2. Drehkörperpaare (eine Drehung) mit einem Kreise als Bewegungsgebiet jedes Punktes, abgesehen von den Achsenpunkten.
   3. Schraubenpaare (eine Verschiebung und eine Drehung bei konstantem Verhältnis von zusammengehöriger Verschiebungsstrecke und Drehungsamplitude) mit einer Schraubenlinie als Bewegungsgebiet jedes Punktes, abgesehen von den Achsenpunkten.

II. Mittlere Paare. Umkehrbare Relativbewegung mit zwei oder drei Freiheitsgraden und mit einer Fläche als Bewegungsgebiet.
   a) Mit zwei Freiheitsgraden.
      1. Cylinderpaare (eine Verschiebung und eine Drehung) mit einer Kreiscylinderfläche als Bewegungsgebiet jedes Punktes, abgesehen von den Achsenpunkten.
   b) Mit drei Freiheitsgraden.
      2. Plattenpaare (zwei Verschiebungen und eine Drehung) mit einer Ebene als Bewegungsgebiet jedes Punktes.
      3. Kugelpaare (drei Drehungen) mit einer Kugel als Bewegungsgebiet jedes Punktes, abgesehen vom Mittelpunkte.

Die Anzahl der Freiheitsgrade und die Gestaltung der Bewegungsgebiete ist auch für die höheren Paare von Bedeutung, bei welchen die Relativbewegungen der Elemente nicht umkehrbar sind.

Beispiele dafür geben die obigen Betrachtungen unter 1 bis 4, falls man bei 1 das Kugelpaar, bei 3 das Plattenpaar und das Cylinderpaar u. s. w. ausschließt.

Von besonderer Wichtigkeit sind die höheren Paare von einem Freiheitsgrade, d. h. die zwangläufigen höheren Paare.

Unter diesen stehen für die Praxis an erster Stelle die Paare, welche durch die Berührung zweier Cylinderflächen in Erzeugenden oder durch die Berührung zweier Kegelflächen mit zusammenfallenden Spitzen in Erzeugenden bestimmt werden. Das erste Paar hat zunächst drei Freiheitsgrade (vergl. oben unter 3), das zweite ebenso zwei Freiheitsgrade (vergl. oben unter 2). Um das erste Paar zwangläufig zu machen, hat man zunächst die Verschiebung längs der Erzeugenden zu beseitigen und ferner die nun noch zulässige Relativbewegung weiter zu beschränken. Diese Beschränkung geschieht für dieses Paar ebenso wie für das aus den beiden Kegeln gebildete Paar im allgemeinen dadurch, daß man ein relatives Gleiten der Flächen ausschließt, so daß diese nur aufeinander rollen. Die Untersuchung dieser Paare führt zur Theorie der cylindrischen (vergl. S. 149) und der konischen (vergl. S. 150) Verzahnung.

Die bisher betrachteten (niederen, mittleren und höheren) Paare, deren Elemente starre Körper sind, werden als selbständige Paare bezeichnet, im Gegensatz zu den unselbständigen Paaren, welche des weiteren noch einzuführen sind.

Fig. 990 a.

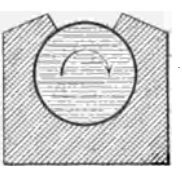
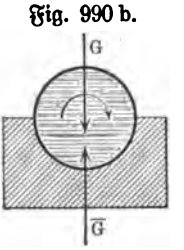


Fig. 990 b.



Die Definition des Elementenpaares bedarf nämlich zunächst insofern einer Erweiterung, als man im Maschinenbau gelegentlich auch das Gewicht eines Körpers mitbenutzt, um den Elementen eines Paares eine bestimmte Relativbewegung vorzuschreiben. Das einfachste Beispiel dafür zeigt das Lager der Fig. 990 b im Vergleich mit dem Lager der Fig. 990 a. Während die Drehung in Fig. 990 a allein durch die Gestalt der beiden paarbildenden Körper gesichert ist, ist sie es in Fig. 990 b erst unter Mithülfe der Gegenkräfte $[G]$ und $[\overline{G}]$. Statt des Gewichtes eines Körpers können natürlich auch andere Kräfte zur Erzielung einer bestimmten Relativbewegung der Elemente eines Paares mit herangezogen werden, ja gelegentlich ist das sogar notwendig; so ist namentlich die Reibung für die Erzielung einer reinen Rollbewegung (unter Ausschluß des Gleitens) oft von Bedeutung.

Anstatt die Räder einer Lokomotive durch zwei parallele Schienen (oberhalb und unterhalb) in ihre Bahn zu zwingen, giebt man ihnen im allgemeinen nur eine Schienenunterlage, und zwar mit Rücksicht auf die mithelfende Wirkung des Gewichtes, während man zugleich die Reibung zwischen Rad und Schiene veranlaßt, die Bewegung des Rades zu einer Rollbewegung zu machen.

Solche Elementenpaare, welchen unter Mitwirkung einer Kraft bezw. mehrerer Kräfte eine bestimmte Relativbewegung vorgeschrieben wird, heißen kraftschlüssig, genauer kraftschlüssige Paare aus starren Elementen.

Ferner bedarf die ursprüngliche Definition des Elementenpaares noch einer Erweiterung, weil die als Maschinenteile verwandten biegsamen

Körper (Seile u. s. w.) und Flüssigkeiten (einschließlich der Gase) und Federn, welche man in kinematischer Hinsicht wohl als bildsame Körper zusammenfaßt, Berücksichtigung fordern. Während die starren Körper gegen Zug und Druck, gegen Biegung u. s. w. vollkommenen Widerstand leisten, sind die bildsamen Körper als Elemente von Maschinen[1]) entweder nur gegen Zug oder nur gegen Druck widerstandsfähig. Unterscheidet man demnach alle Elemente, welche in Maschinen verwendet werden, als starre Elemente, Zugelemente und Druckelemente, so ergiebt sich im ganzen die Möglichkeit von sechs Arten der Paarung, welche auch alle thatsächlich auftreten.

Zugelemente und Druckelemente können zunächst unter Kraftschluß mit starren Körpern gepaart werden; die entsprechenden Paare heißen gleichfalls kraftschlüssig, genauer kraftschlüssige Paare aus einem starren und aus einem bildsamen Elemente. So bildet z. B. eine Rolle mit einem, an ihr befestigten Seile bei dessen Aufwickelung ein Paar, wenn das Seil durch eine Kraft gespannt ist und dadurch eine bestimmte Gestalt erhält, und Entsprechendes gilt für eine Abwickelung; läuft ein, über eine Rolle geführtes und durch Kräfte gespanntes Seil auf der einen Seite der Rolle auf und auf der anderen Seite ab, so ist es als ein Doppelpaar mit einem festen Mittelgliede anzusehen (anlaufendes Seil und Rolle, Rolle und ablaufendes Seil), d. h. als (offene) dreigliedrige Kette.

Die Paarung von Flüssigkeiten mit starren Hohlkörpern zeigt z. B. die hydraulische Presse, die Paarung von Federn und starren Körpern zeigen z. B. gewisse Kolbendichtungen.

Neben den drei betrachteten Arten von Paaren kommt auch die Paarung von zwei Zugelementen und die Paarung von zwei Druckelementen und endlich die Paarung von einem Zugelement mit einem Druckelement vor. Für die erste Paarung giebt die Bandführung der Schnellpressen für Papier ein Beispiel, für die zweite Einspritzer (Wasser und Dampf) oder Sandgebläse (Luft und Sand), für die letzte Lattenketten und Becherwerke.

Da die Körper der Außenwelt thatsächlich niemals starr sind, so hat man zwei Körper der Außenwelt, welche hier als ein Paar aus starren Elementen ohne Kraftschluß angesehen werden, als Körper zu bezeichnen, bei welchen die inneren, ihre Gestalt bestimmenden und erhaltenden Kräfte ausreichen, um ihnen eine bestimmte Relativbewegung vorzuschreiben, während bei der Paarung von Elementen unter Kraftschluß stets neben den inneren Kräften auch noch äußere Kräfte herangezogen werden.

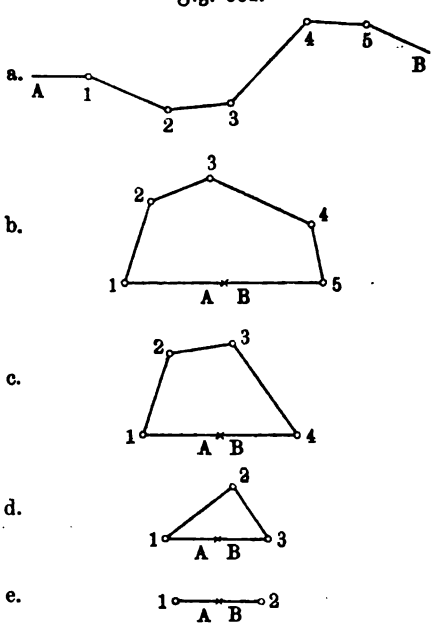
Man bezeichnet also im Grunde die Paare, welche ohne (äußeren) Kraftschluß gebildet sind, als selbständige Paare, die anderen als unselbständige.

---

[1]) So ist z. B. eine cylindrische Spiralfeder an und für sich eine Drehungsfeder (vergl. S. 1236), kommt aber als Maschinenelement lediglich als ein axial gezogener oder axial gedrückter Cylinder in Frage.

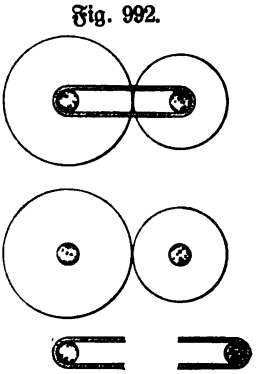
Bei der Bildung von Ketten aus Paaren ist besonders darauf hinzuweisen, daß die Paare innerhalb der Kette die Anzahl der Freiheitsgrade, welche sie als freie Paare haben, behalten oder ändern können. In einer einfachen offenen Kette aus Drehkörperpaaren von parallelen Achsen, wie sie als Gelenkkette verwendet wird (vergl. Fig. 991 a), behält z. B. jedes Paar den einen Freiheitsgrad, den es als freies Paar hatte, während Glieder der Kette, die einander nicht benachbart sind, relativ zu einander eine Bewegung von höherem Freiheitsgrade zeigen. Wird eine solche Kette von mehr als vier Gliedern durch starre Verbindung der Enden A und B geschlossen (vergl. Fig. 991 b), so gilt noch Entsprechendes. Wird aber eine solche Kette von vier Gliedern geschlossen (vergl. Fig. 991 c), so zeigen die Relativbewegungen je zweier Kettenglieder nur einen Freiheitsgrad, so daß man die ganze Kette als zwangläufig bezeichnen darf. Wird endlich eine solche Kette von drei oder zwei Gliedern geschlossen (vergl. Fig. 991 d und e), so werden die Elemente jedes Paares gegeneinander unbeweglich und ebenso überhaupt je zwei Glieder der Kette.

Fig. 991.



Die Fig. 991 a, b, c stellen der Reihe nach eine offene, eine zwanglos geschlossene, eine zwangläufig geschlossene Kette dar, während Fig. 991 d und e übermäßig geschlossene Ketten zeigen, gemäß folgender Erklärungen: Eine geschlossene Kette heißt zwangläufig geschlossen, wenn je zwei ihrer Glieder Relativbewegungen von einem Freiheitsgrade haben; sie heißt zwanglos geschlossen, wenn Relativbewegungen von höherem Freiheitsgrade in ihr vorkommen; sie heißt übermäßig geschlossen, wenn in ihr überhaupt keine Relativbewegungen möglich sind.

Fig. 992.

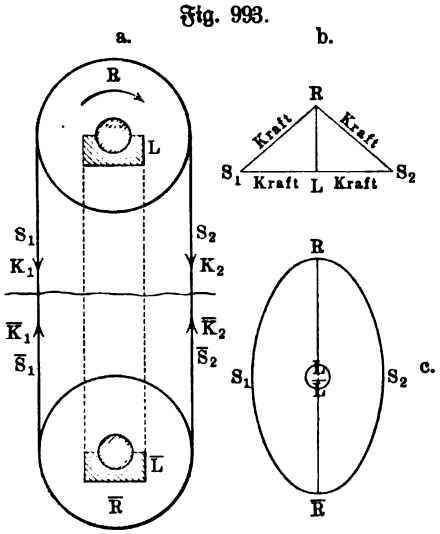


Da jeder Punkt eines Kettengliedes nur innerhalb einer zwangläufig geschlossenen Kette, relativ zu irgend einem anderen Kettengliede, eine bestimmte Bewegung auf einer bestimmten Linie zeigt, so ist die Bildung von zwangläufig geschlossenen Ketten die Bedingung für die Herstellung solcher bestimmter Bewegungen.

Bei der Bildung solcher Ketten verdient ein Fall, für den Fig. 992 (a. v. S.) ein Beispiel giebt, besondere Beachtung. Zerlegt man die zwangläufige Kette der Fig. 992 a, welche zwei im Eingriffe befindliche und durch einen Bügel zusammengehaltene Zahnräder andeuten soll, gemäß ihren Paaren (vergl. Fig. 992 b), so bemerkt man, daß diese Kette bei cylindrischer Ausführung der Bügel zwar in drei Gruppen von je zwei Cylindern zerfällt, daß aber diese Gruppen gar keine Paare darstellen, weil für je zwei der Cylinder irgend eine bestimmte Art der gegenseitigen Berührung durchaus nicht gewährleistet wird.

Man könnte diese Gruppen allenfalls als Paare von sechs Freiheitsgraden bezeichnen, da ja zwei Cylinder relativ zu einander frei beweglich sind. Durch die Zusammenfügung zur Kette gehen diese Gruppen in Paare über und zwar, bei Ausschluß von Bewegungen senkrecht zur Ebene der Zeichnung, sogar in zwangläufige Paare, die eine dreigliedrige zwangläufige Kette bilden.

Fig. 993.



Man nennt solche Gruppen von je zwei Körpern, welche überhaupt erst durch ihre Verbindung in der Kette zu Paaren werden, wohl auch kettenschlüssige Paare; jedenfalls stellen sie ein sehr lehrreiches Beispiel für die Veränderung der ursprünglichen Freiheitsgrade von Relativbewegungen innerhalb einer Kette dar.

Auch die Ketten kann man in selbständige Ketten und in unselbständige Ketten einteilen, je nachdem sie ohne oder mit äußerem Kraftschluß gebildet erscheinen.

Wenn man die oben betrachtete Seilrolle, welche eine offene dreigliedrige Kette darstellt, mit Zapfen und Lager versieht, so geht sie bei horizontaler Lagerachse in eine (zusammengesetzte) viergliedrige Kette über, welche durch Kraftschluß geschlossen erscheint. Der obere (oder untere) Teil der Fig. 993 a stellt dieses dar, und zwar gemäß der Anordnung der Fig. 993 b; die vier Glieder der Kette sind S_1, R, S_2 und L, wobei R dreifach angeschlossen ist und zwar an S_1 und S_2 mit Kraftschluß, an L bei umschließendem Lager selbständig, sonst auch mit Kraftschluß. Verdoppelt man die Kette, wie es Fig. 993 a zeigt, so entsteht eine (zusammengesetzte) fünfgliedrige Kette, welche ohne (äußeren) Kraftschluß gebildet ist, an dessen Stelle eine Art von Kettenschluß tritt; ihre Anordnung zeigt Fig. 993 c.

Eine, dem Riemengetriebe der Fig. 993 entsprechende Ausführung für Druckelemente zeigt das Gefäß (G) der Fig. 994 a mit den Kolben K und $\overline{K}$ und den Wassermassen W und W; die Anordnung der entsprechenden

(zusammengesetzten) fünfgliedrigen Kette zeigt Fig. 994 b. Denkt man in Fig. 994 a die Wassermasse W oder $\overline{W}$ entfernt, so müssen statt der entfernten Wassermasse auf die Kolben wirkende (äußere) Kräfte eingeführt werden, d. h. man kommt dann zurück zu einer Anordnung, die Fig. 993 b entspricht.

Endlich ist noch darauf hinzuweisen, daß Ketten, welche im allgemeinen zwangläufig sind, doch für einzelne Stellungen ihrer Glieder dieses Gepräge verlieren können, entsprechend der Umkehr eines Punktes auf seiner Bahn bezw. dessen Durchgange durch Doppelpunkte u. s. w. seiner Bahn.

Ein Beispiel für solche besondere Stellungen der Glieder einer zwangläufigen Kette bietet schon die Kette der Fig. 989, von der wir ursprünglich ausgingen, da deren beide Totpunktlagen (vergl. S. 754) offenbar solche Stellungen sind. Dabei bemerkt man aber zugleich, daß diese Totpunktlagen für die Kette der Fig. 989 nur auftreten, wenn ein bestimmtes Glied festgestellt und wenn ein anderes Glied als Energieglied ausgewählt ist; sie treten auf bei Feststellung von V_{41}, falls die Energie durch V_{12} zugeführt wird, nicht aber, wenn die Energie bei Feststellung von V_{41} durch V_{34} zugeführt wird. Demnach sind diese beiden Totpunktlagen Sonderstellungen eines bestimmten Getriebes und nicht etwa Sonderstellungen der Kette, aus welcher unter anderem auch jenes Getriebe gebildet werden konnte.

Fig. 994 a.

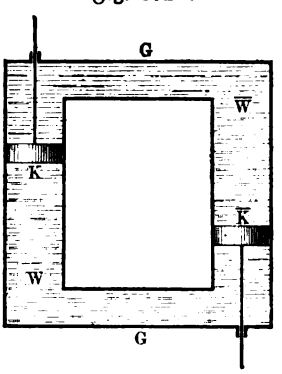
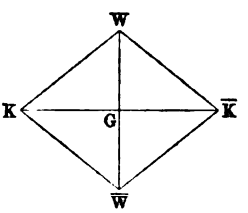


Fig. 994 b.



Die vorläufige Erklärung des Getriebes, welche im Anschluß an das Beispiel der Fig. 989 gegeben wurde, bleibt allgemein bestehen, d. h. es gilt: Ein Mechanismus entsteht aus einer geschlossenen und zwangläufigen Kette, wenn eines von den Gliedern festgestellt wird, und ein Mechanismus wird zum Getriebe, wenn ein weiteres Glied für die Aufnahme des Energiestromes bestimmt wird.

Um die Totpunktlagen in einem Getriebe zu überwinden, d. h. ihm seine Zwangläufigkeit unter allen Umständen zu sichern, verwendet man verschiedene Mittel. Das Schwungrad giebt ein Beispiel dafür, wie Totpunktlagen durch Kraftschluß überwunden werden können, da hier die Energie des Schwungrades die Kraft liefert, welche das tote Glied bewegt.

Neben dem Kraftschluß, der gelegentlich auch bloß durch Gewichte bewirkt wird, ist noch die Überschreitung von Totpunktlagen durch Elementenpaare zu erwähnen, bei welcher der Kette für jede Totpunktlage je zwei Glieder hinzugefügt werden, welche sich nur in der Nähe der Totpunktlage paaren und diese dadurch überwinden.

Ein anderes Mittel zur Überwindung von Totpunktlagen besteht darin, daß man zwei Getriebe so verbindet, daß davon eines sich niemals in einer Totpunktlage befindet, wenn das andere in eine solche eintritt. Verbindet man z. B. zwei, Fig. 989 entsprechende Getriebe, und zwar so, daß ihre Kolbenführungen parallel sind, während die auf derselben Achse befindlichen Kurbelarme um 90° gegeneinander gedreht sind, so treten die Totpunktlagen beider Getriebe niemals zu gleicher Zeit auf.

Setzt man voraus, daß ein Getriebe oder ein System von Getrieben auch in Bezug auf die Überwindung der Totpunktlagen die nötigen Anordnungen enthält, so ist es als Maschine zu bezeichnen, wenn es bei Aufnahme eines Energiestromes unter Arbeitsleistung der Befriedigung eines bestimmten kulturellen Bedürfnisses zu dienen vermag.

268. Die Maschine als energiedurchströmtes Getriebe bezw. System von Getrieben. Gemäß den Betrachtungen der §§ 266 und 267 kann man die folgende Definition der Maschine aufstellen:

Eine Maschine ist ein System von gegeneinander beweglichen und ihre Bewegungen gegenseitig in eindeutiger Weise (zwangläufig) bestimmenden Körpern, welches gemäß seiner besonderen Einrichtung der Befriedigung eines bestimmten kulturellen Bedürfnisses (oder einer Gruppe solcher Bedürfnisse) zu dienen im stande ist, wenn es durch Aufnahme von gegebener Energie als aktueller Energie in Bewegung gesetzt und dabei von einem Energiestrome unter Arbeitsleistung durchflossen wird.

Die besondere Einrichtung einer Maschine ist natürlich vor allem durch die Art des kulturellen Bedürfnisses bestimmt, dem sie dienen soll. Bald handelt es sich um das Heben von Lasten, bald um das Zerkleinern von Gesteinen oder um das Mahlen von Getreide, bald um das Bearbeiten von Holz und Metallen, bald um Weben, Spinnen, Sticken u. s. w., bald um die Bewegung von Lasten auf wagerechter Bahn, bald um die Darstellung des gleichmäßigen Flusses der Zeit (Uhr) u. s. w. — und jeder dieser besonderen Zwecke giebt wenigstens einem Teile der Maschine, die ihm dienen soll, ein besonderes Gepräge.

Für die Maschinen, welche der Formänderung von Stoffen dienen, ist im besondern zu bemerken, daß bei ihnen dem zu bearbeitenden Körper, dem Werkstück, ein besonderer Maschinenteil entspricht, welcher als Werkzeug bezeichnet wird, und daß sich das Werkzeug mit dem Werkstück zur Arbeitsleistung paart, wenn die Maschine in Thätigkeit ist.

Das Getriebe bezw. System von Getrieben, welches einer Maschine zu Grunde liegt, ist stets in zweifacher Weise zu betrachten, in kinematischer und in dynamischer Hinsicht.

Im ersten Falle handelt es sich um die Gestalt der einzelnen Glieder der Ketten innerhalb der Maschine und um die Art ihrer Bewegungen (z. B. Drehbewegung, Geradführung u. s. w.) im einzelnen und im ganzen.

Im zweiten Falle handelt es sich einerseits um die Aufnahme der Energie und um die Übertragung der Energie von dem Energiegliede (bezw. von den Energiegliedern) an zu den benachbarten Gliedern und so fort, wobei natürlich auch der Aufspeicherung von Energie innerhalb der Maschine (z. B. im Schwungrade) Beachtung zu schenken ist, anderseits um die Widerstandsfähigkeit der einzelnen Glieder im Hinblick auf die zulässigen Grenzen für die auftretenden Spannungen.

In Bezug auf die Übertragung der Energie kann man nach dem Vorgange von Reuleaux[1]) die Maschinenteile aller Maschinen in sechs Gruppen gliedern und demgemäß

Schrauben-, Kurbel-, Räder-, Rollen-, Kurven- und Gesperrtriebe

unterscheiden.

Die gegebene Energie, welche von einer Maschine aufgenommen wird, ist entweder als aktuelle Energie vorhanden (z. B. die Energie des fließenden oder aufschlagenden Wassers oder die Energie des bewegten Windes) oder als potentielle Energie (vergl. S. 1365).

In letzterem Falle muß die Energie bei der Aufnahme durch die Maschine in aktuelle Energie umgesetzt werden. Dies geschieht z. B. bei der Dampfmaschine durch den beweglichen Kolben, welcher durch Paarung mit dem gespannten Dampfe in Bewegung gerät, wobei man sich ja auch die potentielle Energie des gespannten Dampfes gemäß S. 1368 als aktuelle Energie seiner Atome veranschaulichen kann; bei der Uhr mit Gewichtbetrieb geschieht die Umsetzung der potentiellen Energie des gehobenen Gewichtes in aktuelle Energie durch dessen Paarung mit Seil und Rolle, bei der Uhr mit Federbetrieb durch die Paarung der Feder mit den benachbarten Teilen.

Um für eine Maschine gegebene Energie stets in Bereitschaft zu haben, muß diese in gewissen Fällen durch geeignete Vorrichtungen aufgespeichert, gelegentlich auch noch besonders geformt werden. Der Aufspeicherung dienen z. B. die Wasserhaltungen für Gruben und Kanäle, die Thalsperren u. s. w., der Aufspeicherung nach geeigneter Umformung z. B. die Dampfkessel, Gasbehälter u. s. w., in welchen die Energie der Wärmeerscheinungen und chemischer Vorgänge u. s. w. als potentielle Energie gespannter Dämpfe oder Gase gesammelt wird.

Die Abgabe der aktuellen Energie durch eine Maschine findet stets schon während deren Übertragung von Glied zu Glied statt; wollte man die Maschine als Leitung eines (aktuellen) Energiestromes mit einer Wasserleitung vergleichen, so müßte man dazu eine ziemlich mangelhafte Wasserleitung wählen, welche fortwährend Nebenwasser (durch Verdunstung und Abfluß) abgiebt.

Bei Maschinen, welche der Formänderung dienen, soll die hauptsächlichste Abgabe der Energie erst bei der Übertragung auf das letzte Glied, d. h. bei der Übertragung vom Werkzeug auf das Werkstück vor sich gehen, bei anderen Maschinen, z. B. bei Lokomotiven, findet diese Abgabe teils innerhalb der Maschine, teils an den Berührungsstellen zwischen

[1]) Vergl. Lehrbuch der Kinematik, 1900, Bd. II, § 54 f.

Rädern und Schienen statt, bei Uhren z. B. tritt diese Abgabe nur innerhalb der Maschine ein.

Die Aufnahme, der Übergang und die Abgabe aktueller Energie findet stets unter Arbeitsleistung statt, und zwar ist diese nicht bloß ein Zeichen für diese Vorgänge, sondern zugleich ein Maß für den Wert der übertragenen oder abgegebenen Energie (vergl. S. 1363).

Innerhalb der Maschine ist es vor allem die Reibungsarbeit, durch welche die Abgabe von aktueller Energie angezeigt wird und durch deren Wert diese auch gemessen werden kann, während die abgegebene Energie selbst zunächst in der Erwärmung der sich reibenden Teile und in der Bewegung ihrer materiellen Punkte u. s. w. vorhanden bleibt, um sich dann nach außen hin zu zerstreuen.

Soll die aktuelle Energie, dem Zweck der Maschine entsprechend, hauptsächlich bei der Übertragung auf das letzte Glied auftreten, so zerstreut sie sich der Hauptsache nach von diesem aus nach außen. Bei Maschinen für Formänderung geht sie z. B. vom Werkzeug auf das Werkstück über und fließt dann nach außen ab, wobei sich Werkzeug und Werkstück erwärmen u. s. w., und wobei außerdem noch gegebenen Falles die aktuelle Energie der vom Werkstücke abgetrennten Teile zu beachten ist. Während in diesem Falle die abfließende Energie (wegen ihrer Zersplitterung) durch die entsprechenden Arbeitsleistungen im allgemeinen nicht meßbar ist, wird sie z. B. bei Lasthebemaschinen leicht durch die Arbeitsleistung der Hebung gemessen, entsprechend ihrem Übergange in die potentielle Energie der gehobenen Last.

Durch Messung der Arbeitsleistungen, welche die Aufnahme, den Übergang und die Abgabe der ursprünglich aufgenommenen aktuellen Energie von Glied zu Glied begleiten, ist man also im stande, den Energiestrom einer Maschine mit seinen Verzweigungen deutlich zur Anschauung zu bringen.

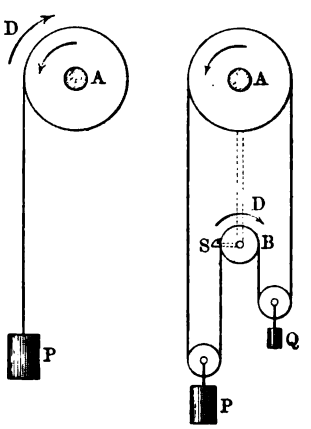
Die Stärke des der Maschine ursprünglich zugeführten Stromes und die Stärken der sich bildenden Verzweigungsströme mißt man selbstverständlich für eine bestimmte Stelle durch die an ihr innerhalb einer bestimmten Zeit (1 Sek.) durchströmende Energie, welche der begleitenden Arbeitsleistung entsprechend in Meterkilogramm oder Pferdekräften ($= 75\,\mathrm{mkg}$) angegeben wird (vergl. S. 257), d. h. man mißt die Stromstärke in $\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{sec}}$ bezw. in Pferdestärken $\left(1\ \mathrm{P.S.} = 75\,\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{sec}}\right)$.

Der Regelung der Zufuhr von Energie und der, innerhalb der Maschine etwa nötigen Aufspeicherung von Energie dienen besondere Gruppen von Maschinenteilen, welche man allgemein als Regulatoren bezeichnet. Das bekannteste Beispiel für die Regelung der Zufuhr ist der gewöhnliche Schwungkugelregulator (vergl. S. 767) der Dampfmaschine in Verbindung mit der Drosselklappe u. s. w., für die Aufspeicherung das Schwungrad (vergl. S. 754) der Dampfmaschine. Als ein anderes Beispiel mag noch die Vorrichtung der Fig. 995 b dienen, bei welcher ebenso wie bei Fig. 995 a ein Gewicht P die Rolle A treibt, welche man sich etwa mit dem ersten

Zahnrade einer Uhr fest verbunden denken kann. Wird P in Fig. 995 a durch die Drehung $[D]$ der Rolle A gehoben, um dem Getriebe neue Energie zuzuführen, so muß das Getriebe während der Zeit dieses Aufziehens im allgemeinen ausgelöst werden, weil es dabei sonst seiner gewöhnlichen Bewegung entgegen bewegt würde. Wird dagegen P in Fig. 995 b durch die Drehung $[D]$ der Rolle B gehoben, welche gegen eine umgekehrte Drehung gesperrt (S) ist, so wirkt an der Rolle A auch während des Aufziehens die gewöhnliche Betriebskraft $\frac{P-Q}{2}$ fort.

Denkt man sich die Vorrichtung der Fig. 995 b in größerem Maßstabe ausgeführt, so würde ein Flügelrad, dessen Achse mit der Achse von B zusammenfällt und an diese fest angeschlossen ist, z. B. die Energie des veränderlichen Winddrucks aufnehmen können, womit aus dieser die konstante Betriebskraft $\frac{P-Q}{2}$ gewonnen würde; sollte eine solche regulierende Einrichtung wirklich brauchbar sein, so müßte P bei Einnahme seiner höchsten zulässigen Stellung die feste Verbindung des Flügelrades mit der Rollenachse selbstthätig lösen und nach der Senkung um eine gewisse Strecke wieder selbstthätig herstellen.

Fig. 995 a. Fig. 995 b.



Zeigt eine Maschine eine deutlich als Getriebe begrenzte Gruppe von Gliedern, welche der Aufnahme (und Weiterführung) der Energie dient, so bezeichnet man diese Gruppe als Rezeptor oder Kraftmaschine (Motor) oder Umtriebsmaschine.

Zeigt eine Maschine eine deutlich (als Getriebe) begrenzte Gruppe von Gliedern, welche einer, dem Zwecke der Maschine entsprechenden (Weiterführung und) Abgabe von Energie dient, so bezeichnet man diese als Operator oder Lastmaschine oder Arbeitsmaschine.

Läßt sich zwischen den beiden bezeichneten Gruppen von Maschinenteilen noch eine deutlich als Getriebe begrenzte Gruppe von Maschinenteilen unterscheiden, welche der Weiterführung der Energie dient, so rechnet man diese Gruppe entweder zur Arbeitsmaschine oder man bezeichnet sie als Kommunikator oder Verbindungsmaschine oder Zwischenmaschine. So ist z. B. bei einer Wassermühle für Getreide das Wasserrad oder die Turbine die Kraftmaschine (Rezeptor), der Mühlstein die Arbeitsmaschine (Operator), während das Räderwerk entweder als Teil der Arbeitsmaschine aufgefaßt oder als Zwischenmaschine (Kommunikator) bezeichnet wird.

In vielen Fällen erscheint die Kraftmaschine (Motor) durch ein belebtes Wesen ersetzt, welches die, in aktuelle Energie verwandelte potentielle Energie seines Nerven- und Muskelsystems durch bestimmte Bewegungen auf ein Getriebe überträgt.

Bei Maschinen, welche zur Hebung von Lasten dienen und bei Maschinen, welche der Formänderung dienen, ist meist ein Getriebe vorhanden, welches als Arbeitsmaschine bezeichnet werden darf; eine solche fehlt z. B. bei den Uhren oder bei einem Orchestrion, aber auch bei einer Lokomotive.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß belebte Wesen natürlich auch durch Körper bezw. Körpersysteme, welche keine Maschinen sind, einen Energiestrom, dessen Quelle ihr Nerven- und Muskelsystem ist, unter Arbeitsleistung einem bestimmten Zweck dienstbar machen können.

Beispiele für solche Körper bezw. Körpersysteme, welche man als Geräte (Instrumente, Apparate u. s. w.) zu bezeichnen pflegt, sind Messer, Gabel, Axt, Beil, Säge, Handspritze u. s. w., aber auch Schubkarren, Schleifstein, Spinnrad, Pflug u. s. w., Klavier, Orgel u. s. w.

Der Unterschied zwischen einem Gerät und einer Maschine besteht darin, daß der Gebrauch des ersteren der Willkür und Überlegung einen gewissen Spielraum läßt, welche zu der Zwangläufigkeit der Maschine im Gegensatze steht [1]).

Freilich ist die Grenze zwischen Gerät und Maschine insofern fließend, als auch die Maschine oft einer Bedienung bedarf, welche durch Willkür und Überlegung bedingt ist. Man wird kein Bedenken tragen, das Klavier als ein Instrument (Gerät) zu bezeichnen und das Orchestrion als eine Maschine, und wird Einspruch erheben, wenn eine mehr oder minder vollkommene Vorrichtung zum Kaffeekochen als Kaffeemaschine bezeichnet wird, man wird aber im Zweifel sein, ob man eine Dampfspritze als Maschine und eine Kaffeemühle als Gerät anzusehen hat.

Die kulturelle Entwickelung hat dazu geführt, Maschinen mehr und mehr in den Dienst der menschlichen Bedürfnisse zu stellen, welche ursprünglich ohne jede Vorrichtung und dann durch Geräte befriedigt wurden, und demgemäß ist man um so eher bereit, eine Vorrichtung als Maschine zu bezeichnen, je mehr man sich bewußt ist, in welchem Maße sie Willkür und Überlegung durch Notwendigkeit ersetzt. Darum spricht man z. B. von Schreibmaschinen und Rechenmaschinen, bezeichnet aber kleinere Maschinen, die sich schon von Geschlecht zu Geschlecht vererbt haben, als Geräte. Die sogenannten „einfachen Maschinen“ von ehemals, nämlich schiefe Ebene, Hebel und Schraube entsprechen den drei niederen Elementenpaaren, sie können einerseits unmittelbar als Geräte dienen (z. B. Zirkel, Schublehre, Schraubkaliber), finden aber anderseits auch als Bestandteile von Ketten in Maschinen eine überaus reiche Verwendung, und Entsprechendes gilt überhaupt für Paare und für offene oder zwanglos geschlossene Ketten.

269. Die Arbeitsleistung einer Maschine in Bezug auf ihren Zweck (Rohleistung, Nutzleistung, Nebenleistung). Von der Energie, welche eine Maschine als aktuelle Energie aufgenommen hat, ohne sie als solche abzugeben, pflegt man zu sagen, daß sie zur Arbeitsleistung verbraucht werde,

[1]) Vergl. Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 194 f. und Bd. II, S. 237.

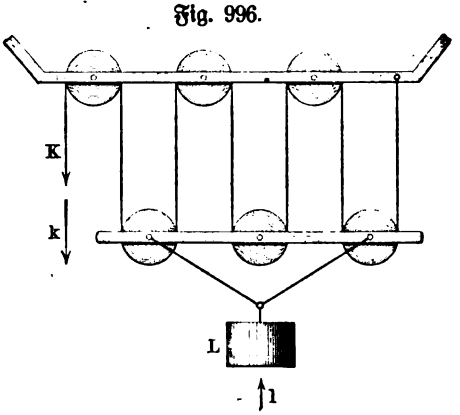
während jene Energie, gemäß dem Princip der Erhaltung der Energie, thatsächlich unter Arbeitsleistung als potentielle Energie abgeflossen ist. Dieser ungenaue Sprachgebrauch ist nicht ohne Berechtigung. Etwa in demselben Sinne, in dem man von dem Verbrauch einer Summe baaren Geldes zu bestimmten Bedürfnissen spricht, darf man auch von dem Verbrauch einer Energiemenge zur Arbeitsleistung sprechen, wenn man sich nur gegebenen Falles daran erinnert, daß es sich dabei um eine bildliche Ausdrucksweise handelt.

Zur Erläuterung des Sachverhaltes mag noch das Beispiel der Fig. 996 dienen. Die zugeführte Energie, welche bei Handbetrieb in der potentiellen Energie der Nerven und Muskeln der Arbeiter ihre Quelle hat, mißt man hier bei einer Verschiebung von $[K]$ um $[k]$ durch die Arbeit $K \,.\, k$, während man die schließlich abgeführte Energie bei einer Verschiebung von $[L]$ um $[l]$ durch die Arbeit $L \,.\, l$ mißt. Da erfahrungsmäßig stets $Kk > Ll$ ist, so bestimmt man gemäß dem Princip der Erhaltung der Energie aus der Gleichung

$$Kk = Ll + \mathfrak{A}$$

die Energie $\mathfrak{A}$, welche abgegeben worden ist, während die aufgenommene Energie längs des Seiles auf die Rollen und auf den Rahmen des unteren Teiles überging. Die Energie $\mathfrak{A}$ geht für den Zweck der Maschine (Hebung der Last) verloren, während ihm die Energie Ll zunächst dient, nach ihrer Abführung aber gleichfalls für diesen Zweck verloren ist, und insofern kann man sagen, daß die zugeführte Energie zur bezweckten Arbeitsleistung verwendet worden ist, abgesehen von dem Teile $\mathfrak{A}$, welcher bei der Weiterführung für Reibungsarbeit u. s. w. verbraucht wurde.

Fig. 996.



Läßt man die Last $[L]$ um die Strecke $[l]$ ihrer Hebung wieder frei fallen, so tritt bei dem Fall um die Strecke $[l]$ wieder aktuelle Energie vom Werte Ll auf. In welcher Weise diese Energie vom Werte Ll während der Hebung von $[L]$ etwa an den umgebenden Äther u. s. w. abgegeben worden ist und in welcher Weise diese Energie vom Werte Ll während der Senkung von $[L]$ aus diesem Äther u. s. w. wiedergewonnen wird, entzieht sich vorläufig einer weiteren Veranschaulichung. Eine entsprechende Wiedergewinnung der Energie $\mathfrak{A}$ ist nicht ausführbar, aber auch die Wiedergewinnung von Ll ist nur möglich, wenn dabei die ursprünglich bezweckte Arbeitsleistung (Hebung der Last) wieder aufgehoben wird (durch Senkung der Last), d. h. auch hier läßt sich eine neue Arbeitsleistung nur erzielen auf Kosten der bereits geleisteten Arbeit.

Da für die gegenseitige Anziehung von Erde und Körper, durch welche

das Sinken und Steigen schwerer Massen bedingt ist, bisher keine genügende Veranschaulichung gefunden worden ist, so verfällt man hier leicht dem falschen Schlusse, einem gehobenen Körper an und für sich eine bestimmte potentielle Energie zuzuschreiben, während dies natürlich nur in Bezug auf das ganze, aus Erde und Körper bestehende System, einschließlich eines hypothetischen, dazwischen gelagerten Stoffes (Äther u. s. w.) richtig ist.

Unser Beispiel bestätigt also durchaus die Anschauung: Die Messung der aktuellen Energie durch Messung der von ihr geleisteten Arbeit ist also im Grunde nicht eine Messung der zur Arbeitsleistung verbrauchten Energie, sondern eine Messung der unter Arbeitsleistung aus der aktuellen Form in die potentielle Form übergehenden Energie.

Bei einem, durch eine Dampfmaschine getriebenen Walzwerk für Schienen wird die aktuelle Energie als potentielle Energie des gespannten Wasserdampfes zugeführt, deren Deutung als aktuelle Energie durch die kinetische Theorie der Gase in befriedigender Weise gelungen ist. Hier ist die Dampfmaschine mit Cylinder, Kolben u. s. w. und Schwungrad die Kraftmaschine (Rezeptor), bei welcher sich die Weiterführung der aufgenommenen Energie zunächst in der Bewegung des Kolbens zeigt, welcher sie dann durch Kreuzkopf, Schubstange und Kurbel auf die Welle des Schwungrades überträgt. Die eigentliche Arbeitsmaschine (Operator) ist hier das System der Quetschwalzen, welche das auszuwalzende Eisen fassen, während die Welle des Schwungrades das Räderwerk bezw. die Riemenscheiben nebst Zubehör und die übrigen Wellen als Zwischenmaschine bezeichnet werden können.

Von der Stelle, an welcher die Welle des Schwungrades (Transmissionswelle) von der Kurbel aus ihre Energie erhält, wird diese weitergeleitet, zunächst die Welle entlang und in die Umfänge der auf der Welle befindlichen Räder oder Scheiben, dann durch Vermittelung der eingreifenden Räder oder der umschließenden Riemen auf andere Wellen u. s. w., bis sie durch die Walzen unter Arbeitsleistung abgegeben wird. Die Arbeitsleistung besteht hier in der Formung des Eisenstabes zur Schiene, wobei die Walzen ihre Energie unter Reibung zum Teil erst auf den Stab und dann auf die entstehende Schiene übertragen und diese dadurch bewegen, zum Teil auch in Wärme übersetzen, welche der bleibenden Formänderungsarbeit an dem Eisenstabe entspricht. Natürlich ist auch während der Fortführung der Energie an verschiedenen Stellen eine beträchtliche, der Reibungsarbeit u. s. w. entsprechende Abgabe derselben in Rechnung zu stellen.

Kommen Stöße in einer Maschine vor, wie z. B. bei den Hammerwerken, in welchen der Daumen einer Welle mit einer bestimmten Stelle des, als Hebel konstruierten Hammers zum Stoße gelangt, so ist für die Stoßstelle ein, der bleibenden Formänderungsarbeit entsprechender Übergang von aktueller Energie in potentielle Energie (Erwärmung u. s. w.) zu beachten; erhält der aufsteigende Hammer, um die Anzahl seiner Schläge für eine bestimmte Zeit zu vermehren, noch ein Prellkissen, so gilt für den Stoß an diesem natürlich dasselbe.

Bei Stößen ist außerdem zu beachten, daß zunächst an der Stoßstelle

immer aktuelle Energie in potentielle Energie übergeht, daß aber dann auch stets ein, dem Elasticitätsgrade des Stoßes entsprechender Teil dieser potentiellen Energie wieder als aktuelle Energie auftritt und daß auch für letzteren Übergang in der entsprechenden Arbeitsleistung ein Maß gegeben ist; Entsprechendes gilt auch für Federn, die nicht durch Stöße, sondern durch Zug oder Druck deformiert werden, ebenso für eingeschlossene Gasmassen unter entsprechenden Umständen.

Auch für die potentielle Energie, welche eine Maschine als aktuelle Energie aufnimmt, ist die Arbeit, welche ihrer Umsetzung entspricht, ein geeignetes Maß.

In allen Fällen hat man demnach in dem Maße der geleisteten Arbeit ein äußerst brauchbares Maß für die Energie, welche gemäß dem Satze der Erhaltung der Energie entweder als aktuelle Energie verschwindet, um als potentielle Energie fortzubestehen, oder als potentielle Energie verschwindet, um als aktuelle Energie aufzutreten.

Bezeichnet man die Energie, welche eine Maschine aufnimmt, als Rohenergie und die ihr entsprechende Arbeit als Roharbeit, so kann man bei allen Maschinen, deren Zweck in einer Arbeitsleistung besteht, den Teil der Rohenergie bezw. Roharbeit, welcher diesem Zwecke dient, als Nutzenergie bezw. Nutzarbeit bezeichnen, den Rest aber als Nebenenergie bezw. Nebenarbeit.

Bezeichnet man die Roharbeit durch $\mathfrak{A}$, so teilt sich dieselbe für die genannten Maschinen in die Nutzarbeit $\mathfrak{A}_1$ und in die Nebenarbeit $\mathfrak{A}_2$, d. h. es gilt die Gleichung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 574)$$

Man kann die Nebenarbeit $\mathfrak{A}_2$ durch geschickte Wahl und Anordnung u. s. w. der Maschinenteile möglichst verringern, ist aber nicht im stande, sie zu annullieren, da unter allen Umständen eine gewisse Reibungsarbeit nicht vermieden werden kann. Man bezeichnet nun ferner

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Roharbeit}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 575)$$

als den Nutzeffekt oder Wirkungsgrad (Güteverhältnis) der Maschine, woraus noch

$$\eta = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}} = 1 - \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}$$

folgt (vergl. S. 564 f.).

Für den verhältnismäßigen Arbeitsverlust (vergl. S. 565)

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\text{Nebenarbeit}}{\text{Nutzarbeit}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 576)$$

ergiebt sich ferner

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} = \frac{1}{\eta} - 1$$

oder

$$\eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{V}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 577)$$

Findet eine gleichmäßige Zuführung von Energie statt, so kann man die Größen A, A_1, A_2 natürlich auf dieselbe Zeit beziehen, d. h. sie als Arbeitsstärken in $\frac{mkg}{sec}$ bezw. in P.S. ausdrücken.

Vorstehende Betrachtungen gelten zunächst nur für die Maschinen, deren Zweck in einer Arbeitsleistung besteht, lassen sich aber für den Sonderfall $A_1 = 0$ auch auf alle übrigen Maschinen (ohne Nutzleistung) übertragen.

Nur bei ersteren hat es mit Rücksicht auf den Zweck der Maschine (z. B. Heben von Lasten oder Herstellung besonderer Formänderungen) einen deutlichen Sinn, zu sagen, daß von der Rohenergie (bezw. der ihr entsprechenden Arbeit) ein Teil für Nutzarbeit verbraucht worden und ein Teil als Nebenarbeit[1]) verloren gegangen ist.

Wenn z. B. das Wasserrad eines Pochwerkes in der Minute 10 cbm Wasser bei einem Gefälle von 3 m aufnimmt, so hat man die potentielle Energie des Wassers, welche das Rad als aktuelle Energie aufnimmt, durch die Arbeit zu messen, welche dem Übergange jener potentiellen Energie in aktuelle Energie entspricht. Da 1 cbm Wasser ein Gewicht von 1000 kg hat, so sinken in jeder Sekunde $\frac{10 \cdot 1000}{60}$ kg um je 3 m, d. h. man hat eine Arbeitsleistung von

$$\frac{10 \cdot 1000}{60} \cdot 3 = 500 \frac{mkg}{sec} = \frac{500}{75} \text{P.S.} = 6^2/_3 \text{P.S.}$$

als Rohenergie bezw. Roharbeit für die Sekunde anzunehmen.

Hat das Werk 10 Pochstempel, von denen jeder 100 kg wiegt und 30 Hube von 0,5 m in der Minute macht, so entspricht die, bei der bezweckten Arbeit abfließende Energie (abgesehen von der Reibungsarbeit der fallenden Hämmer) der Hebung von $\frac{10 \cdot 100 \cdot 30}{60}$ kg um 0,5 m in jeder Sekunde, d. h. sie ist anzusetzen eine Arbeitsstärke von

$$\frac{10 \cdot 100 \cdot 30}{60} \cdot 0{,}5 = 250 \frac{mkg}{sec} = \frac{250}{75} \text{P.S.} = 3^1/_3 \text{P.S.}$$

Von der aufgenommenen Energie fließt also hier die eine Hälfte unter Arbeitsleistungen ab, welche dem Zweck der Maschine entsprechen, die andere Hälfte unter Arbeitsleistungen (Reibung u. s. w.), welche dem Zweck der Maschine nicht entsprechen, aber unvermeidlich sind.

Man hat hier

$$\eta = \frac{3^1/_3}{6^2/_3} = 0{,}5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\eta} - 1 = 1,$$

d. h. 50 Proz. der zugeführten Energie dienen dem Zweck der Maschine, während 50 Proz. der unvermeidlichen Nebenarbeit entsprechen.

Bei einer Uhr, deren Zweck nicht in einer Arbeitsleistung besteht, ist überhaupt keine Nutzleistung vorhanden, d. h. hier fließt alle zugeführte Energie

[1]) Dieser ist natürlich auch ungenutzt abfließende aktuelle Energie zuzurechnen, z. B. die Energie, mit der Wasser ein Rad verläßt, das es getrieben hat.

unter Nebenarbeit ab. Müssen für den Betrieb der Uhr Massen vom Gesamtgewicht von 2 kg alle 36 Stunden um 0,5 m gehoben werden, so ist die entsprechende Roharbeit für die Sekunde (Arbeitsstärke)

$$\frac{2 \,.\, 0{,}5}{36 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{1}{129\,600} \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = \frac{1}{129\,600 \,.\, 75} \text{ P.S.}$$

Die entsprechende Nebenarbeit beträgt hier ebensoviel.

Früher pflegte man den Wirkungsgrad einer Maschine, deren Zweck in einer Arbeitsleistung besteht, durch die Beziehungen von Kraft und Last zu erläutern, welche einfache Maschinen, wie z. B. der Flaschenzug der Fig. 996 unmittelbar zeigen; diesem Verfahren entsprechen auch die Bezeichnungen Kraftmaschine und Lastmaschine bezw. für Rezeptor (Motor) und Arbeitsmaschine. Bei dem Beispiel der Fig. 996 wird die Kraftmaschine durch irgend einen Punkt des Seiles, an dem $[K]$ wirkt, dargestellt — man kann sich in diesem Punkte ein Gewicht oder das Seil einer durch Wasser oder Dampf getriebenen Trommel oder einen belebten Motor als Kraftmaschine angebracht denken; als Lastmaschine ist der ganze Flaschenzug zu bezeichnen.

Entsprechen sich für $[K]$ und $[L]$ bezw. die Arbeit Kk und Ll, so ist

$$Kk = Ll,$$

falls man zunächst von der Abgabe der Energie bei der Weiterführung infolge von Reibung u. s. w. absieht. Aus dieser Gleichung folgt

$$K = L \cdot \frac{l}{k} \quad \text{oder} \quad L = K \cdot \frac{k}{l}.$$

Man bezeichnet nun $L' = L \cdot \frac{l}{k}$ als die, auf die Kraftstelle zurückgeführte Last und $K' = K \cdot \frac{k}{l}$ als die, auf die Laststelle zurückgeführte Kraft.

Die Gleichungen $K = L'$ und $L = K'$ drücken dann als Gleichungen zwischen Kräften die Beziehung der Energie an der Aufnahmestelle und an der Abgabestelle aus, bei Vernachlässigung der während der Leitung abgegebenen Energie.

Berücksichtigt man letztere, so gilt

$$Kk = Ll + \mathfrak{A}.$$

Bringt man $\mathfrak{A}$ auf die Form $\overline{L} \,.\, l$, so bezeichnet man $\overline{L}$ als Nebenlast im Gegensatz zu der Nutzlast L; es gilt dann die Bezeichnung

$$Kk = (L + \overline{L}) \,.\, l.$$

Hieraus folgt

$$K = L \cdot \frac{l}{k} + \overline{L} \cdot \frac{l}{k}$$

oder

$$L + \overline{L} = K \cdot \frac{k}{l}.$$

Reduziert man die Nutzlast L und die Nebenlast $\bar{L}$ auf die Kraftstelle, so gilt jetzt

$$K = L' + \bar{L}',$$

während man bei Reduktion von K auf die Laststellen erhält

$$L + \bar{L} = K'.$$

Führt man den Wirkungsgrad η ein (vergl. S. 1401), so gilt

$$\eta = \frac{Ll}{Kk} = \frac{L'}{K} = \frac{L'}{L' + \bar{L}'} = \frac{L}{L + \bar{L}} = \frac{L}{K'}.$$

Bei gleichmäßiger Zuführung von Energie stellen derartige Gleichungen zwischen den zum Teil reduzierten Kräften natürlich auch die Arbeitsstärken für die Verzweigungen des entsprechenden Energiestromes (Roharbeit, Nutzarbeit, Nebenarbeit) dar, obwohl sie den eigentlichen Vorgang der Aufnahme, Weiterführung und Abgabe der Energie verschleiern.

Gelegentlich bieten diese veralteten Gleichungen mit ihrem Vergleich von Kraft und Last eine ganz zweckmäßige Veranschaulichung dar.

270. Die Arten der Roheenergie bezw. Roharbeit. Als Arten der aktuellen Energie, welche eine Maschine aufnimmt, sind vor allem zu nennen:

1. Die aktuelle Energie der Glieder belebter Wesen, welche aus der potentiellen Energie ihres Nerven- und Muskelsystems stammt.
2. Die aktuelle Energie des fließenden Wassers.
3. Die aktuelle Energie der bewegten Luft (des Windes).

Als Arten der potentiellen Energie, welche eine Maschine als aktuelle Energie aufnimmt, sind die auf S. 1365 zusammengestellten Arten sämtlich anzuführen.

Für die Beurteilung der Leistungen belebter Wesen sucht man erfahrungsmäßig die tägliche Arbeitsleistung festzustellen, und zwar stets für eine achtstündige Arbeitszeit. Bezeichnet man (vergl. S. 308, Nr. 67) die durchschnittlich angewandte Kraft durch K in Kilogramm und die durchschnittliche Geschwindigkeit von deren Verwendung durch v in Meter/Sekunde und die Arbeitszeit durch t in Sekunden, so ist die Arbeitsleistung $\mathfrak{A}$ in Meterkilogramm gegeben als

$$\mathfrak{A} = Kvt,$$

wobei $t = 8$ Std. $= 28\,800$ Sek. ist.

Für die Beurteilung einer Arbeitsleistung für die, von K, v, t verschiedenen Werte K', v', t' gilt erfahrungsmäßig die Gerstnersche Formel (vergl. S. 308) oder auch die Formel von Maschek; letztere lautet

$$K' = K\left(3 - \frac{v'}{v} - \frac{t'}{t}\right).$$

Die Arbeitsstärke ist Kv bezw. $K'v'$ und zwar in Meterkilogramm/Sekunde, oder $\frac{Kv}{75}$ bezw. $\frac{K'v'}{75}$ in Pferdestärken.

Die Werte von Kv schwanken bei einem Manne je nach der Art der Arbeitsleistung (ohne Gerät, am Hebel, an der Zugkette, am Steigrad u. s. w.) bei einer achtstündigen Arbeitszeit zwischen $6\frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}08$ P. S. und $12\frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}16$ P. S.; für einen Mann an der Kurbel gilt $8\frac{\text{mkg}}{\text{sec}} \sim 0{,}11$ P. S., woraus bei $t = 28\,800$ sec folgt (vergl. S. 308) $\mathfrak{A} = 230\,400$ mkg.

Für ein Pferd ohne Gerät ist $Kv = 75\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$, entsprechend dem eingeführten Werte der Pferdestärke, für ein Pferd am Göpel ist $Kv = 40\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$.

Für einen Ochsen ohne Gerät ist $Kv = 48\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$, für einen Ochsen am Göpel ist $Kv = 40\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$.

Für die Zugkraft eines Pferdes (K) verwendet man auch die Formel von Léchalas bei $t = 10$ Std. $= 36\,000$ Sek.

$$K = (W + L) \,.\, f \pm (W + L + Q)\, tng\, \alpha,$$

in welcher W, L und Q bezw. die Gewichte von Wagen, Ladung und Pferd, f den Koeffizienten der Gesamtreibung und $tng\,\alpha \sim sin\,\alpha$ die Steigung der Straße bezeichnen.

Für die Energie bewegter Massen (μ) gilt bei einer Geschwindigkeit v der Ansatz $E = \frac{1}{2}\mu v^2$.

Bezeichnet z. B. V die Wassermenge in Kubikmetern, welche in jeder Sekunde zum Aufschlagen kommt, so ist deren Gewicht $V \,.\, 1000$ kg und deren Masse $\frac{V \,.\, 1000}{g}$, so daß bei einer Geschwindigkeit $v\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ eine der Stärke des Energiestromes entsprechende rohe Arbeitsstärke von

$$\tfrac{1}{2}\frac{V \,.\, 1000}{g} \,.\, v^2 \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$$

anzusetzen ist.

Handelt es sich um bewegte Luft, von der 1 cbm das Gewicht γ kg hat, so ist unter gleichen Umständen für die rohe Arbeitsstärke anzusetzen

$$\tfrac{1}{2}\frac{V \,.\, \gamma}{g} \,.\, v^2 \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}.$$

Handelt es sich um Luft von mittlerem Zustande, so ist $\gamma \sim \frac{5}{4}$ kg.

Hat der Luftstrom senkrecht zur Bewegungsrichtung die Fläche f in Quadratmetern, so ist $V = f \,.\, v$ und demnach hat man als Arbeitsstärke

$$\frac{f \,.\, \gamma \,.\, v^3}{2\,g} \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{sec}},$$

woraus sich für $\gamma = \frac{5}{4}$ kg ergiebt $0{,}064\, f v^3$.

In der Praxis pflegt man gelegentlich die Strecke h, welche beim freien Fall der Entwickelung einer Geschwindigkeit v entspricht, als Geschwindig-

keitshöhe einzuführen und entsprechende Tabellen für die Umrechnung von v in h gemäß der Formel $v^2 = 2gh$ zu benutzen. Unter Einführung der Geschwindigkeitshöhe h in Metern nehmen die Formeln für die rohe Arbeitsstärke in Meterkilogramm/Sekunde des bewegten Wassers bezw. der bewegten Luft die Gestalt

$$(V \,.\, 1000) \,.\, h \quad \text{bezw.} \quad (V \,.\, \gamma)\, h$$

an.

Der potentiellen Energie sinkender Massen entspricht bei einem Gewicht Q in Kilogramm und einer Fallhöhe h die Arbeit $Q \,.\, h$.

Bezeichnet z. B. V die Wassermenge in Kubikmetern, welche in jeder Sekunde beim Sinken um h m ihre potentielle Energie abgiebt, so ist $Q = V \,.\, 1000$ und man hat als Ansatz für die rohe Arbeitsstärke

$$(V \,.\, 1000)\, h.$$

Diese Formel stimmt überein mit der Formel für die Arbeitsstärke des auffchlagenden Waffers, falls in letztere die Geschwindigkeitshöhe eingeführt wird.

Bei einer Dampfmaschine wird die potentielle Energie des gespannten Dampfes an den Kolben als aktuelle Energie übertragen. Diese läßt sich messen durch die Arbeit, welche an der Übergangsstelle geleistet wird, d. h. durch die Arbeit der Kolbenbewegung. Hat der treibende Dampf die konstante Spannung p, so ist sein Druck bei einer Kolbenfläche f als $f \,.\, p$ gegeben, so daß einem Kolbenhube von der Länge s die Arbeit fps entspräche, falls auf der anderen Seite des Kolbens keine Gegenspannung vorhanden wäre. Berücksichtigt man eine konstante Gegenspannung p', entsprechend dem Druck im Kondensator oder dem Druck der freien Atmosphäre u. s. w., so ist die Arbeit $fp's$ von fps in Abrechnung zu bringen. Man hat also hier für einen Kolbenweg s als Roharbeit anzusetzen

$$f(p - p') \,.\, s \,\text{mkg},$$

falls s in Metern, f in Quadratcentimetern und p und p' in Atmosphären, d. h. in Kilogramm/Quadratcentimeter gemessen werden.

Macht die Maschine n Spiele in der Minute, so wird der Weg s in der Minute, dem Hingange und Hergange entsprechend, $2n$ mal zurückgelegt, d. h. man hat hier als Arbeit für 1 Sek.

$$\frac{f(p - p') \,.\, s \,.\, 2n}{60} = \frac{n}{30} \cdot s \,.\, f \,.\, (p - p') \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}.$$

Führt man die mittlere Kolbengeschwindigkeit $c = \frac{n \,.\, 2s}{60} = \frac{n \,.\, s}{30}$ in $\frac{m}{\text{sec}}$ ein, so nimmt die Arbeitsstärke die Form an

$$f(p - p')\, c \text{ in } \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}.$$

Mißt man f in Quadratmetern und geht man gleichzeitig zu Pferdestärken über, so gilt für diese (N)

$$N = \frac{10000}{75} f(p - p')\, c.$$

Die abgeleitete Formel giebt für Maschinen ohne Expansion die rohe Arbeitsstärke angenähert an.

Wirkt der Dampf mit Expansion, so muß man für die Berechnung der veränderlichen Werte von p und p' die geltenden Beziehungen zwischen Spannung und Volumen kennen. Sind diese durch das Gesetz von Boyle-Mariotte bestimmt, so läßt sich ein Mittelwert berechnen, welcher statt des Faktors $p - p'$ in die Formel für die Arbeitsstärke einzuführen ist.

Bezeichnet man überhaupt den Mittelwert der Spannung, welcher bei veränderlichen Spannungen p und p' statt des Faktors $p - p'$ eingeführt werden muß, bei Eincylindermaschinen und auch bei Mehrcylindermaschinen durch p_i, so erhält man die stets brauchbare Gleichung für die rohe Arbeitsstärke in Pferdestärken

$$N = \frac{10000}{75} f p_i c,$$

in welcher f die wirksame Kolbenfläche in Quadratmetern, c die mittlere Kolbengeschwindigkeit in Meter/Sekunde und p_i die mittlere Spannung in Atmosphären bezeichnet.

Die Spannung p_i, welche bei Eincylindermaschinen den mittleren Spannungsunterschied hinter und vor dem Kolben darstellt, während sie bei Mehrcylindermaschinen eine entsprechende Deutung erhalten muß, wird in der Praxis als indizierte Spannung bezeichnet (vergl. die Marke i in p_i), weil sie an im Gange befindlichen Maschinen, abgesehen von dem Wege der Rechnung, mit Hülfe eines bestimmten Apparates, des Indikators gemessen werden kann.

Bei der Dampfmaschine liegt in Bezug auf die Bestimmung der rohen Arbeitsstärke insofern noch eine weitere Aufgabe vor, als diese rohe Arbeitsstärke einer bestimmten Wärmemenge entspricht, welche für die Erzeugung des Dampfes verwendet werden mußte. Rechnet man diese Wärmemenge in Arbeitseinheiten um (vergl. S. 1373), so zeigt sich, daß auch von dieser Wärmemenge nur ein Teil in Roharbeit umgesetzt wird, während ein anderer Teil der Energie, welcher der Wärmezufuhr entspricht, in anderer Weise abfließt. Man hat also hier zunächst einen thermischen Wirkungsgrad zu berücksichtigen, welcher das Verhältnis der in Roharbeit umgesetzten Wärmemenge zur gesamten aufgewendeten Wärmemenge angiebt, und außerdem noch den mechanischen Wirkungsgrad, welcher das Verhältnis der Roharbeit zur Nutzarbeit mißt; ersterer ist selbst bei günstigem Verhältnis sehr gering ($\sim 0{,}1$), letzterer schwankt zwischen 0,7 und 0,9, d. h. nur etwa 10 Proz. der aufgewendeten Wärmemenge gehen in Roharbeit über, während von dieser dann 70 bis 90 Proz. für Nutzarbeit und 30 bis 10 Proz. für Nebenarbeit anzusetzen sind.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch für Gasmaschinen, bei welchen der thermische Wirkungsgrad etwa 0,25 ist, für Petroleummotoren u. s. w.

In Bezug auf alle weiteren dergleichen Fragen sind die betreffenden Abschnitte des zweiten Bandes heranzuziehen.

In Bezug auf die Dynamomaschinen mag nur erwähnt werden,

daß bei ihnen auch der elektrische Wirkungsgrad von dem mechanischen Wirkungsgrad zu unterscheiden ist, im übrigen muß hier auf diesbezügliche Werke verwiesen werden.

271. Messungen an Maschinen, im besonderen in Bezug auf die Bestimmung von Roharbeit, Nutzarbeit und Nebenarbeit. Aus dem Überblick über die verschiedenen Arten der Roharbeit geht schon hervor, daß ihre Bestimmung von sorgfältigen Messungen abhängt, und Entsprechendes gilt natürlich auch für die Bestimmung der Nutzarbeit und der Nebenarbeit. Überhaupt ist in Bezug auf die kinetischen Konstruktionen des Maschinenbaus mit der Zeit im besonderen Maße[1]) das Bedürfnis fühlbar geworden, die bewährten Methoden der Physik (einschließlich der Chemie) auch innerhalb der Technik zu verwenden und sie deren Aufgaben anzupassen. Während eine eingehende Untersuchung der Materialien in Bezug auf ihre Elasticität und Festigkeit für alle Gebiete der Technik (vergl. S. 845) von grundlegender Bedeutung ist, erwächst in Bezug auf die kinetischen Konstruktionen des Maschinenbaus die besondere Aufgabe, auch die Übertragung und Verwandlung der Energie mit Hülfe von Beobachtungen und Experimenten zu untersuchen, eine Aufgabe, deren Behandlung über das Gebiet der eigentlichen Massenmechanik hinausführt, weil sie ohne Berücksichtigung der Wärmeerscheinungen und der elektromagnetischen Vorgänge und der chemischen Prozesse u. s. w. oft nicht gelöst werden kann.

Da die Energie als $\frac{1}{2}mv^2$ oder durch $K \,.\, k = (m \,.\, j) \,.\, k$ bestimmt erscheint, so fordert die Untersuchung von Energieübertragungen und Energieverwandlungen neben der Bestimmung von Zahlen vor allem sorgfältige Messungen der verschiedenen geometrischen, phoronomischen und dynamischen Größen, welche aus den Einheiten „Länge, Dauer und Masse“ aufgebaut erscheinen.

In Bezug auf die kinetischen Konstruktionen des Maschinenbaus bestehen die Hülfsmittel für diese Messungen zum Teil in Apparaten u. s. w., welche auch sonst verwendet werden, zum Teil in besonderen Vorrichtungen, welche namentlich auch durch die relativ großen, an und in den Maschinen wirkenden Kräfte bedingt sind.

Von derartigen besonderen Vorrichtungen sind hauptsächlich folgende zu erwähnen:

Sieht man von den Recheninstrumenten ab, welche zwar für die Technik und namentlich für den Maschinenbau eine besonders weitgehende Verwertung finden, aber doch in ihrer Verwendung nicht auf das Gebiet der Technik beschränkt sind, so sind vor allem die Zählwerke zu erwähnen. Diese haben den Zweck, die Anzahl von Umdrehungen sich drehender oder von Schwingungen hin- und hergehender Glieder einer Maschine u. s. w. für eine bestimmte Zeit festzustellen, wenn dazu die gewöhnliche Beobachtung mit Hülfe einer Uhr nicht ausreicht; als sogenannte Velocimeter (Geschwindig-

[1]) Entsprechendes dürfte auch in Bezug auf die statischen Konstruktionen des Wasserbaus gelten.

keitsmesser) sind diese Zählwerke ähnlich eingerichtet wie die bekannten Zählwerke der Sirenen, andere Formen entsprechen dem bekannten Schrittzähler.

Daß die Zählwerke gemäß der Gleichung

$$\text{Weg} = (\text{Geschwindigkeit}) \cdot (\text{Zeit})$$

in Verbindung mit Längenmessungen auch zur Feststellung von Wegen und von Geschwindigkeiten (natürlich von mittleren Geschwindigkeiten) dienen können, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Zur Messung von Längen dienen, abgesehen von den bekannten Hülfsmitteln, gelegentlich besondere Wegmesser, welche sich als einfache Umgestaltungen von Zählwerken darstellen.

Zur Messung von (ebenen) Flächen werden sogenannte Planimeter verwendet, unter denen Amslers Polarplanimeter wohl die meiste Verwendung finden; natürlich dienen diese Apparate, welche für den Maschinenbauer (z. B. bei Auswertung der Indikatordiagramme) geradezu unentbehrlich sind, nicht lediglich technischen Bedürfnissen.

Zur Messung von Körpern dienen, abgesehen von den bekannten Hülfsmitteln, namentlich die sogenannten Wassermesser und Gasmesser; sie sind Zählwerke, durch welche die Menge einer, in einer bestimmten Zeit durch einen bestimmten Querschnitt strömenden Flüssigkeit oder eines Gases (bei bestimmtem Druck u. s. w.) angegeben wird.

Zur Bestimmung der Zeitdauer dienen, abgesehen von den gewöhnlichen Uhren, entsprechende Apparate von sorgfältigerer Ausführung, welche meist als Chronometer bezeichnet werden; gelegentlich sind sie noch mit besonderen Registrierwerken versehen, welche die Dauer einer verflossenen Zeit für eine spätere Ablesung festhalten.

Zur Bestimmung von Geschwindigkeiten bezw. Beschleunigungen dienen einerseits sogenannte Tachometer, anderseits Strommesser, Windmesser u. s. w. Als Tachometer bezeichnet man die Instrumente, welche die relative Geschwindigkeit zweier Maschinenteile festzustellen gestatten, wenn dazu einfache Zählwerke nicht ausreichen; zu ihnen gehören die Fahrtmesser für Eisenbahnzüge, bei welchen die relative Geschwindigkeit der Lokomotive gegen die Schienenbahn durch ein eigenartiges, mit einer Achse des Fahrzeuges verbundenes Zählwerk bestimmt wird, ferner die Centrifugaltachometer, bei welchen die Geschwindigkeit einer Drehbewegung durch entsprechende Centrifugalkräfte gemessen wird.

Unter Strommessern versteht man Apparate, welche die relative Geschwindigkeit von Flüssigkeiten gegen feste Körper zu messen gestatten; neben den einfachen Schwimmern sind besonders Woltmanns hydrometrischer Flügel (verbessert durch Amsler und v. Wagner) und die Pitotsche Röhre zu erwähnen.

Demselben Zwecke dienen die Windmesser in Bezug auf Gase, wobei natürlich deren Zustand (p, v, T) genauer zu berücksichtigen ist.

Schließlich sind noch die einfacheren und verwickelteren Logs zu erwähnen, durch welche die Geschwindigkeit eines Schiffes auf See bestimmt wird.

Zur Bestimmung von Massen dienen die einfachen und die zusammengesetzten Hebelwagen, einschließlich der Wagen mit Laufgewichten und der sogenannten Neigungswagen (mit Winkelhebel, wie z. B. bei gewissen Formen der Briefwagen). Vergl. dazu S. 494.

Zur Messung von Kräften dienen zunächst die Federwagen, welche bei großer Ausführung als Dynamometer bezeichnet werden (vergl. dazu S. 17). Um im besondern die Spannungen von Flüssigkeiten oder Gasen zu messen, verwendet man sogenannte Manometer (eigentlich Dichtigkeitsmesser); bei ihnen wird der zu messende Druck entweder mit dem Gewichte einer Sperrflüssigkeit (Quecksilber oder Wasser) oder mit der Belastung eines Ventils oder mit dem Druck oder Zug einer Feder zum Gleichgewicht gebracht, und dementsprechend gemessen.

Um die Energie durch eine ihrer Übertragung bezw. Umwandlung entsprechende Arbeitsleistung zu messen, dienen vor allem die Bremsdynamometer, deren wichtigstes, der Pronysche Zaum, auf S. 599 f. ausführlicher betrachtet wurde. Mit diesem Dynamometer kann man die Übertragung der Energie von Welle zu Welle innerhalb einer Maschine messen, und so den Energiestrom innerhalb der Maschine mit seinen, den einzelnen Teilen der Nebenarbeit und der Nutzarbeit entsprechenden Verzweigungen verfolgen. Man beginnt bei der Welle der Kraftmaschine (Motor), also z. B. mit der Welle eines Wasserrades oder einer Turbine oder der Schwungradwelle einer Dampfmaschine, indem man alle mit ihr in Eingriff stehenden Teile der Maschine ausrückt und dafür das Bremsdynamometer anbringt. Ist die Tourenzahl im Betriebe n, während sie bei dem Leerlauf auf n' steigt, so bremst man so stark, daß die Tourenzahl wieder auf n zurücksinkt; dabei zwingt man die Energie, welche im Betriebe als aktuelle Energie von der Welle abfloß, unter Reibungsarbeit als potentielle Energie abzufließen, deren Wert durch die dabei gemessene Reibungsarbeit bestimmt ist. Vergleicht man die so bestimmte nutzbare Energie mit der rohen Energie, so giebt der Unterschied die der Nebenarbeit entsprechende Energie an, welche von der Aufnahme der rohen Energie bis zur Abgabe durch die Hauptwelle nutzlos abgeflossen ist. Giebt die Hauptwelle an verschiedenen Stellen Energie ab, so kann man nun ferner deren Verteilung dadurch bestimmen, daß man der Reihe nach immer für eine Stelle die mit ihr in Eingriff stehenden Teile ausrückt und das oben angegebene Bremsverfahren wiederholt.

Indem man nun den von der Hauptstelle abfließenden Strom der Energie bezw. deren verschiedene Ströme von Welle zu Welle weiter verfolgt, gewinnt man nach und nach ein Bild der Verzweigung des Energiestromes, rücksichtlich der einzelnen Teile der Nebenarbeit und der Nutzarbeit.

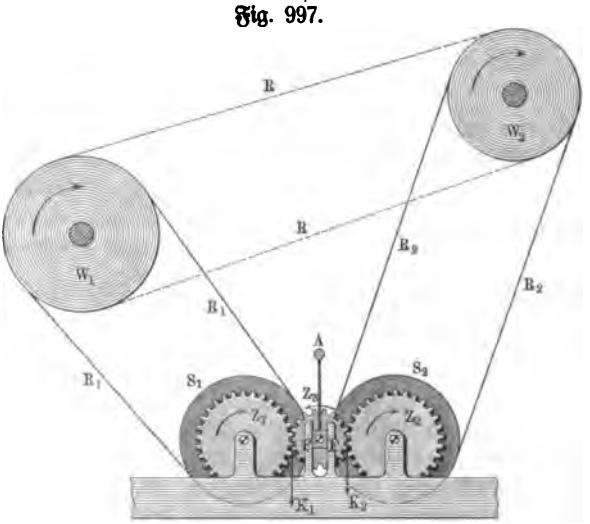
Während die Bestimmung der gesamten Energie für die Hauptwelle gemäß diesem Verfahren völlig einwandsfrei ist, sind die weiteren Bestimmungen an die Voraussetzung gebunden, daß der Energiebedarf für die jedes Mal im Betriebe bleibenden Teile der Maschine während der Dauer aller Versuche eine Konstante ist.

Da die Berechtigung dieser Voraussetzung nicht zweifellos ist, so wendet man bei der weiteren Verfolgung des Energiestromes statt des Bremsdynamo-

meters noch andere Vorrichtungen an, welche als Transmiſſionsdynamometer bezeichnet werden. Den Ausgangspunkt für alle dieſe Vorrichtungen bildet die ſogenannte dynamometriſche Wage von Hachette, welche Fig. 997 in ihrer Verwendung darſtellt.

Wenn eine wagerechte Welle W_1 im Betriebe durch einen Riemen R auf eine parallele Welle W_2 Energie überträgt, ſo löſt man, um dieſe zu meſſen, den Riemen R und verbindet ſtatt deſſen W_1 durch den Riemen R_1 mit der einen Riemenſcheibe S_1 und W_2 durch den Riemen R_2 mit der anderen Riemenſcheibe S_2 der Wage von Hachette, deren Riemenſcheiben unter Vermittelung des Zahnrades Z_3 durch die Zahnräder Z_1 und Z_2 in Verbindung ſtehen. Statt der gewöhnlichen Übertragung der Energie von W_1 nach W_2 durch R findet alſo hier die Übertragung durch R_1, Z_1, Z_3, Z_2, R_2 ſtatt. Während die Lager von Z_1 und Z_2 feſt ſind, ſind die beweglichen Lager von Z_3, welche in vertikalen Führungen F gleiten, durch eine gegabelte Stange an dem einen Arme A einer Hebelwage aufgehangen, durch welche alſo der auf Z_3 bei der Übertragung ausgeübte Druck unmittelbar gemeſſen werden kann. Dieſer Druck beſteht in dem Druck $[K_1]$, den Z_1 auf Z_3 ausübt und aus der Reaktion $[K_2]$ des Drucks, den Z_3 auf Z_2 ausübt bei der Übertragung der Energie. Iſt G das Gewicht von Z_3, ſo giebt die Belaſtung Q der Wage die Größe $K_1 + K_2 + G$, d. h. es iſt $K_1 + K_2 = Q - G = Q'$. Man hat $K_1 \sim K_2$ und zwar iſt $K_2 < K_1$, wegen der Zahnreibung zwiſchen Z_1 und Z_3 und wegen der Zapfenreibung von Z_3. Für eine erſte Unterſuchung iſt $K_1 = K_2 = \frac{1}{2} Q'$ als der Druck zwiſchen den Rädern Z_1 und Z_3 bezw. Z_3 und Z_2 anzuſehen, ſo daß alſo zwiſchen ihnen die Energie $\frac{1}{2} Q' v$ übertragen wird, falls v die Geſchwindigkeit der Räder für die Angriffsſtelle von $[K_1]$ oder $[K_2]$ bezeichnet.

Fig. 997.



Bei genauerer Betrachtung iſt

$$K_2 + f_z \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot Q' + R = K_1,$$

falls f_z den Koeffizienten der Zapfenreibung für Z_3, ϱ den Radius des Zapfens und r den Hebelarm von $[K_1]$ oder $[K_2]$ bezeichnet, und R die Reibung zwiſchen Z_1 und Z_3 bedeutet.

Setzt man R gemäß Formel Nr. 190) an als

$$K_1\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\pi f$$

für f als Reibungskoeffizienten zwischen den Zähnen von Z_1 und Z_3 und für ε_1 und ε_3 als entsprechende Zähnezahlen, so ist wegen $K_1 = Q' - K_2$

$$K_2 = \frac{1 - f_z \cdot \frac{\varrho}{r} - F}{2 - F} \cdot Q'$$

für $F = \left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\pi f$.

Da F relativ klein ist, so gilt nach Erweiterung mit $2 + F$ unter Vernachlässigung von F^2 auch

$$K_2 = \tfrac{1}{2} Q'\left(1 - f_z \cdot \frac{\varrho}{r} - \tfrac{1}{2} F\right).$$

Da durch die Zahnreibung zwischen Z_3 und Z_2 von K_2 der Bruchteil

$$K_2\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\pi f$$

verloren geht, welcher für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ den Wert $K_2 F$ hat, so wirkt auf Z_2 thatsächlich nur die Kraft

$$K_2 - K_2 F = K_2(1 - F),$$

welcher die Arbeitsstärke

$$K_2(1 - F)v$$

entspricht. Demnach hat die auf R_2 übertragene Energie den Wert $K_2(1 - F)v$ oder für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\tfrac{1}{2} Q'\left[1 - f_z \frac{\varrho}{r} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\pi f\right] . v.$$

In Bezug auf die vielfach verbesserten Formen der betrachteten Dynamometer und ihre Ergänzungen durch Registrierapparate, sowie in Bezug auf ihre Umänderung für den Gebrauch an vertikalen Wellen u. s. w. muß auf die betreffenden einschlägigen Werke bezw. Abhandlungen verwiesen werden.

Dagegen mag noch besonders erwähnt werden, daß man außerdem auch Vorrichtungen eingeführt hat, welche als Formänderungsdynamometer bezeichnet werden können, weil sie die bei der Übertragung der Energie auftretende Formänderung messen, z. B. die Verdrehung einer Welle (vergl. dazu S. 1107).

Mit Rücksicht auf die überaus wichtige Bestimmung der rohen Energie bei Dampfmaschinen betrachten wir noch die Vorrichtungen zur registrierenden Messung der Dampfspannung im Cylinder, welche Indikatoren genannt werden (vergl. S. 1407). Diese Apparate lassen sich überhaupt für die Messung der Spannung von Flüssigkeiten und Gasen verwenden, wenn diese unter ähnlichen Umständen wirken, wie der Dampf im Cylinder einer Dampfmaschine, also z. B. bei Gasmotoren, oder auch bei Pumpen u. s. w.

Ein Indikator entspricht einem kleinen Cylinder nebst Kolben einer Dampfmaschine, der mit einer Registriervorrichtung versehen ist. Die eine

Seite des Indikatorcylinders läßt sich z. B. mit einer Bohrung im Deckel des Cylinders der Dampfmaschine, welche untersucht werden soll, dampfdicht verbinden, während die andere offene Seite eine Spiralfeder enthält, gegen welche der Kolben drückt. Die Pressung der Feder wird durch eine Registriervorrichtung auf einen Zeichenstift übertragen, durch den man die Dampfspannung als Ordinate zu dem Kolbenweg als Abscisse erhalten kann; solche Zeichnungen heißen Indikatordiagramme (vergl. Bd. II, S. 82 f.). Verwendet man zugleich zwei Indikatoren, von denen je einer mit je einem Deckel des Cylinders der Dampfmaschine verbunden ist, so erhält man zugleich die Spannung vor und die Spannung hinter dem Kolben. Man hat auch Doppelindikatoren konstruiert, welche zwei einfache, in der beschriebenen Art zugleich arbeitende Indikatoren ersetzen.

Für die technischen Messungen im Gebiet der Wärmeerscheinungen, der elektromagnetischen Vorgänge u. s. w. hat die Technik auch zunächst die entsprechenden, der physikalischen Forschung dienende Vorrichtungen benutzt, ist aber dann auch hier zu eigentlichen, den technischen Zwecken angepaßten Gestaltungen der Instrumente u. s. w. fortgeschritten; wir müssen in Bezug auf diese Messungen wieder auf die einschlägige Litteratur verweisen.

272. Der Gang der Maschine. Wird eine unthätige Maschine durch einen Energiestrom in Gang gebracht, so wird zunächst ein Teil der Energie dazu verwandt, um den materiellen Punkten der Maschine bestimmte und zwar zweckmäßige Geschwindigkeiten zu erteilen; man bezeichnet diesen Teil des Ganges der Maschine als deren Anlauf. Wird eine thätige Maschine wieder außer Gang gesetzt, so bewegen sich ihre Glieder infolge ihrer Energie noch eine Zeit lang, ehe sie zur Ruhe kommen; man bezeichnet diesen Teil des Ganges der Maschine als deren Auslauf.

Der Gang einer Maschine wird gleichförmig genannt, wenn jeder ihrer materiellen Punkte in der ganzen Zeit zwischen Anlauf und Auslauf dieselbe Geschwindigkeit zeigt.

Das ist im allgemeinen nur möglich, wenn die Bewegungen aller Glieder der Maschine nur in Drehungen um feste Achsen bestehen, da jede andere Bewegung Verschiebungskomponenten hat, denen innerhalb einer geschlossenen Kette Umkehrpunkte (mit der Geschwindigkeit Null) entsprechen müssen.

Bei einer elektrischen Bahnanlage, deren Strom nur rotierende Bewegungen hervorruft, würde bei unendlich-langem, wagerecht gelagertem Geleise eine Gleichförmigkeit des Ganges zu erzielen sein.

Kommen in dem Getriebe einer Maschine andere Bewegungen vor als Drehungen um feste Achsen, so ist nur ein möglichst gleichförmiger Gang zu erzielen, d. h. man kann nur bei bestimmten materiellen Punkten bezw. Gliedern der Maschine zwischen Anlauf und Auslauf eine relativ konstante Geschwindigkeit erreichen.

Bei jedem bewegten Getriebe können sich die gegenseitigen Stellungen seiner Glieder nach Ablauf einer bestimmten Reihe dieser Stellungen wieder-

holen; man bezeichnet die kleinste Reihe dieser Stellungen, nach deren Ablauf eine Wiederholung eintritt, als die Periode des Getriebes.

Bei den meisten im Gange befindlichen Maschinen durchlaufen deren Getriebe ihre Perioden in stetigem Anschlusse, wobei der Periode der Kraftmaschine eine besondere Bedeutung zukommt.

Bei einer Dampfmaschine entspricht z. B. einem ganzen Kolbenwege (Hingang und Hergang) eine volle Umdrehung der Schwungradwelle, so daß der Gang der Maschine hier, ganzen Kolbenwegen bezw. vollen Umdrehungen der Schwungradwelle entsprechend, in einzelne Perioden zerfällt. Treibt die Dampfmaschine eine Arbeitsmaschine oder mehrere, so sind diese Perioden der Kraftmaschine für die ganze Maschine maßgebend, d. h. man betrachtet die Perioden der einzelnen Getriebe, welche durch die Kraftmaschine bewegt werden, stets im Hinblick auf deren Periode.

Bei einer Hebevorrichtung werden dagegen die Perioden des Getriebes (voller Aufzug und voller Niedergang) durchaus nicht immer vollständig und auch nicht immer im stetigen Anschlusse durchlaufen.

Wenn die Periode eines Getriebes für jeden materiellen Punkt desselben auch eine entsprechende Periode seiner Geschwindigkeitsänderung ist, d. h. wenn jeder Punkt dieselbe Geschwindigkeit erhält, so oft das Getriebe dieselbe Stellung hat, so kann man die Betrachtung des Ganges der Maschine auf eine Periode beschränken.

Ist diese Voraussetzung für alle Perioden zwischen Anlauf und Auslauf erfüllt, so sagt man, daß sich die Maschine im Beharrungszustande befindet.

Für den Beharrungszustand lassen sich die allgemeinen Bedingungen für einen möglichst gleichförmigen Gang der Maschine folgendermaßen feststellen.

Haben die materiellen Punkte der Maschine, deren Geschwindigkeiten konstant gehalten werden sollen bezw. die Massen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und zur Zeit t die Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots$, so ist deren (aktuelle) Energie zur Zeit t durch $E = \frac{1}{2}\mu_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2 v_2^2 + \cdots$ darstellbar, während die Energie aller materiellen Punkte der Maschine zur Zeit t durch $E + \overline{E}$ bezeichnet werden kann, falls $\overline{E}$ die Punkte umfaßt, deren Geschwindigkeiten nicht konstant sein können. Vergleicht man die gesamte Energie $E_1 + \overline{E}_1$ zur Zeit t_1 mit der Energie $E_2 + \overline{E}_2$ zur Zeit t_2, so ist deren Änderung

$$(E_2 - E_1) + (\overline{E}_2 - \overline{E}_1)$$

als ein Teil der Nebenarbeit (A_2) der Maschine anzusehen.

Diese Nebenarbeit entspricht außerdem der Überwindung der Bewegungswiderstände (Reibung u. s. w.), der unvermeidlichen Hebung und Senkung der Schwerpunkte einzelner Glieder der Maschine (z. B. eines Sägegatters in einer Schneidemühle) und der aktuellen Energie, welche etwa ungenutzt abfließt, wie z. B. die des Wassers, welches eine Turbine noch mit Geschwindigkeit verläßt.

Bezeichnen wir diese Werte der Nebenarbeit für die Zeit zwischen t_1

und t_2 bezw. durch $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$ und $\mathfrak{A}_2'''$, so gilt, falls der Arbeitswert der rohen Energie und die Nutzarbeit für dieselbe Zeit bezw. durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2'' + \mathfrak{A}_2''' + (E_2 - E_1) + (\bar{E}_2 - \bar{E}_1),$$

woraus folgt

$$(E_2 - E_1) = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_2'' - \mathfrak{A}_2''' - (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \quad . \quad 578)$$

Soll nun $E_2 - E_1 = 0$ sein, so muß die rechte Seite der Gleichung Nr. 578) verschwinden.

Da $\mathfrak{A}_2'''$ den Arbeitswert der etwa *ungenutzt* abfließenden aktuellen *Energie* bezeichnet, so kann man diese berücksichtigen, indem man anstatt $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_2'''$ als rohe Arbeit ansetzt.

Das Glied $\mathfrak{A}_2''$, welches die Arbeit der *Hebung und Senkung* der Schwerpunkte einzelner Glieder der Maschine darstellt, kann man unter Voraussetzung gut centrierter Räder u. s. w. zu Null machen, indem man dem Getriebe noch eine Anzahl von Körpern als *Gegengewichte* zufügt, die sich so bewegen, daß die Schwerpunkte jener Glieder und der hinzugefügten Gegengewichte unveränderliche Höhenlagen behalten; man bezeichnet solche Gegengewichte als *Gewichtsregulatoren*. Unter diesen Voraussetzungen geht Gleichung Nr. 578) über in

$$0 = \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2' - (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 579)$$

Hat die rohe Energie $\mathfrak{A}'$ für eine Reihe aufeinander folgender und unter sich gleicher Zeitelemente τ denselben Wert, so muß für jedes Zeitelement τ die Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2' + (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = \text{Konstante}$$

bestehen.

Soll nun auch die Nutzarbeit $\mathfrak{A}_1$ für jedes Zeitelement τ einen konstanten Wert haben, so muß auch dauernd die Gleichung

$$\mathfrak{A}_2' + (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = \text{Konstante}$$

bestehen.

Betrachtet man diese Gleichung während einer *Periode* der Kraftmaschine unter der gemachten Voraussetzung, daß auch die Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte für dieselben Stellungen der Getriebe denselben Wert haben, so ist $\Sigma(\bar{E}_2 - \bar{E}_1)$ für eine solche Periode Null, und es muß also $\mathfrak{A}_2'$ innerhalb einer solchen Periode eine Konstante sein.

Da die Größe $\bar{E}_2 - \bar{E}_1$ innerhalb der Periode nicht dauernd Null ist, so hat sie innerhalb einer Periode für gewisse Gebiete von Zeitelementen positive und für gewisse andere Gebiete negative Werte, und demnach muß $\mathfrak{A}_2'$ innerhalb einer Periode bestimmte, dadurch bedingte Schwankungen zeigen.

Um der Nebenarbeit $\mathfrak{A}_2'$ diese Schwankungen zu ermöglichen, hat man an der Maschine Vorrichtungen anzubringen, welche innerhalb jeder Periode bei positiven Werten von $\bar{E}_2 - \bar{E}_1$ die überschüssige Energie sammeln, um sie wieder abzugeben, so lange $\bar{E}_2 - \bar{E}_1$ negativ ist.

Man kann die Energie als aktuelle Energie sammeln und abgeben, indem man in das Getriebe einen dazu geeigneten Körper als *Massen-*

regulator einführt, wie ihn z. B. das Schwungrad darstellt, dessen Theorie auf S. 754 f. ausgeführt wurde.

Man kann die Energie auch als potentielle Energie sammeln und abgeben, indem man als Gewichtsregulatoren Körper einführt, welche abwechselnd gehoben und gesenkt werden, oder als elastische Regulatoren Federn bezw. andere elastische Körper (vergl. z. B. die Einrichtung der Windkessel), welche abwechselnd gespannt und entlastet werden; man bezeichnet diese Regulatoren auch im besonderen als Akkumulatoren.

Man erreicht auf diese Weise für die Punkte, deren Geschwindigkeiten konstant bleiben sollen, unter der gemachten Voraussetzung, daß $\overline{E}_2 - \overline{E}_1$ nicht Null ist, selbstverständlich nur eine beliebige Einschränkung der Schwankungsgrenzen für ihre Geschwindigkeit (vergl. die Betrachtungen über den Ungleichförmigkeitsgrad auf S. 762 f.).

Da für $\overline{E}_2 - \overline{E}_1 = 0$ die gewünschte Konstanz thatsächlich genau zu erreichen wäre, so hat man die Masse der Teile, von denen $\overline{E}_2 - \overline{E}_1$ abhängt, relativ klein zu machen gegenüber der Masse der Teile, für welche $E_2 - E_1 = 0$ sein soll, d. h. man hat die gesamte Masse der schwingenden Teile der Mechanismen (z. B. Kolben mit Kolbenstange) und der Teile, welche verwickeltere Bewegungen ausführen (z. B. Schubstange) relativ klein zu halten gegenüber der gesamten Masse der Teile, welche sich um feste Achsen drehen (z. B. Schwungrad, Wellen u. s. w.).

Die ganze Betrachtung gilt auch noch sinngemäß weiter, wenn die Nutzarbeit A_1 dem Zweck der Maschine entsprechend eine periodisch veränderliche Größe ist, wie es z. B. bei den Walzwerken der Fall ist, wobei dann $A' - A_1$ in Gleichung Nr. 579) für eine Periode der Arbeitsmaschine als Konstante anzusehen ist.

Wird durch eine unbeabsichtigte Änderung der Arbeitsstärke, welche der rohen Energie entspricht, oder durch eine unbeabsichtigte Änderung der Stärke der Nutzarbeit eine Änderung im Gange einer im Beharrungszustande arbeitenden Maschine hervorgerufen, so reichen die erwähnten Regulatoren im allgemeinen nicht aus, um den Beharrungszustand zu erhalten bezw. um einen solchen einzuleiten. Für solche Fälle sind die Maschinen noch mit besonderen selbstthätigen Vorrichtungen versehen, welche entweder die Zufuhr der rohen Energie oder die Art und Menge der zu leistenden Arbeit regeln und demnach als Regulatoren für Kraftmaschinen (z. B. Schwungkugelregulator mit Drosselung bei Dampfmaschinen) und als Regulatoren für Arbeitsmaschinen unterschieden werden.

Dieselben Vorrichtungen können auch dazu dienen, einen bestimmten Beharrungszustand in einen neuen Beharrungszustand überzuführen, wenn absichtlich eine Änderung der Arbeitsstärke der rohen Energie oder der Stärke der Nutzarbeit (z. B. durch Einrücken oder Ausrücken von Arbeitsmaschinen) erfolgt.

Für die Regelung des Ganges einer Maschine kommen endlich noch die verschiedenen Bremswerke (vergl. S. 604) in Frage, welche sowohl dazu

dienen, eine Geschwindigkeit auf eine bestimmte, von Null verschiedene Größe herabzudrücken, als auch den Auslauf einer Maschine einzuleiten. Sie verwandeln also wie die oben angeführten Akkumulatoren überschüssige aktuelle Energie in potentielle Energie (Wärme u. s. w.), stehen aber insofern zu jenen im Gegensatz, als diese potentielle Energie dort in aktueller Form wiedergewonnen werden kann, hier aber nicht. Trotzdem ist die Arbeit der Bremswerke gelegentlich als Nutzarbeit zu betrachten, z. B. bei dem Ablassen einer Last unter gleichförmiger Geschwindigkeit, da diese bei freiem Falle teilweise oder gänzlich zerstört werden würde.

Sind die Bewegungen innerhalb einer Maschine nur Drehungen um feste Achsen, so kann ihr Gang völlig gleichförmig sein, so daß $\overline{E}_2 - \overline{E}_1$ in Gleichung Nr. 578) und Nr. 579) den Wert Null hat; es ist dann

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2' = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf das Princip der virtuellen Verrückungen (vergl. S. 482) folgt, daß die Kräfte, welche der Roharbeit, Nutzarbeit und Nebenarbeit entsprechen, in diesem Falle ein im Gleichgewicht befindliches System bilden.

273. Die Widerstandsfähigkeit der Maschinenglieder; theoretische und empirische Abmessungen. Mag es dem Zweck einer Maschine entsprechen, Nutzarbeit ($\mathfrak{A}_1$) zu liefern oder nicht, jedenfalls ist es geboten, die Nebenarbeit ($\mathfrak{A}_2$) zu einem Minimum zu machen, um den Energieverbrauch herunterzusetzen. Damit wird zugleich eine möglichst lange Erhaltung der Widerstandsfähigkeit (vergl. S. 5 u. 6) der Maschine erreicht, weil der wesentliche Teil der Nebenarbeit $\mathfrak{A}_2'$ der Überwindung der Bewegungswiderstände, auch einschließlich von Stößen innerhalb der Maschine, entspricht und weil diese Überwindung zugleich mit einer Abnutzung der betreffenden Teile verbunden ist.

Um die Nebenarbeit zu einem Minimum zu machen, hat man vor allem Stöße innerhalb der Maschine möglichst zu vermeiden, weil ihnen stets ein Verlust an aktueller Energie entspricht gemäß der dabei bleibenden Formänderung; lassen sich solche Stöße nicht vermeiden (vergl. z. B. die Puffer der Eisenbahnwagen), so hat man die Stoßstelle aus möglichst elastischen Materialien zu bilden.

Ist die Nutzarbeit durch Stöße bedingt, wie z. B. bei Hammerwerken, Stampfen u. s. w., so ist dieser Arbeitsverbrauch und eine größere Abnutzung natürlich unvermeidlich.

Um die Nutzarbeit zu einem Minimum zu machen, hat man ferner die Reibung durch die Art der Konstruktion (z. B. Verwendung rollender Bewegungen statt gleitender) und durch Anwendung von Schmiermitteln möglichst herabzudrücken, ebenso auch die anderen Bewegungswiderstände (z. B. Seilsteifigkeit) möglichst zu verkleinern.

Was die Wahl der Abmessungen für die einzelnen Glieder einer Maschine mit Rücksicht auf die zulässigen Spannungen anlangt, so wurde bereits bemerkt (vergl. S. 1315), daß man sich vielfach darauf beschränken muß, die bewegten Teile einer Maschine so zu berechnen, als wenn

sie einer statischen Konstruktion angehörten, und den Unterschied immer bei der Wahl der Konstanten (vergl. Tragfestigkeit und Arbeitsfestigkeit, S. 856) zu berücksichtigen.

Wie der Ansatz für eine genaue Behandlung durch das Princip von d'Alembert zu ermöglichen ist, wurde in dem § 246 dargelegt, zugleich aber auch darauf hingewiesen, daß die Durchführung der einzelnen Aufgaben gemäß einem solchen Ansatze nur selten möglich ist, teils an und für sich, teils mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis.

Infolgedessen spielen neben den, auf Grundlage der erfahrungsmäßig gestützten Theorie berechneten Abmessungen im Maschinenbau auch vielfach Abmessungen eine Rolle, welche man als empirische Abmessungen bezeichnet, weil sie lediglich durch die Erfahrung der Konstrukteure, natürlich auch im Hinblick auf ausgeführte und bewährte Konstruktionen, bestimmt werden; in dieser Hinsicht hat jede bewährte Fabrik ihre eigene Überlieferung.

Auf Grund dieser Sachlage pflegt man in der Praxis die Abmessungen bewegter Maschinenteile folgendermaßen zu bestimmen. Nachdem gemäß der zu übertragenden Energie die Größtwerte der Kräfte, welche auf den Maschinenteil wirken, wenigstens angenähert bestimmt sind, werden dessen Abmessungen unter Einführung von k_1, k_2, t u. s. w. berechnet, als wenn es sich um eine statische Konstruktion handelte, und zwar zunächst unter Vernachlässigung des Eigengewichtes des Maschinenteiles. Aus den so gefundenen Abmessungen bestimmt man darauf das Eigengewicht und wiederholt, falls dasselbe den wirkenden Kräften gegenüber relativ groß ist, unter dessen Berücksichtigung die erste Rechnung, wobei man verbesserte Abmessungen erhält, denen auch ein verbessertes Eigengewicht entspricht. Nach Bedarf ist dieses Verfahren zu wiederholen.

Die Zahlenwerte für k_1, k_2, t u. s. w. sind meist für verschiedene Teile einer Maschine je nach der Beanspruchung verschieden anzusetzen, wobei auf Materialreibung, Abnutzung, Stöße, Erschütterungen u. s. w. von Fall zu Fall gemäß praktischer Erfahrung Rücksicht zu nehmen ist.

Oft müssen die so gefundenen Abmessungen der Maschinenteile noch mit Rücksicht auf Erfahrungen an ausgeführten und bewährten Konstruktionen weiter verbessert werden, und gelegentlich muß auch der ganze Ansatz für die Abmessungen lediglich empirisch geschehen, wobei aber doch die Lehre von der Elasticität und Festigkeit stets die allgemeinen Anhaltspunkte für die praktischen Erwägungen liefert.

Hat man z. B. für die Beziehung von Zapfenlänge l und Zapfendurchmesser d unter bestimmten Bedingungen durch theoretische Betrachtungen den Ansatz

$$l = a + b \cdot d$$

erhalten, in welchem a und b Konstanten bezeichnen, deren Werte theoretisch nicht ausreichend bestimmbar sind, so kann man an einer Reihe von Zapfen, welche unter denselben Bedingungen in einer Maschine thätig sind, die Größen l und d messen, und damit a und b bestimmen. Für je zwei Zapfen von den Längen l_1 und l_2 und den Durchmessern d_1 und d_2 erhält man hier

$$l_1 = a + bd_1 \quad \text{und} \quad l_2 = a + bd_2,$$

woraus sich ergiebt

$$a = \frac{l_2 d_1 - l_1 d_2}{d_1 - d_2} \quad \text{und} \quad b = \frac{l_1 - l_2}{d_1 - d_2}.$$

Erhält man für a und b bei einer größeren Reihe von ausgeführten Zapfen, die sich bewährt haben, auf diese Weise nahezu dieselben Werte, so kann man mit ihnen die Formel $l = a + b \,.\, d$ bilden, andernfalls müssen weitere Überlegungen auf Grundlage von Erfahrungen eintreten.

Das sogenannte konstruktive Gefühl, durch welches geniale Maschinenbauer bei der Wahl der Abmessungen fast immer richtig geleitet werden, beruht zum Teil auf einer besonderen Anlage, gelangt aber anderseits nur durch Erfahrungen auf Grundlage theoretischer, sich gelegentlich allerdings nicht in den gewöhnlichen Bahnen bewegender Überlegungen zu voller Ausbildung.

Natürlich sind bei der Bestimmung der Maschinenteile nach Form und Inhalt nicht bloß die Rücksichten auf die Elasticität und Festigkeit der Materialien bestimmend, sondern auch ökonomische und ästhetische Erwägungen. In erster Hinsicht sucht man zu erreichen, daß die Herstellungskosten möglichst klein sind, daß die unvermeidliche Abnutzung möglichst gering ist und daß die laufenden Reparaturen sich in bestimmten Grenzen halten; in letzterer Hinsicht strebt man ein gefälliges Äußere der einzelnen Teile und der ganzen Maschine an, gemäß denselben künstlerischen Gesetzen, welche für die statischen Konstruktionen des Hochbaus und des Ingenieurbaus maßgebend sind.

274. Statische Konstruktionen als Grenzfälle kinetischer Konstruktionen. Die grundlegende Auffassung, von der wir ausgingen (S. 2), wonach die Ruhe als Grenzfall der Bewegung erscheint, bewährt sich auch darin, daß die statischen Konstruktionen durchaus als Grenzfälle kinetischer Konstruktionen angesehen werden können. Bei den Maschinen, in denen sich kinetische Konstruktionen mit statischen Konstruktionen zu einem Ganzen verbinden, tritt die Berechtigung dieser Auffassung zunächst klarer zu Tage, als bei den statischen Konstruktionen des Hochbaus und des Ingenieurbaus. Reuleaux[1]) hat bei der „Bauanalyse" der Maschinen darauf hingewiesen, daß die statischen Konstruktionen den zwangläufigen und geschlossenen Ketten der Getriebe als übermäßig geschlossene Ketten oder Paare gegenüberstehen. Das Schraubenpaar, welches im Prägewerk u. s. w. innerhalb eines Getriebes wirkt, dient bei übermäßigem Schluß als Schraubenbefestigung (z. B. bei Lagern, Schubstangen, Schienen u. s. w.); Prismenpaare und Prismenkette dienen bei übermäßigem Schluß als Keilbefestigungen, Drehkörperpaare werden mit übermäßigem Schluß als Nietungen verwendet u. s. w.

Bei den statischen Konstruktionen des Hochbaus und des Ingenieurbaus bestätigen zunächst die Gelenkverbindungen der Dachbinder und der Brückenträger die angegebene Auffassung, da die unverschieblichen Dreiecke dieser Konstruktionen dreigliedrige Ketten aus Drehkörperpaaren sind mit über-

[1]) Vergl. Lehrbuch der Kinematik, Bd. II, S. 255 f., 1900.

mäßigem Schluß (vergl. S. 1391), und da Entsprechendes auch für die anderen Verbindungen innerhalb dieser Konstruktionen gilt.

Bei statisch-bestimmten Trägern ist das Übermaß des Schlusses gerade ausreichend, um die Unbeweglichkeit zu erzielen, während bei statisch-unbestimmten Trägern dieses Übermaß des Schlusses noch gesteigert erscheint. Auch die Behandlung der Träger hat deutliche Beziehungen zu der kinetischen Betrachtung der Mechanismen, wie aus der Theorie der Fachwerke (vergl. S. 1162 f.) hervorgeht.

Diese Auffassung bestätigt sich aber auch sonst, zunächst in Bezug auf Schraubenverbindungen, Keilverbindungen, Nietungen u. s. w., welche bei den statischen Konstruktionen des Hochbaus und Ingenieurbaus dieselbe Rolle spielen, wie bei den statisch konstruierten Teilen der Maschinen.

Auch die einfache Auflagerung eines Balkens entspricht einem Plattenpaare, das durch seitliche Befestigungen und durch den Kraftschluß des Eigengewichtes übermäßig geschlossen ist, und Entsprechendes gilt für das Drehkörperpaar der einen Seite eines Rollenlagers.

Namentlich weist auch die zweckmäßige Verwendung des *Princips der virtuellen Verrückungen innerhalb der Statik* auf die Berechtigung der ganzen Auffassung hin, da dieses Princip der *Gleichung zwischen Energie und Arbeit*

$$E_2 - E_1 = \mathfrak{A}$$

entspricht für den Sonderfall $E_2 - E_1 = 0$.

Gerade daraus geht aber anderseits hervor, daß der *grundlegende Unterschied zwischen statischen und kinetischen Konstruktionen* durch die betrachtete Auffassung nicht verwischt wird; bei letzteren handelt es sich stets um *Energieübertragungen und um die Berücksichtigung von Effektivkräften*, bei ersteren nur um das *Gleichgewicht der Kräfte* unter gelegentlicher Berücksichtigung von Erschütterungen durch fremde, der Konstruktion nicht angehörige Körper (z. B. durch den Wind bei Dachstühlen, Mauern, Feuereſſen oder durch Fahrzeuge bei Brücken u. s. w.).

Allerdings ist diese Unterscheidung in aller Strenge nur richtig, wenn man bei statischen Konstruktionen lediglich den Zustand des ursprünglichen Gleichgewichtes (ohne Belastung) und den Zustand des schließlichen Gleichgewichtes (mit Belastung) berücksichtigt (vergl. S. 813), die dazwischen liegenden Bewegungszustände, die von der einen zur anderen Gleichgewichtslage führen, aber nicht in Betracht zieht; geht man auf letztere ein, so zeigt die Fruchtbarkeit in der Verwendung des Begriffes der Formänderungsarbeit sofort wieder den kinetischen Charakter der Untersuchung an.

Anderseits ist für kinetische Konstruktionen zu bemerken, daß bei ihnen neben dem ruhenden Teile die Teile, welche dauernd eine gleichförmige Verschiebung ausführen, ebenso zu behandeln sind, als wenn sie sich in statischen Konstruktionen befänden, weil für diese keine Effektivkräfte der Bewegung anzusetzen sind.

275. Statische und kinetische Konstruktionen in Beziehung zu entsprechenden Modellen. Die Konstruktionen des gesamten Bauwesens werden

stets auf Grund sorgfältiger Zeichnungen ausgeführt, gelegentlich fertigt man auch für eine Konstruktion vor deren Ausführung ein Modell an, d. h. eine geometrisch-ähnliche Abbildung der beabsichtigten Konstruktion. Man thut dies meist, um an dem Modell die Zweckmäßigkeit der beabsichtigten Konstruktion nach jeder Richtung hin noch einmal zu prüfen, und gegebenen Falles vor deren Ausführung Abänderungen vorzunehmen. Manchmal fertigt man auch nach der Ausführung einer Konstruktion ein entsprechendes Modell an, z. B., wenn sich die Konstruktion nicht bewährt hat und Abänderungen derselben geboten erscheinen. Natürlich können solche Modelle auch für andere Zwecke gemacht werden, lediglich zu Studienzwecken, als Vorbilder in Sammlungen u. s. w.

Die Modelle bilden in der Regel mit Rücksicht auf die Kosten der Herstellung die entsprechenden Konstruktionen in stark verkleinertem Maße ab, gelegentlich kann es aber natürlich auch zweckmäßig sein, einen Teil einer Konstruktion in vergrößertem Maßstabe darzustellen, z. B. bei den Studien von Formänderungen.

Um aus dem Verhalten eines Modells auf das Verhalten einer entsprechenden Konstruktion sichere Schlüsse machen zu können, muß man beachten, daß die bei dem Modell und bei der Maschine auftretenden, einander entsprechenden phoronomischen und dynamischen Größen höchst verschiedene Verhältnisse zeigen können.

Die Kräfte, welche Spannungen entsprechen, sind diesen Spannungen und den gedrückten Flächen proportional, die Massenkräfte z. B. dem Gewicht, dem Rauminhalt, auf den sie sich beziehen, den Dichtigkeiten der Materialien und den entsprechenden Beschleunigungen (z. B. g), die Effektivkräfte dem Rauminhalt, den Dichtigkeiten und den Beschleunigungen, die Energieen dem Rauminhalt, den Dichtigkeiten und den Quadraten der Geschwindigkeit u. s. w.

Ist ε der gewählte Modul der Abbildung, d. h. das Verhältnis der entsprechenden linearen Größen für Konstruktion und Modell, so stehen entsprechende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Verhältnis ε, wenn entsprechende Wege in gleicher Zeit zurückgelegt werden sollen.

Bei Materialien von gleicher Dichtigkeit für entsprechende Teile von Konstruktion und Modell haben dann die Flächenkräfte bei gleichen Spannungen das Verhältnis $\varepsilon^2 : 1$, die Gewichte das Verhältnis $\varepsilon^3 : 1$, die Effektivkräfte das Verhältnis $\varepsilon^4 : 1$, die Energieen das Verhältnis $\varepsilon^5 : 1$ u. s. w. Daraus folgt, daß geometrisch-ähnliche Konstruktionen unter den gemachten Voraussetzungen sich in mechanischer Hinsicht durchaus nicht ähnlich verhalten.

Diese Folgerung gilt natürlich nicht bloß für die Beziehung eines Modells zu einer ausgeführten Konstruktion, sondern auch für die Beziehungen zweier in verschiedenem Maßstabe ausgeführten Konstruktionen.

Infolgedessen muß man sich darauf beschränken, von geometrisch-ähnlichen Konstruktionen nur in gewissen Hinsichten mechanische Ähnlichkeit zu fordern, und die Vorgänge im übrigen gemäß den Dimensionen der auftretenden Größen beurteilen.

In welcher Hinsicht man die mechanische Ähnlichkeit fordert,

hängt natürlich ab von dem Zweck, den man bei dem Vergleich hauptsächlich im Auge hat.

Will man z. B. bei einem Fachwerk am Modell und an der ausgeführten Konstruktion für dasselbe Material dieselben Spannungen erreichen, um daraus auf eine gleiche Anstrengung und geometrisch-ähnliche Deformationen zu schließen, so hat man die Belastungen für die Konstruktion und die Belastungen für das Modell nach dem Verhältnis $\varepsilon^2 : 1$ anzusetzen.

Wirkt auf die Fläche f der Konstruktion die Last P, so ist die entsprechende Spannung $\frac{P}{f}$, während diese für die entsprechende Fläche des Modells $\frac{P : \varepsilon^2}{f : \varepsilon^2}$ ist und demnach denselben Wert hat.

Da Knickspannungen nach der Eulerschen Formel zu $\frac{\mathfrak{T}\pi}{l^2 \cdot f}$ proportional sind und da diese Größe die Dimension Null hat, so sind auch die Knickspannungen für Konstruktion und Modell einander gleich.

Da die Eigengewichte entsprechender Teile von Konstruktion und Modell im Verhältnis $\varepsilon^3 : 1$ stehen, so gilt die Betrachtung nur bei Vernachlässigung der Eigengewichte. Will man diese berücksichtigen, so hat man den Unterschied der Beanspruchung durch das Eigengewicht für Konstruktion und Modell durch eine besondere Belastung der Knotenpunkte des Modells auszugleichen.

Bei kinetischen Konstruktionen pflegt man allgemein für Konstruktion und Modell neben dem Modul ε der Abbildung das Verhältnis entsprechender äußerer Kräfte ε_k (von den Eigengewichten abgesehen), das Verhältnis entsprechender Massen ε_m und das Verhältnis entsprechender Zeiten ε_t einzuführen.

Da alle Größen der Mechanik auf drei Einheiten (Länge, Dauer, Masse) zurückzuführen sind, so besteht zwischen den Größen ε, ε_k, ε_m und ε_t eine Beziehung. Um sie abzuleiten, kann man irgend eine Formel benutzen, welche jene Größen enthält, z. B. die dynamische Grundgleichung „Kraft = Masse × Beschleunigung", in welcher der Beschleunigung die Dimension $l \cdot t^{-2}$ zukommt.

Entsprechende Größen „Massenbeschleunigung" von der Dimension mlt^{-2} verhalten sich bei der Konstruktion und beim Modell wie $\varepsilon_m \varepsilon \varepsilon_t^{-2}$, während sich anderseits für die Kräfte, denen sie gleich sind, dasselbe Verhältnis als ε_k darstellt; es gilt also $\varepsilon_k = \varepsilon_m \varepsilon \varepsilon_t^{-2}$ oder

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_t^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad 580)$$

Gemäß dieser Gleichung darf man drei der in ihr vorkommenden vier Größen willkürlich wählen.

Bei physikalischen Betrachtungen würde man, den drei Grundeinheiten entsprechend, sich von vornherein für ε, ε_t und ε_m die freie Wahl vorbehalten, während es für technische Untersuchungen mit Rücksicht auf die Bedeutung der Kraft zweckmäßiger ist, auch ε_k frei wählen zu können, wofür man natürlich die freie Wahl in Bezug auf eine der drei Größen ε, ε_t und ε_m aufgeben muß.

Bei dem oben beschriebenen Fachwerk sollten die Spannungen $\frac{P}{f}$ und damit die Dehnungen für Konstruktion und Modell denselben Wert haben, und demgemäß mußte $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon^2} = 1$ sein; außerdem sollten die Materialien für entsprechende Stücke gleich sein, so daß sich also die Massen wie die Volumina verhalten und demnach $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon^3} = 1$ ist. Daraus folgt gemäß Gleichung Nr. 580) $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_t^2 = \varepsilon^4$ oder $\varepsilon_t = \varepsilon$, eine Bedingung, welche für jene statische Konstruktion nicht in Frage kam, während sich anderseits nicht erzwingen ließ, für ein Gewicht G auch noch die Spannungen $\frac{G}{f}$ in der Konstruktion und im Modell gleich zu machen, weil dann $\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^2} = 1$ oder $\varepsilon = 1$ würde, d. h. also überhaupt keine Verkleinerung oder Vergrößerung vorläge.

Will man für $\frac{P}{f}$ und $\frac{G}{f}$ Übereinstimmung haben, so muß man die Voraussetzung gleichen Materials fallen lassen; setzt man demgemäß $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon^2} = 1$ und $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon^2} = 1$, so folgt $\varepsilon_k = \varepsilon_m$ und außerdem $\varepsilon_t^2 = \varepsilon$ mit Rücksicht auf Gleichung Nr. 580). Hier ist also $\varepsilon_k = \varepsilon_m = \varepsilon^2 = \varepsilon_t^4$, so daß nur ε frei gewählt werden kann; dabei ist das Verhältnis der Dichtigkeiten der Materialien für Konstruktion und Modell durch $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon}$ bestimmt, d. h. man müßte für die Ausführung entsprechender Glieder immer zwei Stoffe wählen, deren Dichtigkeiten im Verhältnis $1 : \varepsilon$ ständen, während sie sonst in allen zu vergleichenden Eigenschaften (Elasticitätsmodul u. s. w.) übereinstimmen müßten, damit die Vergleichung überhaupt Sinn hätte.

Da solche Materialien nicht vorhanden sind, so muß man stets darauf verzichten, zugleich die Spannungen $\frac{P}{f}$ und $\frac{G}{f}$ in der Konstruktion und in dem Modell unverändert zu erhalten.

Behält man den Ansatz der, durch die Gleichung Nr. 580) verbundenen Zahlen ε_k, ε_m, ε_t, ε, welchen man selbst von Fall zu Fall gemacht hat, im Auge, so kann man jede Formel für die Konstruktion in eine Formel für das Modell umschreiben und umgekehrt, und demnach beurteilen, wie die einzelnen Betrachtungen am Modell für die entsprechenden Vorgänge an der Konstruktion nutzbar gemacht werden können.

Wir haben die ähnliche Abbildung schon mehrfach benutzt, z. B. auch um Massenmomente und Trägheitsmomente völlig zu bestimmen, ohne eine entsprechende Rechnung wirklich durchzuführen. Entsprechendes gilt im Hinblick auf Gleichung Nr. 580) auch in Bezug auf andere Aufgaben.

Vergleicht man z. B. zwei Fadenpendel, welche einander geometrisch-ähnlich sind, so hat man zu beachten, daß für ihre Gewichte G_1 und G_2

und ihre Massen m_1 und m_2 der Ansatz $G_1 = m_1 g$ und $G_2 = m g_2$ bezw. $G_1 : G_2 = m_1 : m_2$ gilt und daß die Gewichte hier zugleich die treibenden Kräfte sind. Daraus folgt $\varepsilon_k = \varepsilon_m$ und ferner gemäß Gleichung Nr. 580) $\varepsilon_t^2 = \varepsilon$, d. h. die Quadrate verschiedener Zeiten für beide Pendel verhalten sich wie entsprechende Längen, woraus sofort folgt, daß ihre Schwingungsdauern den Quadratwurzeln aus den Pendellängen proportional sind. Dabei ist die Wahl von ε frei, bestimmt aber ε_t, ebenso ist die Wahl von ε_m frei, bestimmt aber ε_k; da die Wahl von ε_m frei steht, so gilt das Ergebnis für alle Stoffe.

Auf diese Weise hat Froude[1]) die Bedingungen abgeleitet, unter denen man aus dem Widerstande eines auf Wasser beweglichen Schiffsmodells auf die entsprechenden Widerstände eines Schiffes schließen kann. Da man hier bestimmte Materialien (Schiffskörper und Wasser) festzuhalten hat, so ist $\varepsilon_m = \varepsilon^3$, und da ferner das Eigengewicht als wirkende Kraft eine Rolle spielt, so ist auch $\varepsilon_k = \varepsilon_m$ und demnach wird nach Gleichung Nr. 580) $\varepsilon_t^2 = \varepsilon$.

Führt man das Modell im Maßstabe 1 : 100 aus, so ist $\varepsilon = 100$, $\varepsilon_t = 10$, $\varepsilon_k = \varepsilon_m = 100^3$. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Schiff und Modell gilt, da die Dimension der Geschwindigkeit lt^{-1} ist, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} : 1$ oder 10 : 1 u. s. w. Soll das Schiff eine Geschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ haben, so muß dem Modell eine Geschwindigkeit von $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gegeben werden. Wird die Kraft W, welche bei dieser konstanten Geschwindigkeit des Modells den Widerstand $\overline{W}$ des Wassers überwindet, gemessen, so ist die Kraft, welche dem Schiffe dauernd die Geschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ giebt, gegeben als $100^3 . W$.

276. Die im Gange befindliche Maschine als Modell des Naturganzen. Die Beachtung aller Verzweigungen eines Energiestromes, welcher eine Maschine durchfließt, führt uns aus dem engeren Gebiet der Bewegungen, welche durch den Begriff Masse beherrscht werden (vergl. S. 15), in das Gebiet der Wärmeerscheinungen, der elektromagnetischen Vorgänge u. s. w., und dabei erscheinen alle diese Gebiete als ein großes Ganzes, insofern sie durch das Princip der Erhaltung der Energie beherrscht werden.

Daß dieses Ganze nicht bloß die sogenannte leblose Natur umfaßt, zeigt uns schon die eine Thatsache, daß belebte Wesen Kraftmaschinen ersetzen können, indem sie die potentielle Energie ihres Nerven- und Muskelsystems in aktuelle Energie umwandeln und diese einem Getriebe zuführen. Spürt man der Herkunft dieser potentiellen Energie nach, so findet man sie bedingt durch die Aufnahme verschiedenartiger Nahrung, welche aus festen, flüssigen und gasförmigen Körpern besteht, und durch die gesetzmäßige Umwandlung dieser Nahrung innerhalb des organischen Körpers, während diese Nahrung selbst, als Träger einer bestimmten Energie, wieder auf sehr verschiedene Ursprünge hinweist.

[1]) Vergl. Föppls Mechanik, Bd. IV, S. 328.

Dabei legt die Deutung der potentiellen Energie als aktueller Energie der Atome und Moleküle der Körper und gewisser hypothetischer Stoffe, wie des Äthers, es uns nahe, *das Ganze unserer Außenwelt als ein System von energiebegabten Bewegungen anzusehen*, für deren einzelne, uns zum Teil nur halb entschleierte Gebiete dieselben grundlegenden Gesetze gelten, welche wir im Gebiet der Massenbewegungen deutlich erkennen.

Daß alle principiellen Bestimmungen für das Ganze dieser Gebiete den *Charakter der Eindeutigkeit* (vergl. S. 16) haben müssen, wenn sie uns zu *sicheren* Ergebnissen führen sollen, lehrt uns, diese Gesetzmäßigkeit *ohne jede Willkür* zu denken, d. h. als ein System von allgemein gültigen und in sich notwendigen Bestimmungen.

Damit kommt auch die *technische Mechanik*, und zwar von der *Theorie der Maschine* aus, zu demselben Ergebnis wie die *physikalische Mechanik* bezw. überhaupt die *Physik*, einschließlich der *Chemie*.

Die beiden wesentlichen *Eigenschaften der Maschine*, in ihren Bewegungen *zwangläufig* bestimmt zu sein und der *Leitung eines Energiestromes* zu dienen, welcher unter Arbeitsleistung zufließt, sich verzweigt und abfließt, stellen gewissermaßen im *Modell* die wesentlichen *Eigenschaften aller energiebewegten Bewegungen* dar, während andere wesentliche Eigenschaften der Maschine zu deren Besonderheiten gehören, nämlich, abgesehen von der Beziehung auf bestimmte kulturelle Zwecke, vor allem das periodische Gepräge ihrer Bewegungen infolge der besonderen Verwirklichung eindeutig bestimmter Bewegungen durch die geschlossene und zwangläufige Kette.

Allerdings ist auch die zuletzt genannte Eigenschaft nicht auf die Maschine beschränkt. *Reuleaux* hat darauf hingewiesen[1]), daß in den Gelenken der Tiere die drei niederen Paare, vor allem das Drehkörperpaar, aber auch das Schraubenpaar und das Prismenpaar für die Leitung von Bewegungen verwendet werden, ebenso noch einzelne andere Paare, und daß die Glieder der tierischen Körper vielfach ungeschlossene Ketten bilden, daß aber in diesen Körpern auch völlig ausgebildete Mechanismen vorkommen, besonders solche, „die von der Natur in regelmäßigem, aber unwillkürlichem Betriebe erhalten werden", den Lebenserscheinungen des Tieres entsprechend.

Damit kehrt die Mechanik in Bezug auf ihre geschichtliche Entwickelung in gewissem Sinne zu ihrem Ausgangspunkte zurück, insofern als der Mensch zunächst durch Vermittelung seines eigenen Körpers die mechanischen Erfahrungen machte (vergl. S. 1 und S. 228 f.), welche er dann auf die ganze Außenwelt übertrug, im allgemeinen zwar mit Recht, im besonderen aber mit Unrecht. Solche unberechtigte Übertragungen fließen fast alle aus einer und derselben Quelle: der Mensch glaubte die scheinbare Willkür seiner eigenen Bewegungen nicht bloß in der gesamten animalischen Welt wiederzufinden, sondern sah sie überall in dem Ganzen der Naturerscheinungen.

Selbst bei den Griechen, durch welche die spärlichen Anfänge von Wissenschaft, die sich hier und da in der alten Welt fanden, aufgenommen, zu-

[1]) Theoretische Kinematik, Bd. II, S. 721 f., 1900.

sammengefaßt und zu echter Wissenschaft entwickelt wurden, taucht der Gedanke einer allumfassenden Notwendigkeit nur auf als eine vorübergehende Leuchte, der Einfluß Platons drängte die Anschauungen von Demokritos zurück, und Aristoteles entschied den Sieg der Platonischen Auffassung innerhalb der Gedankenwelt des absterbenden Altertums und seiner Erben [1]).

Gegenüber der Ansicht, daß die Materie mit einer Art von Willkür aus sich heraus Bewegungen anfangen und Bewegungen beginnen könnte, verkündete das Zeitalter Galileis die Trägheit der Materie (vergl. S. 8 f.), und damit wurde zugleich der wissenschaftliche Versuch, dessen volle Bedeutung man weder im Altertum noch im Mittelalter erkennen konnte, neben die schon lange erfolgreich geübte Beobachtung gestellt. Damit war die Grundlage gegeben für die zielbewußten Arbeiten Galileis und seiner Zeitgenossen und deren Nachfolger, durch welche auch Demokritos wieder zu Ehren kam, und bald darauf konnte Newton seine Weltmechanik schaffen, für deren weitere Ausgestaltung er zugleich mit Leibniz das notwendige mathematische Rüstzeug schuf. In dieser Weltmechanik erschien der geschichtliche Gegensatz zwischen der willkürlich thätigen Materie und zwischen der gänzlich trägen Materie in dem Principe der Paarwirkung aufgehoben, wonach die Körper ihre Bewegungen gegenseitig bestimmen bezw. in diesen gegenseitig bestimmt werden, aber gemäß allgemein gültigen und in sich notwendigen Gesetzen.

Newtons Weltmechanik hat sich in der Folgezeit als sichere Grundlage für alle Einzeluntersuchungen bewährt, zunächst in Bezug auf die Vorgänge in der leblosen Natur, später auch im Gebiete der organischen Erscheinungen.

Schon Descartes, auch einer der Großen, welche zwischen Galilei und Newton stehen, hatte den Unterschied zwischen der anorganischen und der organischen Welt trotz seines Cogito völlig zu verwischen versucht, und als seine umfassende, aber mangelhafte Korpuskulartheorie durch Newtons vollendete Weltmechanik ersetzt worden war, da fanden sich auch bald die Männer, welche im Rausche naturwissenschaftlicher Triumphe zu dem Punkte fortschritten, den „L'homme machine“ (1748) von De la Mettrie bezeichnet.

Diesen gefährlichen Folgerungen gegenüber sprach Kant (1781) das erlösende Wort, indem er unter ausdrücklicher und voller Anerkennung der Weltmechanik Newtons in Bezug auf alle Gebiete der Außenwelt doch dem Cogito von Descartes seine principielle Bedeutung sicherte, dadurch, daß er diese Außenwelt selbst in unsere Empfindungen und in unsere Anschauungen, Begriffe und Ideen auflöste und so dem religiös-ethischen Glauben eine sichere Stätte schuf [2]).

Von dem festen Standpunkte des Kantischen Systems aus, das Newtons Weltmechanik völlig in sich aufgenommen hatte, erscheinen die absolute Teleologie, welche das religiös-ethische Bedürfnis für sich fordert, und die absolute Kausalität, welche die Wissenschaft für sich fordert, lediglich als

[1]) Das Urteil gilt, unbeschadet der wahren Größe von Platon und Aristoteles. Vergl. dazu in meinem Buche „Kultur und Schule“ (1896) den Abschnitt „Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung“.

[2]) Vergl. meine Abhandlung „Kant und kein Ende?“, 1894.

zwei Seiten einer und derselben allgemeinen und in sich notwendigen Gesetzmäßigkeit, und darum konnte auch die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in der Folgezeit ohne Verletzung anderer kultureller Interessen die Gebiete der leblosen und der organisierten Materie zu einem Ganzen vereinen.

Im Anschluß an Lavoisiers physiologische Verbrennungstheorie faßte R. Mayer (vergl. S. 1376) den genialen Gedanken von einer allgemeinen Erhaltung der Energie, den bald darauf Joule und Helmholtz zur Anerkennung brachten, und damit wurde jene energetische Auffassung unserer gesamten Außenwelt begründet, durch welche diese in mechanischer Hinsicht erst wirklich als ein einheitliches Ganzes erscheint.

Von den Energieströmen, welche diese Außenwelt in buntem Wechsel rastlos durchfluten, giebt uns die im Gange befindliche Maschine mit ihrer Zwangläufigkeit ein anschauliches Bild, aber dieses Bild lehrt uns zugleich, wenn wir es in seinen Einzelheiten zu verstehen trachten, wie die Menschheit auf ihrem Kulturwege neben der Lösung anderer Aufgaben, auch die Aufgabe löste, die Bewegungen, mit welchen unsere Empfindungen des Zuges und des Druckes, der Wärme u. s. w. verbunden erscheinen, in einem wohlgegliederten anschaulich-begrifflichen Systeme zur Darstellung zu bringen [1]).

Dieses System, welches wir als die Wissenschaft „Mechanik" genauer „Physikalische Mechanik" bezeichnen, bietet auch die Mittel, die Materie den Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entsprechend zu neuer und fruchtbarer Formung zu zwingen (vergl. S. 5), und so weist uns im besondern die „Technische Mechanik" darauf hin, daß die Riesenschöpfungen unserer modernen Technik [2]) nicht bloß dem Nutzen in niederem und in höherem Sinne dienen, daß sie vielmehr vor allem glänzende Zeugnisse für jenes anschaulich-begriffliche System der Mechanik sind, welches sich die Menschheit auf ihrem Kulturwege in stetigem Fortschritt zielbewußt erarbeitet hat.

[1]) Vergl. dazu meine Schrift „Die Philosophie als deskriptive Wissenschaft", 1882.

[2]) Die kinetischen Konstruktionen ersetzen die scheinbare Willkür der Bewegungen belebter Wesen durch die Zwangläufigkeit geschlossener Ketten, die statischen Konstruktionen erzwingen Bewegungslosigkeit durch übermäßigen Schluß.

Anwendungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit.

Da die theoretischen Untersuchungen des ganzen vierten Abschnittes, der Aufgabe der technischen Mechanik entsprechend, stets bis zu den zugehörigen Anwendungen geführt worden sind, so handelt es sich hier im wesentlichen darum, mit Rücksicht auf die Praxis die eine oder die andere Ergänzung hinzuzufügen (vergl. dazu Vorrede S. X).

Nach den amtlichen, der Sachlage angepaßten Bestimmungen sind die statischen Berechnungen bezw. graphostatischen Bestimmungen für ein Bauwerk zu erstrecken

1. auf alle Konstruktionen in Metall,
2. auf diejenigen Holzkonstruktionen, für welche keine sicheren Erfahrungsregeln vorliegen,
3. auf Gurtbögen und Gewölbe, deren Widerlager und Verankerungen, soweit keine sicheren Erfahrungsregeln vorliegen,
4. auf massive Säulen, auf Pfeiler, Wände, freistehende Schornsteine u. s. w., soweit keine sicheren Erfahrungsregeln vorliegen,
5. auf die Abmessung der Fundamentsohlen mit Rücksicht auf die Beanspruchung des Baugrundes.

Bei Hochbauten beginnt man mit der Untersuchung der Dachkonstruktionen, geht dann zu den Zwischendecken über u. s. w. und endet mit der Untersuchung der Fundamentsohlen bezw. der in Aussicht genommenen künstlichen Gründungsart.

Bei Brückenbauten beginnt man mit der Untersuchung der Bahn (Geländer, Fußwege, Fahrbahntafel, Längs- und Querträger), geht dann zu den Hauptträgern über und endet mit der Untersuchung der Fundamentierung.

Für die statischen Teile einer Maschinenanlage gilt Entsprechendes, während man bei der Untersuchung der kinetischen Teile im allgemeinen dem Energiestrome zu folgen hat, der die Bewegung veranlaßt. Dem Unterschied statischer und kinetischer Konstruktionen wird im allgemeinen durch eine geeignete Bestimmung der Materialkonstanten Rechnung getragen, in besonderen Fällen werden auch die kinetischen Aufgaben durch das Princip von d'Alembert auf statische Aufgaben zurückgeführt [1]).

[1]) In Bezug auf die Berechnung der Maschinenteile sind hier „Die Maschinenelemente u. s. w." von v. Bach (Stuttgart bei A. Kröner) zu Grunde gelegt,

In Bezug auf Materialkonstanten und empirische Formeln wird auf die einschlägigen Werke verwiesen und außerdem im besonderen auf „Des Ingenieurs Taschenbuch“ (Berlin bei W. Ernst und Sohn) und auf „Weisbachs Ingenieur“ (Braunschweig bei Friedr. Vieweg und Sohn).

Die zulässigen Spannungen (Konstruktionsspannungen) für Zug und Druck sind bezw. durch k_1 und k_2 bezeichnet, falls es sich unmittelbar um Beanspruchung durch Zug oder Druck handelt, durch k_b, falls es sich um Zug und Druck infolge von Biegung handelt.

Die zulässigen Spannungen (Konstruktionsspannungen) für Schub sind durch t oder k_s bezeichnet, falls es sich unmittelbar um Beanspruchung durch Schub handelt, durch k_d, falls es sich um Schub infolge von Verdrehung handelt.

Die entsprechenden Bruchspannungen (Festigkeiten) sind durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet. Vergl. dazu § 123.

Erste Gruppe.

Bauteile, welche hauptsächlich zur Verbindung anderer Bauteile dienen.

1. Unterlagsplatten u. s. w. Wenn ein wagerechter Träger durch seine Auflagerfläche f einen Druck $[P]$ auf seine Unterlage überträgt, so muß die Druckspannung $\frac{P}{f}$ für das Material der Unterlage zulässig sein. Ist dies nicht der Fall, so schiebt man zwischen Auflagerfläche und Unterlage eine Platte aus einem Material, für welches die Druckspannung $\frac{P}{f}$ zulässig ist, während man die Fläche f' der Platte so wählt, daß nun die Druckspannung $\frac{P}{f'}$ für das Material der Unterlage zulässig ist. Diese Unterlagsplatten sind meist rechteckige Platten aus Gußeisen, für welches die zulässige Druckspannung etwa 250 Atmosphären beträgt.

Fig. 998.

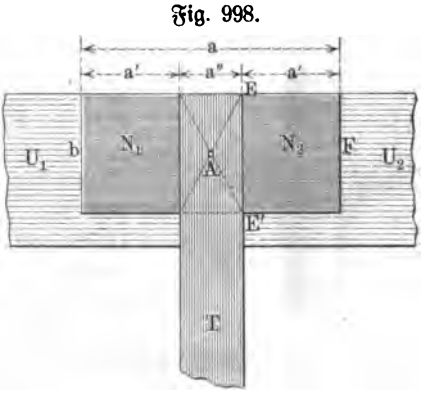


Fig. 998 stellt im Grundriß einen Träger T dar, welcher in A den Druck P durch die Platte $N_1 N_2$ auf die Unterlage $U_1 U_2$ überträgt.

Ist k_2 die zulässige Druckspannung für die Unterlage, so muß zunächst

$$\frac{P}{ab} \leqq k_2$$

zumal die Arbeiten v. Bachs jetzt auch den entsprechenden Abschnitten in „Des Ingenieurs Taschenbuch“ als Unterlage dienen.

sein. Außerdem sind die freien Teile der Platte als gleichmäßig belastete Freiträger aufzufassen, der rechte Teil z. B. mit Einspannung bei EE' und freiem Ende bei F.

Bei Ausnutzung des Plattenmaterials überträgt der Teil $EE'F$ die Belastung $k_2 \,.\, a'b$, die bei a' als Länge das Moment $(k_2 \,.\, a'b)\frac{a'}{2}$ liefert, während ferner $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{6}bd^2$ ist, falls die Dicke der Platte durch d bezeichnet wird. Für eine zulässige Spannung des Gußeisens von 250 Atm. lautet also die Festigkeitsgleichung hier

$$(k_2 a'b)\frac{a'}{2} = 250 \,.\, \tfrac{1}{6}bd^2,$$

woraus

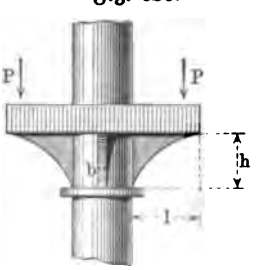
$$d \sim 0{,}11\, a'\sqrt{k_2}$$

folgt.

Für Ziegelmauerwerk ist $k_2 = 7$ Atm. bis 14 Atm. und demnach ist $d \sim 0{,}29\, a'$ bis $d \sim 0{,}41\, a'$, für Sandstein ist $k_2 = 20$ Atm. und demnach $d \sim 0{,}49\, a'$, für Granit ist $k_2 = 45$ Atm. und demnach $d \sim 0{,}73\, a'$.

Durch P und k_2 ist $ab = \frac{P}{k_2}$ bestimmt und damit, nach sachgemäß bestimmter Annahme der Auflagerlänge b des Trägers, zunächst a und ferner $a' = \frac{1}{2}(a - a'')$ und endlich d.

Fig. 999.



Sind mehrere Träger auf derselben Platte parallel gelagert, so sind die inneren freien Teile der Platte als beiderseits eingespannte Träger mit gleichmäßiger Belastung zu berechnen.

Senkrechte Säulen erhalten eine Kopfplatte (Kapitellplatte), um die Belastung aufzunehmen, und eine Fußplatte, um sie auf die Unterlage zu übertragen. Eine Kopfplatte wird oft, wie Fig. 999 andeutet, durch vier symmetrisch gestellte Konsolen mit der Säule verbunden, welche als Freiträger mit verjüngter Höhe und konstanter Breite b aufzufassen sind. Ist eine Konsole durch $[P]$ belastet, so gilt für den ungünstigsten Fall der Endbelastung

$$Pl = k_b \,.\, \tfrac{1}{6}bh^2,$$

wobei für Schmiedeeisen $k_b = 750$ Atm. und für Gußeisen $k_b = 250$ Atm. ist; man hat zunächst b sachgemäß zu wählen, etwa gleich der Plattenstärke, und demnach h zu bestimmen.

Die Fußplatten sind meist mit der Säule durch Rippen verbunden, welche den Konsolen der Kopfplatte entsprechen. So stellt Fig. 1000 im Grundriß eine quadratische Fußplatte mit acht Rippen dar. Um für die Stärke d der Platte einen Anhalt zu bekommen, faßt man am Plattenrande einen Streifen AB zwischen zwei Rippen als beiderseits aufgelagerten Träger mit gleichmäßiger Belastung auf. Für einen Streifen von der Länge e und

der Breite b ist dann die Belastung $k_2 (e \,.\, b)$ anzusetzen, falls k_2 die zulässige Spannung für die Unterlage bezeichnet, und demnach lautet die Festigkeitsgleichung bei einer Dicke d der Platte

$$\frac{k_2 (eb)\, e}{8} = k_b \,.\, \tfrac{1}{6} b d^2,$$

woraus

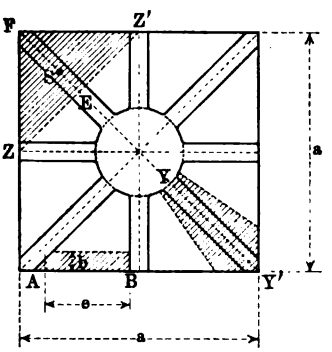
$$d = e \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4} \frac{k_2}{k_b}}$$

folgt.

Für Platten aus Gußeisen ($k_b = 250$ Atm.) ist bei Auflagerung auf Granit ($k_2 = 45$ Atm.) demnach $d \sim 0{,}37 \,.\, e$.

Man giebt nun den Rippen die Stärke d der Platte als Breite und berechnet ihre Höhe gemäß folgender Betrachtung. Erfahrungsgemäß ist ZZ' in Fig. 1000 ein gefährlicher Querschnitt; für diesen ist im Schwerpunkt S des Dreiecks FZZ' die Belastung $\frac{1}{6} P$ in Ansatz zu bringen, wenn P die Belastung der Säule nebst deren Eigengewichte bezeichnet. Da $SE = \frac{a}{12}\sqrt{2}$ ist, falls die Seite der quadratischen Platte die Länge a hat, so ist für E das Moment

Fig. 1000.



$$(\tfrac{1}{6} P) \frac{a}{12} \sqrt{2}$$

in Rechnung zu stellen.

Bezeichnet man die Höhe des Querschnittes bei ZZ' vom Profil $\perp$ durch h', so ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gemäß Fig. 634 a auf S. 907 für $b_1 = ZZ'$, $b_2 = d$, $h_1 = d$ und $h = h'$ zu bestimmen; da ZZ' relativ groß gegen h' ist, so hat man

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim \tfrac{3}{22} d (d \,.\, ZZ' + h'^2)$$

für $ZZ' = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$. Demnach giebt die Festigkeitsgleichung

$$(\tfrac{1}{6} P) \frac{a}{12} \sqrt{2} = \tfrac{3}{22} d (\tfrac{1}{2} a d \sqrt{2} + h'^2) \cdot k_b$$

den Wert von h' über E.

Anderseits lehrt die Erfahrung, daß auch ein Ausbrechen eines Stückes wie YY' zu befürchten ist, welches man als einen gleichmäßig mit $\frac{1}{8} P$ belasteten Freiträger ansehen kann. Ist h die Höhe der Rippe über Y, so ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ wieder gemäß Fig. 634 a auf S. 907 zu bestimmen, wobei $b_1 \sim 2d$ ist; da b_1 relativ klein gegen h ist, so hat man

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim \tfrac{3}{14} d (d \,.\, b_1 + h^2)$$

für $b_1 \sim 2d$. Demnach giebt die Festigkeitsgleichung

$$(\tfrac{1}{8}P) \cdot \frac{YY'}{2} = \tfrac{8}{14} d(2d^2 + h^2) \cdot k_b$$

den Wert von h über Y.

2. Keile und Platten. Wir betrachten gemäß Fig. 1001 als Beispiel die Verbindung einer cylindrischen Stange mit einem umschließenden Hohlcylinder durch einen Keil, unter der Voraussetzung, daß die Stange den Zug $[P]$ auszuhalten hat.

Bei den geringen Keilneigungen ($1/15$ bis $1/20$), welche in der Praxis bei derartigen Befestigungen verwendet werden, ist es zulässig, die Berechnung so durchzuführen, als wenn statt des (verjüngten) Keiles eine prismatische Platte die Verbindung bewirkte.

Fig. 1001 a.

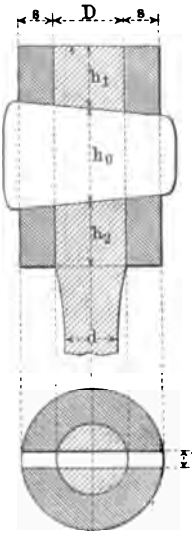
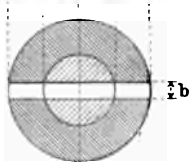


Fig. 1001 b.



Man hat zunächst zur Bestimmung von d

$$P = \tfrac{1}{4}\pi d^2 \cdot k_1.$$

Wegen der Durchbohrung für die Aufnahme des Keiles ist die Stange vom Durchmesser d auf den Durchmesser D verstärkt. Bei einer Schlitzbreite b für die Aufnahme des Keiles fällt dabei in einer Ebene, senkrecht zu $[P]$ die Fläche $b \cdot D$ von $\frac{1}{4}\pi \cdot D^2$ fort, so daß demnach

$$P = (\tfrac{1}{4}\pi D^2 - bD) k_1$$

sein muß. Mit dem bei Konstruktionen üblichen Werte $b = \frac{1}{4}D$ ergiebt sich demnach zur Bestimmung von D

$$P = \tfrac{1}{4} D^2 (\pi - 1) \cdot k_1.$$

Da das Material des Cylinders vom Durchmesser D in der Nachbarschaft des Keillloches stärker beansprucht wird, als nach dem Umfange zu, so pflegt man statt k_1 nur $\frac{3}{4}k_1 \sim \frac{\pi}{4}k_1$ als zulässig anzusehen, d. h. man setzt an

$$P = \tfrac{1}{4} D^2 (\pi - 1) \frac{\pi}{4} k_1.$$

Da $P : k_1 = \frac{1}{4}\pi d^2$ ist, so ergiebt sich

$$D = d \sqrt{\frac{4}{\pi - 1}} \sim \tfrac{4}{3} d.$$

Für den Druck in der Berührungsfläche $bD = \frac{1}{4}D^2$ zwischen Keil und Stange folgt

$$P = k_2 \cdot \tfrac{1}{4} D^2 = k_2 \cdot \tfrac{4}{9} d^2,$$

d. h. man hat, da $P = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot k_1$ ist,

$$k_2 = \frac{9\pi}{16} k_1 \sim \tfrac{28}{16} k_1,$$

d. h. $k_2 \sim \frac{7}{4} k_1$.

Ist $\frac{7}{4} k_1$ als k_2 für Stange und Keil zulässig, so wird dies im allgemeinen auch für den umschließenden Hohlcylinder gelten, dessen Auflagerung auf den Keil in zwei Flächen von der Größe bs erfolgt. Unter dieser Voraussetzung gilt demnach

$$k_2 \cdot 2bs = k_2 \cdot bD,$$

d. h. man hat

$$s = \tfrac{1}{2} D = \tfrac{2}{3} d.$$

Bei dem Keil verbürgt die Sicherheit gegen Biegung (k_b) zugleich die Sicherheit gegen Schub (vergl. S. 1050). Faßt man den Keil als einen beiderseits eingeklemmten Balken mit Mittelbelastung $[P]$ auf, so ist dessen Mitte gefährlich; man hat für eine Auflagerlänge l den Ansatz

$$\tfrac{1}{8} Pl = k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}.$$

Ist die Keilhöhe in der Mitte h_0, so ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für die Mitte $\frac{1}{6} b h_0^2$, ferner ist $l = D + 2s$, falls man für l den größtmöglichen Wert einführt. Für $b = \frac{1}{4} D$ und $s = \frac{1}{2} D$ ergiebt sich demnach

$$h_0 = \sqrt{\frac{6P}{k_b}}$$

oder, falls man $P = \frac{1}{4} \pi d^2 \cdot k_1$ einführt, auch

$$h_0 = d \sqrt{\tfrac{3}{2} \pi \cdot \frac{k_1}{k_b}}.$$

Ist die Stange aus Schmiedeeisen ($k_1 = 900$ Atm.) und der Keil aus Stahl ($k_b = 1300$ Atm.), so ist $h_0 \sim \frac{7}{4} d \sim \frac{4}{3} D$.

Um h_1 zu berechnen, beachtet man, daß ein Abscheren in den beiden Flächen Dh_1 verhindert werden muß, d. h. man hat

$$P = 2 D h_1 \cdot k_s.$$

Für $k_s = \frac{1}{6} k_b$ erhält man demnach, da $P = \frac{1}{6} k_b h_0^2$ ist,

$$h_1 = \frac{h_0^2}{2D} \sim \tfrac{2}{3} h_0.$$

Von besonderen Verhältnissen abgesehen, macht man $h_2 = h_1$.

Berücksichtigt wurde nicht, daß beim Einschlagen des Keils von vornherein eine gewisse „Verspannung" der in Betracht kommenden Teile eintritt, ebensowenig, daß bei Temperaturunterschieden von Stange und Hülse, falls diese aus verschiedenem Materiale sind, noch besondere Temperaturspannungen auftreten.

Als Spannungsverbindungen hat v. Bach solche Verbindungen von Maschinenteilen bezeichnet, welche Kräfte von wechselnder Richtung aufzufangen haben, weil hier von vornherein elastische Kräfte (z. B. durch Einpressung) zur Sicherung der Flächenberührung verwendet werden.

Unter den Keilverbindungen ist z. B. die Verbindung der Kolbenstange einer Balanciermaschine mit dem Querhaupte eine solche Spannungsverbindung.

Man berücksichtigt die von vornherein vorhandenen, der Sicherung dienenden Spannungen erfahrungsmäßig dadurch, daß man statt P etwa $\frac{5}{4}P$ in Rechnung stellt.

Da die Keile hier im wesentlichen als planparallele Platten aufgefaßt werden, so gilt die Untersuchung auch für Verbindungen durch Platten.

3. Niete und Bolzen. Werden die Niete in kaltem Zustande eingezogen und zwar so, daß sie das Nietloch unter Spannung ausfüllen, so werden sie auf Biegung und auf Schub beansprucht, während außerdem die Reibung der durch die Nietung aufeinander gepreßten Teile zu berücksichtigen ist. Letztere ist für Niete, welche in warmem Zustande eingezogen werden, in erster Linie zu beachten, da sich der erkaltende Niet wegen der Verringerung seines Volumens und infolge der mit den Längsspannungen auftretenden Querzusammenziehung von der Lochwand ablöst.

Legt man die durch Niete zu vereinigenden Platten übereinander, so entstehen Überlappungsnietungen, welche stets einschnittig sind.

Fig. 1002 a.

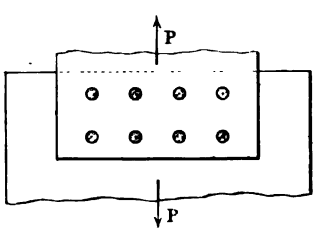
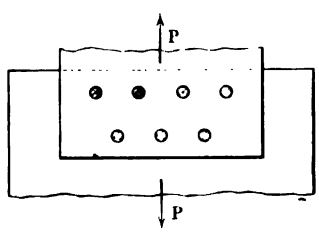


Fig. 1002 b.



Legt man die durch Niete zu vereinigenden Platten aneinander (mit stumpfem Stoß), so muß für die Vernietung auf der einen Seite oder auf jeder Seite eine Platte (Lasche) aufgelegt werden; so entstehen Laschennietungen, welche einschnittig sein können, aber meist mit beiderseitigem Belage, also zweischnittig ausgeführt werden.

Werden die Niete in n Reihen angeordnet, so wird die Nietung n-reihig genannt, wobei noch die Kettennietung (vergl. Fig. 1002 a) von der Zickzacknietung (vergl. Fig. 1002 b) zu unterscheiden ist.

Bei einreihigen Vernietungen, welche einschnittig sind, ist nach v. Bachs Versuchen für 1 qcm des Nietquerschnittes als Reibungswiderstand anzusetzen etwa 800 kg bis 1600 kg je nach der Art der Verbindung von Blechen und Nietköpfen.

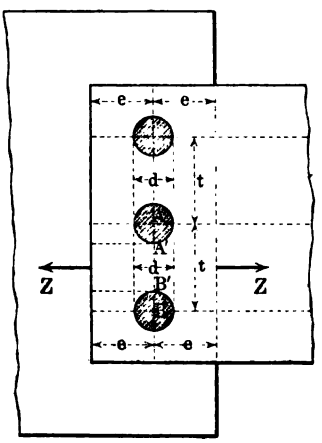
Nach dem Zwecke teilt man die Vernietungen in drei Gruppen, je nachdem sie relativ große Kräfte zu übertragen und zugleich einen dichten Abschluß gegen Flüssigkeiten bezw. Gase zu bilden haben, wie z. B. bei Dampfkesseln, oder nur eine der beiden genannten Aufgaben erfüllen sollen.

Die theoretischen Ansätze für eine Berechnung der Niete und der Bleche bezw. Platten, welche durch sie zusammengehalten werden sollen, sind bei deren verwickelter Beanspruchung äußerst unsicher. Man pflegte die Niete früher stets auf Schub zu berechnen und aus der entsprechenden Schub-

beanspruchung auf die Zug- oder Druckbeanspruchung der Bleche bezw. Platten zu schließen, kann diese Anschauung aber mit Rücksicht auf das oben Dargelegte und mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung der Bleche nicht aufrecht erhalten.

Man hilft sich infolgedessen mit empirischen Formeln unter Verwendung von Materialkonstanten, welche an bewährten Ausführungen gewonnen sind. Dabei giebt man, wie es schon oben für die Reibung angesetzt worden ist, für die Niete die erfahrungsmäßig zulässige Beanspruchung, als wenn diese allein eine Schubspannung wäre, für 1 qcm des Nietquerschnittes an, und verfährt in Bezug auf die Abmessungen der Bleche bezw. Platten entsprechend.

Fig. 1003.



In diesem Sinne gilt bei Dampfkesselnietungen für einen Nietdurchmesser d und einer dem Dampfdruck entsprechenden Blechstärke s in Centimetern folgendes.

Für einreihige Überlappungsnietungen und einseitig gelaschte Nietungen ist

$$d = \sqrt{5\,s} - 0{,}4\text{ cm}$$

und gemäß Fig. 1003 ferner

$$t = 2\,d + 0{,}8\text{ cm} \quad \text{und} \quad e = 1{,}5\,d.$$

Man läßt hier für 1 qcm Nietquerschnitt eine Spannung von 700 kg zu, so daß ein Niet höchstens die Kraft $Z = 700 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ übertragen kann. Schneidet man senkrecht zur Ebene der Zeichnung aus dem Bleche ein Rechteck von der Länge $AB = t$ und der Breite s heraus, so fällt auf dieses von zwei Nietquerschnitten je die halbe Kraft ($\frac{1}{2} Z$), und demgemäß beträgt die Spannung für das Rechteck von der Fläche ts hier

$$\frac{Z}{ts} = \frac{700 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{ts},$$

falls man lediglich Normalspannungen zum Rechteck ts berücksichtigt.

Kommt auf AB die Kraft Z, so erhält ein Rechteck, welches einem Schnitt durch $A'B'$ entspricht, die Spannung

$$\frac{Z}{(t-d)\,s} = \frac{700 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{(t-d)\,s},$$

welche man erfahrungsmäßig unter der Grenze $\frac{K_1}{4{,}5}$ hält, wobei K_1 die Zugfestigkeit des Blechmaterials ist.

Bei zweireihigen Nietungen, die einschnittig sind, wählt man d und e wie oben, setzt aber bei Kettennietung

$$t = 2{,}6\,d + 1{,}0\text{ cm}$$

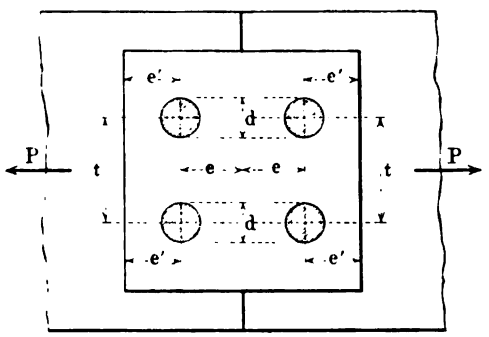
und bei Zickzacknietung

$$t = 2{,}6\,d + 1{,}5\text{ cm}.$$

Die Entfernung der beiden Nietreihen e_1 nimmt man im ersten Falle an als $e_1 = 0{,}8\,t$ und im zweiten Falle als $e_1 = 0{,}6\,t$.

Man läßt hier für 1 qcm Nietschnitt 550 kg bis 650 kg zu; auf einen Schnitt von der Fläche ts fallen hier die Kräfte von vier halben Nieten, so daß im Mittel

Fig. 1004.

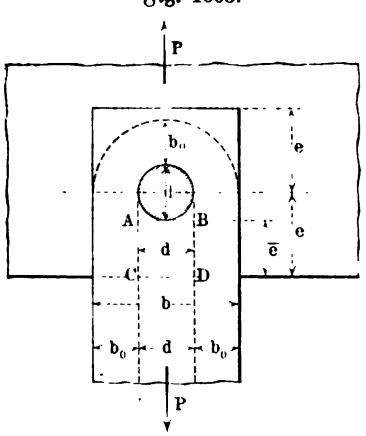


$$2 \cdot \frac{600 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{ts}$$

als Spannung für die Fläche ts anzusetzen ist.

Für einreihige beiderseits gelaschte Nietungen, welche zweischnittig sind, wählt man die Stärke der Lasche $s_1 = \frac{5}{8}\,s$ bis $\frac{2}{3}\,s$ und setzt $d = \sqrt{5\,s} - 0{,}5$ cm und ferner $t = 2{,}6\,d + 1{,}0$ cm, $e = 1{,}5\,d$ und $e' = 0{,}9\,e$ gemäß Fig. 1004. Man läßt hier, wo zwei Nietflächen tragen, 1000 kg bis 1200 kg für 1 qcm des Nietquerschnittes als Beanspruchung zu und hält die Spannung

Fig. 1005.



$$\frac{Z}{(t-d)\,s}$$

unter der Grenze $\frac{1}{4}K_1$, falls K_1 die Zugfestigkeit des Blechmaterials bedeutet.

Ebenso verfährt man in anderen Fällen auf Grundlage bewährter Konstruktionen und mit Rücksicht auf die sogenannten Hamburger Normen [1]), welche durch den Internationalen Verband der Dampfkesselüberwachungsvereine aufgestellt worden sind.

Für Nietungen an Behältern für Flüssigkeiten bezw. Gase, welche keine erheblichen Kräfte zu übertragen haben, wählt man meist einreihige Nietungen, welche einschnittig sind. Man wählt hier s auf Grund der Erfahrungen und setzt $d = \sqrt{5\,s} - 0{,}4$ cm, $t = 3\,d + 0{,}5$ cm und $e = 0{,}5\,t$.

Bei Nietverbindungen für statische Eisenkonstruktionen, welche erhebliche Kräfte zu übertragen haben, aber keine Abdichtungen darstellen, wählt man meist

[1]) Bei Boysen und Maasch, Hamburg.

$$d = \sqrt{5}\,s - 0{,}2\,\text{cm}$$

oder auch $d \sim 2s$.

Die sonstigen Abmessungen pflegt man hier noch vielfach nach dem Vorgange von Schwedler auf folgende Weise zu bestimmen. Nimmt man an, daß ein Niet gemäß Fig. 1005 einen bogenförmigen Streifen des Bleches oder der Platte von der Breite b_0 beansprucht, so hat dieser Streifen vom Querschnitt $2b_0 s$ die Kraft als Zugkraft (k) aufzunehmen, welche der Niet als Schubkraft (k_s) aufnimmt, und demnach ist für einen einschnittigen Niet

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \,.\, k_s = 2 b_0 s \,.\, k.$$

Bei dem üblichen guten Materiale der Niete kann man für k_s bei dem Niete angenähert denselben Wert ansetzen wie für k bei dem Bleche, d. h. man hat

$$b_0 = \frac{\pi}{8} \frac{d^2}{s}$$

oder für $d \sim 2s$ auch

$$b_0 = \frac{\pi}{4} d \sim 0{,}8\,d.$$

Demnach ist ferner

$$b = d + 2 b_0 \sim 2{,}6\,d.$$

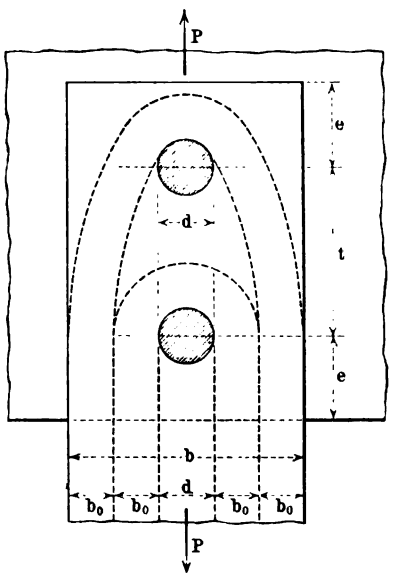
Um e zu bestimmen, faßt man $ABCD$ als einen Balken von der Länge d und dem Querschnitt $s \,.\, \bar{e}$ auf, welcher bei A und B eingeklemmt ist und die gleichmäßige Belastung $[P]$ trägt. Nach der Festigkeitsgleichung ist dann

$$\tfrac{1}{12} P d = k_b \,.\, \tfrac{1}{6} s \bar{e}^2$$

oder, da $k_b \sim k \sim k_s$ ist, mit $k_b = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2}$

$$\bar{e}^2 = \frac{\pi}{8} \,.\, \frac{d^3}{s}.$$

Fig. 1006.



Für $d \sim 2s$ ist demnach $\bar{e} \sim d$ und also

$$e \sim 1{,}5\,d.$$

Für einen zweischnittigen Niet ist ebenso

$$P = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \,.\, k_s = 2 b_0 s \,.\, k$$

und demnach

$$b_0 = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{s}$$

oder für $d \sim 2s$ auch

$$b_0 = \frac{\pi}{2} d \sim 1{,}6\,d$$

Demnach ist ferner $b = d + 2b_0 \sim 4{,}2\,d$ und $e \sim 1{,}75\,d$.

Auf Reihen von Nieten, welche senkrecht zur Kraftrichtung stehen oder mit dieser parallel sind, läßt sich das besprochene Verfahren leicht übertragen. Für zwei in der Kraftrichtung stehende einschnittige Niete ergiebt sich z. B. gemäß Fig. 1006 (a. v. S.), da $b_0 \sim 0{,}8\,d$ ist,

$$b = 4\,b_0 + d = 4{,}2\,d \quad \text{und} \quad e = 1{,}5\,d.$$

Dabei ist $t - d \sim e - \frac{d}{2}$ und also $t \sim 2\,e$.

Sind die Niete der Fig. 1006 zweischnittig, so ist, da $b_0 \sim 1{,}6\,d$ ist,

$$b = 4\,b_0 + d \sim 7{,}4\,d \quad \text{und} \quad e = 1{,}75\,d.$$

Dabei ist $t \sim e + \frac{5}{2}d \sim 2\,e$.

Die Beanspruchung einer Nietstelle in Fig. 1005 und Fig. 1006 ist im Verhältnis zur Beanspruchung des vollen Bleches

$$(b - d)\,s : bs = 1 - \frac{d}{b}.$$

Für $b = 2{,}6\,d$ ist $1 - \frac{d}{b} \sim 0{,}62$, für $b = 4{,}2\,d$ ist $1 - \frac{d}{b} \sim 0{,}76$, d. h. 62 bezw. 76 Proz.

Im allgemeinen darf man annehmen, daß 600 kg für 1 qcm des Nietquerschnittes zulässig sind, so daß für einschnittige Niete durch

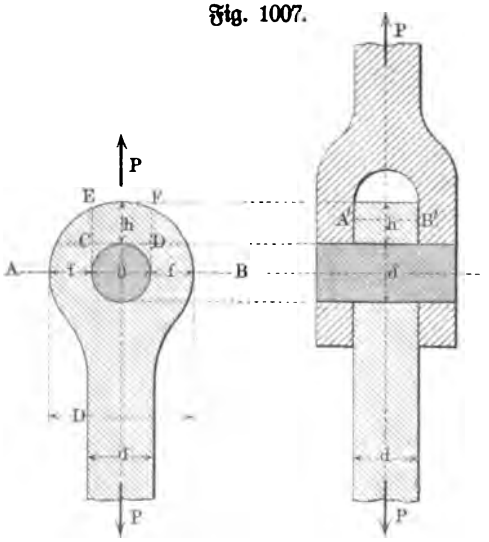
$$P \leqq 600 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot n$$

und für zweischnittige Niete durch

$$P \leqq 600 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot n$$

die Anzahl n der nötigen Niete bestimmt ist.

Fig. 1007.



Außerdem ist noch zu beachten, daß der Druck zwischen Nietschaft und Lochwand (Leibungsdruck) im Mittel die zulässige Spannung $k_2 = 2\,k_1 = 1500$ kg nicht überschreitet, so daß

$$P \leqq 2\,k_1 \cdot ds \cdot n$$

ist, falls s die geringste Plattenstärke innerhalb der Kraftrichtung bezeichnet. Ist der Wert von n, der sich aus letzterer Formel ergiebt, größer als der Wert von n gemäß den obigen Formeln, so ist der größere Wert zu wählen.

Für die Abmessungen bei der Vernietung von Winkeleisen u. s. w. sind auch besondere Tabellen vorhanden.

Um Drehmomente zu vermeiden, hat man die Niete stets so anzuordnen, daß der Schwerpunkt der Querschnitte aller Niete in die Kraftrichtung fällt.

Bei Nietverbindungen für kinetische Konstruktionen (Maschinenteile) nimmt man bei kalter Vernietung statt 600 kg höchstens 320 kg und statt 1500 kg höchstens 400 kg als zulässige Spannungen an für 1 qcm Nietquerschnitt, während bei warmer Vernietung noch erheblich kleinere Zahlen zu wählen sind.

Bei Wechsel der Kraftrichtung und Stoßbeanspruchung ist etwa nur 150 kg für 1 qcm des Nietquerschnittes als Spannung zulässig.

Für Verbolzungen, welche als einschnittige oder zweischnittige Nietungen aufzufassen sind, ist noch für das Stangenauge eine besondere Betrachtung nötig (vergl. Fig. 1007). Um gegen ein Abreißen bei AB sicher zu sein, macht man den Querschnitt an dieser Stelle gleich dem Querschnitt der Stange. Für eine Dicke d bei AB ist also, falls d zugleich der Durchmesser der cylindrischen Stange ist,

$$2 \cdot fd = \frac{\pi}{4} d^2$$

zu setzen, d. h. man hat

$$2f = \frac{\pi}{4} d$$

und

$$D = \delta + \frac{\pi}{4} d.$$

Außerdem ist der Teil $CDEF$ als ein beiderseits eingespannter Balken von der Länge δ und dem mittleren Querschnitte hd aufzufassen. Da der Bolzen das Loch meist nicht vollständig ausfüllt, so betrachtet man $[P]$ als Mittelbelastung und hat demnach

$$\tfrac{1}{8} P\delta = k_b \cdot \frac{dh^2}{b},$$

d. h. also

$$h = \sqrt{\frac{3}{4 k_b} P \frac{\delta}{d}}.$$

Für eine Kraft $[P]$ ist der Stangendurchmesser d gegeben durch

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_1$$

und es ist also für Schmiedeeisen mit $k_1 = 700$

$$d = 0{,}043 \sqrt{P}.$$

Für einen einschnittigen Bolzen ist mit Rücksicht auf Schub für $k_s = 600$

$$P = \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot 600$$

und also $\delta^2 = \frac{7}{6} d^2$ und $\delta = 1{,}08\, d \sim \frac{9}{8} d$.

Für einen zweischnittigen Bolzen ist ebenso

$$P = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot 600$$

und ebenso $\delta^2 = \frac{7}{12} d^2$ und $\delta \sim 0{,}8\, d$.

Für einschnittige Bolzen ist mit Rücksicht auf die Gefährdung bei AB

$$D = 1{,}08\,d + 0{,}78\,d = 1{,}9\,d$$

und mit Rücksicht auf die Gefährdung bei CD

$$D = \delta + 2\,h \sim 2{,}7\,d.$$

Bei zweischnittigen Bolzen ist mit Rücksicht auf die Gefährdung bei AB

$$D = 0{,}8\,d + 0{,}78\,d \sim 1{,}6\,d$$

und mit Rücksicht auf die Gefährdung bei CD

$$D = \delta + 2\,h = 2{,}2\,d.$$

In beiden Fällen überwiegt der letztere Wert, so daß durch ihn die Abmessung bestimmt wird.

Geht die eine Stange in eine Gabel aus, für welche der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten d und b ist, so ist

$$2\,bd = \frac{d^2\pi}{4},$$

d. h. $b \sim \frac{3}{8}\,d$.

Der Biegung des Bolzens entspricht bei zweischnittiger Nietung der Ansatz

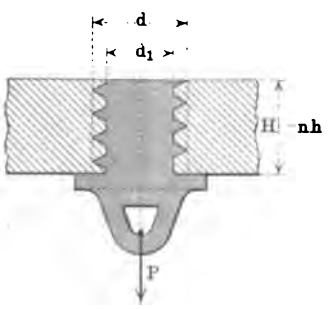
$$\tfrac{1}{8}\,Pd = k_b \cdot \frac{\pi}{32}\,\delta^3,$$

welcher zur Kontrolle der obigen Werte von d und δ dienen kann; dabei läßt sich $A'B'$ in Fig. 1007 unter Erhaltung des Wertes d für den Stangendurchmesser vergrößern.

Für einschnittige Niete gilt Entsprechendes.

4. Schrauben. Wird eine scharfgängige Schraube **widerstandslos** (ohne Last) angezogen und dann in **ruhendem** Zustande in der Richtung der Achse durch $[P]$ **auf Zug oder Druck** beansprucht, so bestimmt man den Kerndurchmesser d_1 gemäß Fig. 1008 durch

Fig. 1008.



$$P = \tfrac{1}{4}\,\pi d_1^2 \,.\, k.$$

Dem Mittelwerte $d_1^2 : d^2 = 0{,}64$ entspricht dann ferner

$$P \sim 0{,}5\,d^2 \,.\, k,$$

so daß für $k = 600$ Atm. $P \sim 300\,d^2$ ist, während für Schrauben mittlerer Güte ($k = 480$ Atm.) nur $P \sim 250\,d^2$ gilt.

Um die Sicherheit des Gewindes festzustellen, betrachtet man einen vollen Umgang und denkt sich diesen in ein dreiseitiges Prisma umgeformt, welches einen verjüngten Träger darstellt, dessen Breite bei der Spindel πd_1 und bei der Mutter πd beträgt; der mittleren Schraubenlinie entsprechend ist die Belastung in der Mitte der Gangtiefe anzunehmen. Für das metrische Gewinde (vergl. S. 577) ist

gemäß Fig. 1009 die Trägerhöhe als $\frac{7}{8}h$ anzusetzen, während der Hebelarm der Belastung $\frac{3}{8}h$ ist. Mit Rücksicht auf Biegung hat man demnach

$$P' \cdot \tfrac{3}{8}h = k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w},$$

wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{6}\pi d_1 (\frac{7}{8}h)^2$ für die Spindel und $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{6}\pi d (\frac{7}{8}h)^2$ für die Mutter ist.

Sind n Umgänge vorhanden, so ist $nP' = P$, und man hat für die Spindel

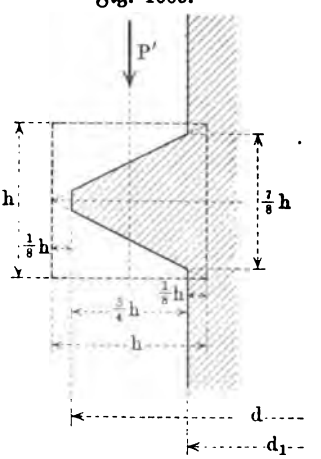
$$P \cdot \tfrac{3}{8}h = nk_b \cdot \tfrac{1}{6}\pi d_1 (\tfrac{7}{8}h)^2,$$

woraus die Höhe der Mutter

$$H = nh = \frac{P}{0{,}34\,\pi d_1 \cdot k_b}$$

folgt, falls Spindel und Mutter aus demselben Materiale sind; aus der Gleichung für die Mutter erhält man für nh einen kleineren Wert ($d > d_1$).

Fig. 1009.



Berechnet man das Gewinde auf Schub nach der Formel für das Rechteck (Ansatzstelle), so ist für die Spindel

$$k_s = \tfrac{3}{2}\frac{P}{n \cdot \pi d_1 \cdot \frac{7}{8}h},$$

woraus

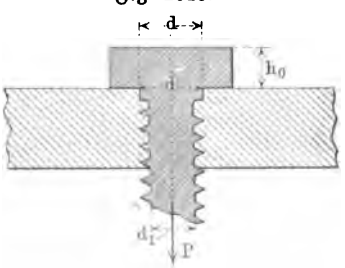
$$H = nh = \frac{P}{0{,}58\,\pi d_1 \cdot k_s}$$

folgt.

Für Schmiedeeisen ist für ruhende Belastungen $k_b = 900$ Atm., $k_s = 720$ Atm. und demnach überwiegt der Wert von H, der mit Rücksicht auf die Biegung folgt. Führt man noch $P = \frac{1}{4}\pi d_1^2 \cdot k$ ein, so ergiebt sich

$$H = nh = \frac{k}{1{,}36\,k_b} \cdot d_1 \sim d_1,$$

Fig. 1010.



da einerseits $k \sim k_b$ ist, während anderseits nicht darauf zu rechnen ist, daß alle Gänge des Gewindes stets gleichmäßig anliegen.

Gemäß der Gleichung für die Mutter wäre ($d > d_1$) ein kleinerer Wert von H ausreichend, falls sie auch aus Schmiedeeisen hergestellt wird.

Der Schraubenkopf ist auf Abscherung zu berechnen, und zwar verteilt sich $[P]$ gemäß Fig. 1010 auf die Cylinderfläche von der Höhe h_0 und den Durchmesser d, so daß

$$P = \pi d h_0 \cdot k_s$$

für die Kopfhöhe h_0 zu

$$h_0 = \frac{P}{\pi d k_s}$$

führt. Durch $P = 0{,}5\,d^2 k$ ergiebt sich noch

$$h_0 = \frac{0{,}5\,k}{\pi\,k_s} \cdot d.$$

Da der Schraubenkopf oft durch Aufschweißen eines Ringes auf das Bolzenende hergestellt wird, so ist $k_s = \frac{1}{4}k$ bis $\frac{1}{5}k$ zu nehmen, woraus

$$h_0 \sim 0{,}7\,d$$

folgt.

Dieser Ansatz für h_0 ist so reichlich, daß er auch benutzt werden darf, wenn die Spindel an der Kopfstelle nur den Durchmesser d_1 hat.

Um die Wandstärke w der Mutter zu bestimmen, giebt man meist die sogenannte Schlüsselweite $d + 2w$ an, für welche verschiedene empirische Formeln in Gebrauch sind; wir verweisen in dieser Hinsicht auf die entsprechenden üblichen Tabellen.

Wird eine scharfgängige Schraube unter Widerstand (mit Last) angezogen, so ist neben der Beanspruchung in Richtung der Achse auf Zug oder Druck stets auch eine Verdrehung derselben in Betracht zu ziehen. Man berücksichtigt hier zunächst die Pressung zwischen Spindel und Mutter. Die Projektion eines Umganges auf eine Ebene, senkrecht zur Achse, drückt die Fläche $\frac{1}{4}\pi(d^2 - d_1^2)$, so daß bei n Umgängen

$$P \leqq n \,.\, \tfrac{1}{4}\pi(d^2 - d_1^2) \,.\, k_z$$

anzusetzen ist; dabei ist für Schmiedeeisen $k_z \leqq 150$ Atm.

Ist ferner Mo das Moment für Verdrehung, so gilt für die entsprechende Schubspannung (vergl. S. 1095)

$$\tau = \frac{Mo}{\frac{\pi}{16}\,d_1^3},$$

während $\sigma = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}$ ist.

Gemäß S. 1056 und S. 1156 gilt dann

$$k_1 = 0{,}35 \,.\, \sigma + 0{,}65 \,.\, \sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0 \tau)^2}.$$

Ist Mo für eine scharfgängige Schraube (vergl. S. 577) gegeben als

$$Mo = P r_m \operatorname{tng}(\alpha_m + \psi) \quad \text{und} \quad \operatorname{tng}\psi \sim \frac{f \cos\alpha_m}{\cos\beta},$$

so ist für $f = 0{,}15$ und $\alpha_m = 2^\circ 15'$ und $\beta = 27^\circ 30'$ bei $r_m = \frac{1}{4}(d + d_1)$ $\sim 0{,}55\,d_1$

$$Mo = 0{,}11\,P d_1.$$

In diesem Fall ist

$$k_1 = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}\left[0{,}35 + 0{,}65\,\sqrt{1 + 4\,(\alpha_0 \,.\, 0{,}44)^2}\right].$$

Für $\alpha_0 = \frac{k_1}{1{,}3 \,.\, k_d}$ ergiebt sich bei Schmiedeeisen mit $k_1 = 600$ Atm. und $k_d = 360$ Atm. angenähert $\alpha_0 = \frac{4}{3}$ und demnach des weiteren

$$k_1 \sim \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d_1^2} \cdot \frac{4}{3},$$

woraus folgt

$$P \sim \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \pi d_1^2 \cdot k_1,$$

d. h. hier ist P rund drei Viertel des Wertes für Schrauben, die widerstandslos angezogen werden.

Bei Schmiedeeisen ist hier für $k_1 = 480$ bis 600 Atm. demnach

$$d_1 = 0{,}060 \sqrt{P} \text{ bis } 0{,}053 \sqrt{P}$$

und man hat, bei $d \geqq 1{,}2$ cm, im Mittel

$$P \sim 180\, d^2 \text{ bis } 225\, d^2.$$

Wegen des ursprünglichen Anziehens mit der Last und des notwendigen Nachziehens setzt man bei Befestigungsschrauben nur an

$$P \sim 135\, d^2 \text{ bis } 170\, d^2.$$

Man hat auch hier, wie oben, bei Schmiedeeisen $H = d_1$ u. s. w.

Flachgängige Schrauben, welche als Bewegungsschrauben verwendet werden, sind so zu berechnen, wie die zuletzt behandelten Befestigungsschrauben, welche mit der Last angezogen werden, nur ist hier (vergl. S. 574)

$$Mo = P r_m (tng\, \alpha_m + \varphi).$$

Außerdem ist dabei die Reibung an der Mantelfläche und auch an der Stützfläche durch ein besonderes Mo zu berücksichtigen; ferner ist bei der Pressung für k_2 nur etwa die Hälfte der Werte für Befestigungsschrauben zu verwenden, also bei Schmiedeeisen etwa $k_2 \leqq 75$ Atm.

Man pflegt flachgängige Schrauben in der Praxis so zu berechnen, daß man zunächst nach der Formel

$$P = \tfrac{1}{4} \pi^2 d_1 \cdot k$$

den Kerndurchmesser bestimmt, dabei aber für Schmiedeeisen k nur $\frac{1}{3} \cdot 480$ bis $\frac{1}{3} \cdot 600$ Atm. setzt, und dann die übrigen Abmessungen schätzungsweise hinzufügt, und darauf die so bestimmten Abmessungen auf ihre Sicherheit gegen Beanspruchung durch Zug und Verdrehung prüft bezw. verbessert.

Ist eine Schraube auf Druck beansprucht, so gilt Entsprechendes, nur hat man sie dabei auch gelegentlich noch auf Knickung gemäß Fall II zu berechnen.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß sich scharfgängige und flachgängige Schrauben in Bezug auf Beanspruchung durch Zug oder durch Verdrehung bald günstiger und bald ungünstiger verhalten als Rundstäbe, welche den Kerndurchmesser der Schraube als Durchmesser haben.

5. Haken und Ösen. Die Ebene der Zeichnung sei für Fig. 1011 (a. f. S.) die Symmetrieebene des in ihr im Schnitt dargestellten Hakens. Wenn S der Punkt seiner Mittellinie ist, welcher von der Vertikalen durch $[P]$ den größten Abstand hat, so ist das biegende Moment von $[P]$ für den Schnitt $A_1 A_2$ ein Maximum, und zwar liegt die Zugseite mit der Spannung σ_1 bei A_1 und die Druckseite mit der Spannung σ_2 bei A_2.

Nach Gleichung Nr. 476) gilt für die Berechnung dieser Spannungen die Formel

$$\sigma_v = \frac{P}{f} + \frac{Mo}{f \cdot \varrho} + \frac{Mo}{B\varrho} \cdot \frac{v}{1 + \frac{v}{\varrho}}$$

und zwar für eine Faſerſchicht, die im Querſchnitt den Abſtand v von deſſen Schwerpunktsachſe hat, wie es in Fig. 1011 a und b angedeutet iſt; dabei iſt $Mo = -P(p + w_1)$, weil das Moment die Krümmung vermindert. Faßt man den Querſchnitt gemäß Fig. 1011 b als ein Trapez auf, ſo gilt nach S. 1205 für ϱ als Krümmungsradius der betrachteten Stelle $A_1 A_2$

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2} h \left[1 - \frac{2\varrho}{(b_1 + b_2)h} \left\{\left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h}(w_2 + \varrho)\right) log\, nat \frac{\varrho + w_2}{\varrho + w_1} - (b_1 - b_2)\right\}\right]$$

und außerdem iſt allgemein $-A\varrho = B$.

Für $lim\, \varrho = \infty$ iſt $B\varrho = \mathfrak{T}r$ und man hat demnach

$$\sigma_v = \frac{P}{f} + \frac{Mo}{\mathfrak{T}r} \cdot v = \frac{P}{f} - \frac{P(p + w_1)}{\mathfrak{T}r} \cdot v,$$

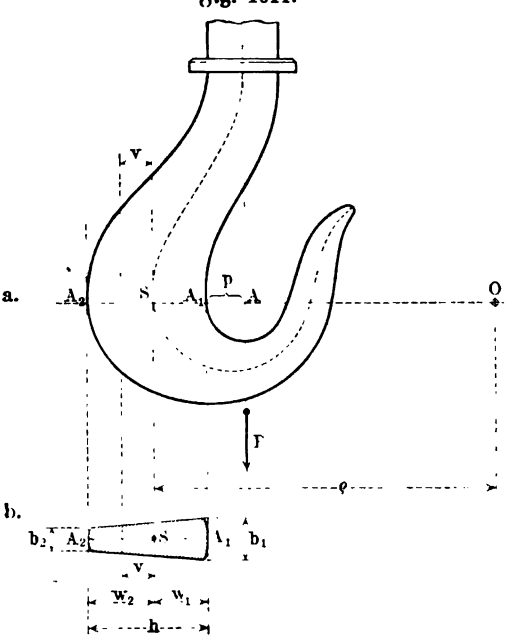
d. h. für $v = -w_1$ in A_1

$$\sigma_1 = \frac{P}{f} + \frac{P(p + w_1)}{\mathfrak{T}r} \cdot w_1$$

und für $v = +w_2$ in A_2

$$\sigma_2 = \frac{P}{f} - \frac{P(p + w_1) w_2}{\mathfrak{T}r}.$$

Fig. 1011.



In dieſem Falle, in welchem der Haken ſich in der Umgebung von $A_1 A_2$ wie ein gerader Stab verhält, kommt man alſo zurück zu den Formeln für den geraden Balken.

Soll das Material dabei voll ausgenutzt werden, ſo muß der Wert der Zugſpannung σ_1 in A_1 mit dem Werte der Druckſpannung σ_2 in A_2 übereinſtimmen, d. h. man hat

$$\frac{P}{f} + \frac{P(p + w_1) w_1}{\mathfrak{T}r} = -\frac{P}{f} + \frac{P(p + w_1) w_2}{\mathfrak{T}r}$$

oder

$$(p + w_1)(w_2 - w_1) f = 2\,\mathfrak{T}r.$$

Setzt man für das Trapez der Fig. 1011 b die Werte w_1, w_2, f und $\mathfrak{T}r$ in dieſe Gleichung ein, ſo erhält man die Beziehung

$$p = h \cdot \frac{b_2}{b_1 - b_2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß ϱ sehr groß ist im Vergleich zu h, hat man also $b_1 : b_2$ und h beliebig zu wählen und dann p gemäß der eben gewonnenen Beziehung zu bestimmen, um in A_1 und A_2 Spannungen von gleichem Werte zu erhalten.

Für $b_1 : b_2 = 2$ ist z. B. für diesen Zweck $p = h$ zu wählen, für $b_1 : b_2 = 3$ ebenso $p = \frac{1}{2}h$, für $b_1 : b_2 = 4$ ebenso $p = \frac{1}{3}h$.

Für die Ausführung der Haken wählt man meist $h : p = 2$ bis $h : p = 3$, so daß dann $b_1 : b_2 = 3$ bis $b_1 : b_2 = 4$ zu setzen ist, falls der Haken bei $A_1 A_2$ angenähert geradlinig verläuft und die Spannungen bei A_1 und A_2 gleiche Werte haben sollen.

Ist die Gleichung $lim\, \varrho = \infty$ auch nicht angenähert erfüllt, so hat man die im Eingange gegebene Formel zu benutzen. Bei der Ausführung der Haken fällt dabei meist der Mittelpunkt O der Krümmung in die Vertikale von $[P]$, d. h. also an die Stelle A und infolgedessen ist $\varrho = p + w_1$. Man hat in diesem Falle $Mo : \varrho = -P$ und demnach

$$\sigma_v = -\frac{P(p + w_1)}{B} \cdot \frac{v}{p + w_1 + v}.$$

Für die Stelle A_1, an welcher $v = -w_1$ ist, gilt dann

$$\sigma_1 = \frac{P(p + w_1)}{B} \cdot \frac{w_1}{p} = -\frac{P w_1}{A p}$$

und demnach ist für $\sigma_1 = k_1$

$$\frac{-A}{w_1} = \frac{P}{k_1 p}.$$

Für $b_2 : b_1 = \beta$ folgt daraus

$$b_1 = \frac{P}{k_1 p} \cdot C,$$

wobei

$$\frac{1}{C} = -\tfrac{3}{2}\frac{(1+\beta)^2}{1+2\beta} + \left[1 + \frac{3(1+\beta)}{1+2\beta} \cdot \frac{p}{h}\right] \cdot \left[\left(\beta + (1-\beta)\left(1 + \frac{p}{h}\right)\right) log\, nat\left(1 + \frac{h}{p}\right) - 1 + \beta\right].$$

Bei Ausführungen setzt man $\frac{b_2}{b_1} = \beta = \frac{p}{h + p}$, so daß C durch $h : p$ völlig bestimmt ist.

Da bei dem gegebenen Verhältnis von $h : p$ für C Tabellen vorhanden sind, so ist die größte Breite b_1 schließlich sehr einfach zu bestimmen.

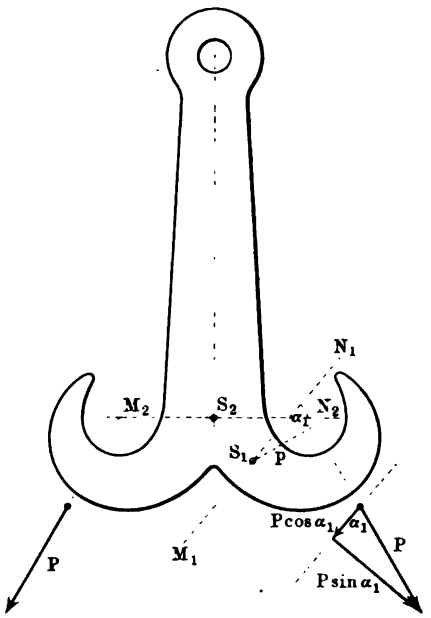
Soll ein Haken ein Seil oder eine Kette tragen, so bestimmt man zunächst den Maulhalbmesser p nach der Seilstärke s oder nach der Stärke s des Ketteneisens; im ersteren Falle ist $p = \frac{3}{4}s$ bis $p = s$ zu nehmen, im letzteren Falle $p = s$ bis $p = 1{,}5\,s$. Darauf wählt man das Verhältnis $h : p$ und bestimmt auf diese Weise h und ferner $\beta = b_2 : b_1$, worauf dann

obige Formel für b_1 mit Hülfe der Tabelle für C den Wert von b_1 giebt. Dabei sind für k_1 bei bestem Schweißeisen bis zu 1000 Atm. zulässig.

Für den äußeren Durchmesser d der Verschraubung des Schaftes in Fig. 1011 wählt man d gemäß S. 1440 für d in Centimetern nach der Formel

$$P = 240\,d^2 \text{ bis } 300\,d^2.$$

Fig. 1012.



Für den Durchmesser des Schaftes selbst wählt man dann etwa $d + 0{,}4$ cm.

Das Querstück der Verschraubung und dessen Zapfen sind auf Biegung zu berechnen, die Zapfen unter Berücksichtigung des Flächendrucks gemäß $k_2 \leqq 100$ Atm.

Für $\beta = 1$ bezw. $b_1 = b_2$ gilt unsere Betrachtung für einen Haken, dessen Querschnitt ein Rechteck ist; hier ist

$$\frac{1}{C} = -2 + \left(1 + \frac{2p}{h}\right) \cdot log\,nat\left(1 + \frac{h}{p}\right).$$

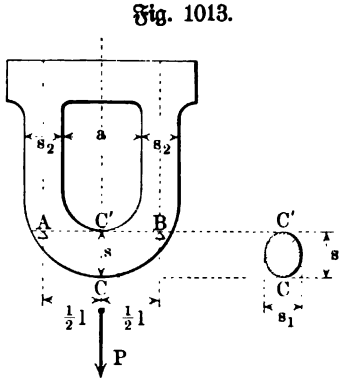
Ist der Querschnitt eine Ellipse, deren große Achse mit h in Fig. 1011 übereinstimmt, während ihre kleine Achse b_1 genannt wird, so ist gemäß S. 1205 für diese Ellipse A zu bestimmen, woraus dann wieder

$$b_1 = \frac{P}{k_1 p} \cdot C$$

folgt mit

$$\frac{1}{C} = \pi\,[\xi^2 - \zeta\sqrt{\xi^2 - 1} - \tfrac{1}{2}] \text{ für } \zeta = 1 + \frac{2p}{h}.$$

Fig. 1013.



Bei dem Doppelhaken der Fig. 1012 kann man den gefährlichen Querschnitt nicht von vornherein bestimmen. Man legt infolgedessen nach Schätzung etwa die Schnitte $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ und führt gemäß der Theorie des krummen Balkens für den ersten die Normalkraft vom Werte $P_1 \sin\alpha_1$, die Schubkraft vom Werte $P_1 \cos\alpha_1$ und das biegende Moment vom Werte $P p_1$ ein, für den zweiten Entsprechendes; dabei kann man die Schubkraft im allgemeinen unberücksichtigt lassen.

Bei einseitiger Belastung ist jedenfalls der Schnitt $M_2 N_2$ zu berechnen.

Bei Ösen, wie sie Fig. 1013 darstellt, ist a nach der Stärke s des Seiles u. s. w. zu bestimmen. Das Stück $AC'BC$ faßt man als einen beiderseits eingespannten Balken mit der Mittelbelastung $[P]$ auf. Ist der gefährliche Querschnitt CC' eine Ellipse (vergl. Fig. 1013 b) von den Achsen s und s_1, so ist

$$\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{2}\right)^2 \frac{s_1}{2} \sim 0{,}1\, s^2 s_1$$

und man hat den Ansatz

$$\tfrac{1}{8} Pl = k_b \,.\, 0{,}1\, s^2 s_1$$

zur Bestimmung von s, nachdem $s_1 = s_2$ sachgemäß (z. B. gleich der Seilstärke s) angenommen ist.

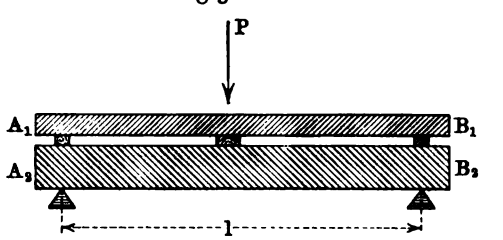
Für Schmiedeeisen ist hier $k_b = 900$ Atm.

Zweite Gruppe.

Teile von Hochbauten und Ingenieurbauten.

6. Gemeinsam tragende Balken. Wird eine Last $[P]$ durch zwei nebeneinander oder übereinander gelagerte Balken getragen, so ist deren Verteilung auf die beiden Balken im allgemeinen statisch unbestimmt.

Fig. 1014.



Für den Fall der Fig. 1014 ist durch Zwischenlagerung loser Klötze dafür gesorgt, daß für beide Balken bei gleicher frei tragender Länge l die gleiche Art der Beanspruchung (Mittelbelastung) gilt und daß auch ihre größten Durchbiegungen (in der Mitte) denselben Wert erhalten. Kommen von P bezw. die Beträge P_1 und P_2 auf die beiden Balken, so ist demnach für die Mitte

$$\tfrac{1}{48} \frac{P_1 l^3}{E_1 \mathfrak{Tr}_1} = \tfrac{1}{48} \frac{P_2 l^3}{E_2 \mathfrak{Tr}_2},$$

d. h. man hat

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1 \mathfrak{Tr}_1}{E_2 \mathfrak{Tr}_2}.$$

Nach der Festigkeitsgleichung gilt für die Mitte

$$\tfrac{1}{4} P_1 l = \sigma_1 \frac{\mathfrak{Tr}_1}{w_1} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{4} P_2 l = \sigma_2 \frac{\mathfrak{Tr}_2}{w_2}$$

und darum ist auch

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1 w_1}{E_2 w_2}.$$

Entsprechendes gilt für alle Fälle der Nebeneinander- oder Übereinanderlagerung, bei welchen die Bedingungen der Fig. 1014 entsprechend erfüllt sind,

gemäß der Festigkeitsgleichung und der Formänderungsgleichung. Für die Tragkraft P der beiden Balken der Fig. 1014 gilt

$$\tfrac{1}{4}(P_1 + P_2)\,l = \tfrac{1}{4}Pl = \sigma_1 \frac{\mathfrak{T}r_1}{w_1} + \sigma_2 \frac{\mathfrak{T}r_2}{w_2}.$$

Sind die Balken aus gleichem Material ($E_1 = E_2$), so ist bei gleicher Höhe ($w_1 = w_2$) auch $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, und man hat also

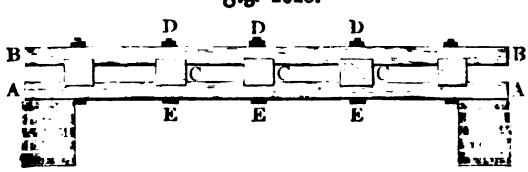
$$\tfrac{1}{4}Pl = \sigma\left(\frac{\mathfrak{T}r_1}{w_1} + \frac{\mathfrak{T}r_2}{w_2}\right).$$

Für Rechtecke (b, h) als Balkenquerschnitte ist also z. B. für $h_1 = h_2 = h$

$$\tfrac{1}{4}Pl = \sigma \cdot \frac{h^2}{6}(b_1 + b_2),$$

d. h. die Balken verhalten sich in diesem Falle wie ein Balken von der Höhe h und von der Breite $b_1 + b_2$, entsprechend einer Nebeneinanderlagerung.

Fig. 1015.

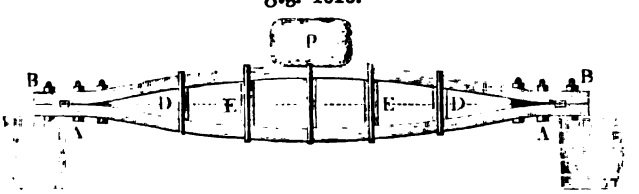


Werden n Balken von gleicher Beschaffenheit nebeneinander gelagert, um $[P]$ zu tragen, so trägt jeder Balken bei gehöriger Anordnung $\frac{1}{n}P$, d. h. das System der Träger läßt sich als ein Balken vom Querschnittsmodul $n \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ auffassen, falls $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ der Querschnittsmodul für einen der Balken ist.

Dasselbe gilt auch für n Balken von gleicher Beschaffenheit, die nach Art der Fig. 1014 übereinander gelagert werden.

Bei der Übereinanderlagerung läßt sich die Tragfähigkeit dadurch steigern, daß man das System der Balken durch Verzahnung, Verdübelung u. s. w. zu einem Balken macht. Bei rechteckigem Querschnitt (b, h)

Fig. 1016.



der gleichen Balken ist der Querschnittsmodul für einfache Übereinanderlagerung $n \cdot \frac{bh^2}{6}$, während er bei Verbindung zu einem Balken $\frac{b(nh)^2}{6}$ ist, so daß sich die beiden Querschnittszahlen verhalten wie $1 : n$.

Da es für die Tragfähigkeit günstig ist, die Balkenhöhe zu steigern, so stellt man auch Anordnungen her, wie sie Fig. 1015 zeigt. Für einen Abstand a der Mitten der beiden gleichen rechteckigen (b, h) Balken ist der Querschnitt gemäß Fig. 2 auf S. 904 aufzufassen für $h_2 = a - h$ und $h_1 = a + h$, so daß

$$\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_1 = \frac{bh(3a^2 + h^2)}{3(a + h)}$$

ist, während bei unmittelbarer Verzahnung oder Verdübelung u. s. w. der beiden Balken ($a = h$)

$$\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_2 = \tfrac{2}{3} bh^2$$

wäre. Da

$$\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_2 \cdot \frac{1 + 3\left(\frac{a}{h}\right)^2}{1 + \frac{a}{h}}$$

ist, so ist stets $\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_1 > \left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_2$ mit Rücksicht auf $a > h$ und zwar wächst $\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_1$ mit wachsendem a.

Bei einer Mittelbelastung $[P]$ ist P bestimmt durch

$$\tfrac{1}{4} Pl = k\left(\frac{\mathfrak{T}r}{w}\right)_1.$$

Um die Tragfähigkeit zu erhöhen, wandte man auch früher vielfach sogenannte gesprengte Balken an, bei welchen die Enden der Balken durch Bänder zusammengehalten werden, während sie sonst durch Zwischenstreben voneinander entfernt gehalten sind und somit eine mäßige Biegung annehmen (vergl. Fig. 1016). Bezeichnet man für gleiche rechteckige Balken (b, h) hier die größte Entfernung der Balkenmitten durch a, so zeigt jeder Balken im unbelasteten Zustande gegen die Mittellinie die Durchbiegung $d = \frac{1}{2}(a - h)$. Angenähert darf man diese Durchbiegung durch eine Mittelbelastung $[P']$ bei eingespannten Enden des Balkens hervorgerufen denken, so daß

$$d = \tfrac{1}{192} \frac{P' l^3}{E \mathfrak{T}r} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{8} P' l = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$$

ist, woraus bei $w = \frac{h}{2}$

$$\sigma = 12 \frac{dh}{l^2} \cdot E$$

folgt.

Durch eine Belastung $[P]$ wird gemäß der vorigen Betrachtung (Fig. 1015) für die Mitte eine Spannung σ' hervorgerufen, für welche

$$\tfrac{1}{4} Pl = \sigma' \cdot \frac{bh(3a^2 + h^2)}{3(a + h)}$$

gilt.

Bei Ausnutzung des Materials ist auf der Zugseite $\sigma + \sigma' = k_1$, d. h. man hat dann für diese

$$12 \frac{dh}{l^2} E + \tfrac{3}{4} Pl \frac{a + h}{bh(3a^2 + h^2)} = k_1,$$

woraus für die Tragkraft P folgt

$$P = \frac{k_1 l^3 - 12\,dhE}{k_1 l^3} \cdot \overline{P},$$

falls $\overline{P}$ die Tragkraft für den vorigen Fall (Fig. 1015) bedeutet.

Man sieht, daß P für $d = 0$ bezw. für $a = h$ seinen größten Wert $\overline{P}$ erreicht, daß also der Anordnung der Fig. 1015 stets eine größere Tragfähigkeit entspricht als der Anordnung der Fig. 1016.

Dagegen bietet die Sprengung gegenüber der unmittelbaren Aufeinanderlagerung einen Vorteil, wenn

$$P > \tfrac{8}{3} k_1 \frac{bh^2}{l},$$

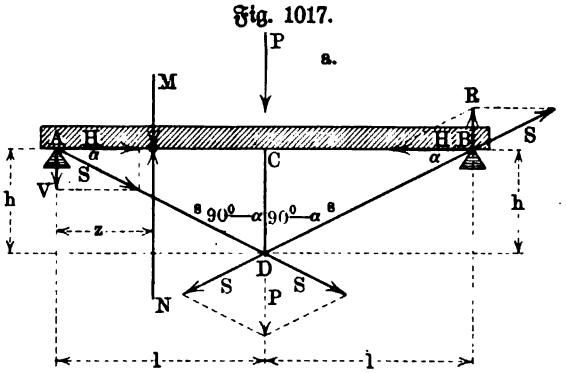
woraus sich für ein bestimmtes $a : h$ das für die Sprengung erforderliche Verhältnis $l : h$ oder umgekehrt leicht ableiten läßt.

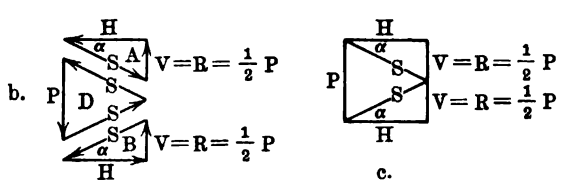
Bei verzahnten oder verdübelten Balken u. s. w. stellen die Zähne den nötigen Widerstand gegen den Schub, parallel zur neutralen Schicht her, welcher bei Balken aus einem Stück durch die Festigkeit des Materials geliefert wird.

Diese Untersuchungen lassen sich auch leicht auf gekreuzte und aufeinander befestigte Balken ausdehnen.

7. Armierte Träger bezw. Hängewerke und Sprengwerke. Durch Verbindung eines Zweistützenträgers mit Spannstangen entstehen eine Reihe von gebräuchlichen Konstruktionen, welche bei genauerer Behandlung als statisch-unbestimmte Fachwerke aufgefaßt werden müssen.

Fig. 1017.





Für viele Anwendungen reicht eine angenäherte Betrachtung dieser Konstruktionen aus, wie sie zunächst durchgeführt werden soll.

Wird der sogenannte einfach armierte Träger der Fig. 1017 durch eine Mittelbelastung $[P]$ ergriffen, so erhält die Stange CD den Druck P. Die Zerlegung von $[P]$ in D nach den Richtungen DA und DB giebt die beiden Zugkräfte $S = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} P \cdot \frac{s}{h}$, während die Zerlegung von $[S]$ in A oder in B zu den Drucken $H = S \cos \alpha = \frac{1}{2} P \cot \alpha = \frac{1}{2} P \frac{l}{h}$

und zu den Kräften $V = S \sin\alpha = \frac{1}{2} P$ führt, welchen letzteren die Auflagerreaktionen entsprechen.

Um die Spannkräfte in den Stangen sicher als Zugkräfte (+) und als Druckkräfte (—) zu unterscheiden, hat man stets zu beachten, daß ein gezogener Stab sich wieder zu verkürzen und ein gedrückter Stab sich wieder zu verlängern sucht und daß infolgedessen den Kräften, welche an einem Knoten im Gleichgewicht stehen, als Stabkräfte stets Kräfte von umgekehrter Richtung entsprechen.

Verschiebt man die äußere Kraft $[P]$ nach D, so zeigt die Zerlegung nach DA und DB in Fig. 1017 a unmittelbar, daß diese Stangen gezogen werden; infolgedessen wird der Knoten A in der Richtung AD und der Knoten B in der Richtung BD beansprucht, woraus sich die in Fig. 1017 a bei A gezeichneten Kräfte $[H]$ und $[V]$ ergeben.

Beginnt man die Betrachtung mit der in Fig. 1017 a bei B gezeichneten Reaktion $[R]$, so zeigt die Zerlegung nach BA und DB unmittelbar, daß BA gedrückt und DB gezogen wird; infolgedessen wird der Knoten D in der Richtung DB und der Knoten A in der Richtung BA beansprucht u. s. w. In Fig. 1017 b ist das Gleichgewicht an den drei Knoten gesondert, in Fig. 1017 c in Zusammenfassung dargestellt.

Man berechnet nun den Hauptbalken AB auf Druck bezw. Knickung und Biegung, die Spannstangen DA und DB nur auf Zug und die Strebe CD nur auf Druck bezw. Knickung.

Bei gleichmäßiger Belastung ($2Q = 2l\gamma$) sieht man AB als Dreistützenträger an, und zwar mit den Stützpunkten A, C, B, auf welche demnach gemäß S. 1018 bezw. die Belastungen $\frac{3}{8} Q$, $\frac{10}{8} Q$, $\frac{3}{8} Q$ fallen. Hier ist demnach eine Mittelbelastung vom Werte $P = \frac{5}{4} Q$ anzusetzen, so daß nach der vorigen Betrachtung CD den Druck $\frac{5}{4} Q$ ausgehalten hat. Man hat dann ferner in diesem Falle ($P = \frac{5}{4} Q$)

$$S = \frac{5}{8} \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{5}{8} Q \frac{s}{h}$$

$$H = \frac{5}{8} Q \cot\alpha = \frac{5}{8} Q \frac{l}{h}$$

$$V = \frac{5}{8} Q.$$

Jedes Auflager nimmt zunächst $\frac{3}{8} Q$ und dann durch V noch $\frac{5}{8} Q$, d. h. im ganzen Q auf.

Für die Biegung von AB ist in C

$$Mo_{max} = \frac{1}{8} Ql,$$

so daß neben der Druckspannung $\sigma_1 = \frac{H}{f}$ noch die Biegungsspannung $\sigma_2 = \frac{Ql \cdot w}{8 \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ zu berücksichtigen ist; man hat dann wieder für die Zugseite

$$\pm(\sigma_1 - \sigma_2) \leqq k_1 \text{ oder } k_2$$

und für die Druckseite

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leqq k_2$$

anzusetzen.

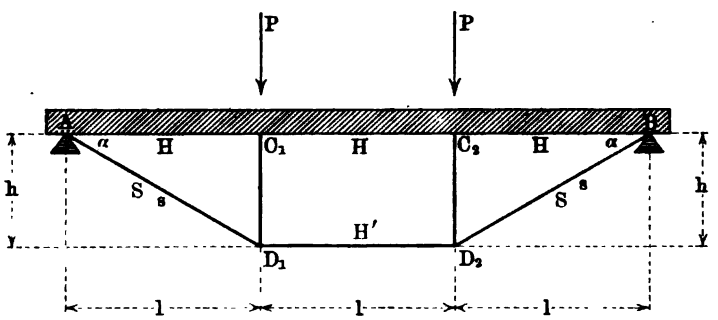
Die Strebe DC ist auf Knickung zu berechnen gemäß Gleichung Nr. 433) mit $\alpha = 1$, die Streben DA und DB auf Zug.

Zur Behandlung von AB vergl. auch §§ 184 und 185.

Dreht man die Konstruktion der Fig. 1017 a um AB um 180°, während $[P]$ unverändert bleibt und wieder in C angreift, so entsteht ein **einfaches Hängewerk**, für welches die Betrachtung dieselbe bleibt wie für den einfach armierten Balken; da hier in DA und DB Druck und in AB Zug herrscht, so sind jetzt DA und DB auf Druck bezw. Knickung zu berechnen.

Für den **zweifach armierten Träger** der Fig. 1018 mit gleicher Felderteilung (l) ist bei Belastung von C_1 und C_2 durch Kräfte vom Werte P in C_1D_1 und C_2D_2 der Druck P vorhanden.

Fig. 1018.



Die Zerlegung von $[P]$ in D_1 oder D_2 liefert die Zugkraft $S = \frac{P}{\sin\alpha} = P \cdot \frac{s}{h}$ und die Zugkraft $H' = P\cot\alpha = P \cdot \frac{l}{h}$, während die Zerlegung von $[S]$ in A oder B die Druckkraft $H = P\cot\alpha = P \cdot \frac{l}{h}$ und die Kraft $V = P$ liefert.

Bei gleichmäßiger Belastung ($3\,Q = 3\,l\gamma$) ist AB als Vierstützenträger anzusehen und zwar mit den Stützpunkten A, C_1, C_2, B, auf welche gemäß Berechnung oder Tabelle bezw. die Belastungen $0{,}4\,Q$, $1{,}1\,Q$, $1{,}1\,Q$, $0{,}4\,Q$ fallen. Hier ist demnach in C_1 eine Belastung vom Werte $P = 1{,}1\,Q$ anzusetzen, so daß nach der vorigen Betrachtung C_1D_1 und C_2D_2 den Druck $1{,}1\,Q$ ausgehalten haben. Man hat dann ferner in diesem Falle

$$S = 1{,}1\,\frac{Q}{\sin\alpha} = 1{,}1\,Q \cdot \frac{s}{h}$$

$$H' = 1{,}1\,Q\cot\alpha = 1{,}1\,Q\,\frac{l}{h}$$

$$H = 1{,}1\,Q\cot\alpha = 1{,}1\,Q\,\frac{l}{h}$$

$$V = 1{,}1\,Q.$$

Man hat für AB hier, und zwar in C_1 und C_2,

$$Mo_{max} = 0{,}1\ Ql,$$

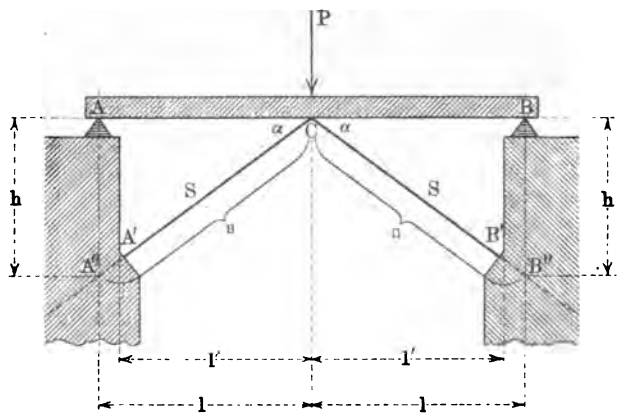
rechnet aber in der Praxis oft mit $Mo_{max} = 0{,}125\ Ql = \frac{1}{8} Ql$.

Dreht man wieder die Konstruktion der Fig. 1018 um AB um 180°, während die beiden Kräfte vom Werte P ihre Richtung beibehalten, so entsteht ein doppeltes Hängewerk, für welches die Rechnung dieselbe bleibt wie für den doppelt armierten Balken; hier herrscht in AD_1 und BD_2 Druck, in AB Zug und in D_1D_2 Druck.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Kräfte vom Werte P in C_1 und C_2 angreifen, nicht aber in D_1 und D_2, weil die Hängesäulen D_1C_1 und D_2C_2 im letzteren Falle nahezu spannungslos bleiben, während sich die Kräfte vom Werte P nach D_1A und D_1D_2 sowie auch D_2B und D_2D_1 zerlegen.

Bei unsymmetrischer Belastung pflegt man die Konstruktion der Fig. 1018 durch einen Diagonalstab C_1D_2 oder auch durch zwei Diagonalstäbe C_1D_2 und C_2D_1 zu versteifen.

Fig. 1019.



Für das einfache Sprengwerk der Fig. 1019 findet man bei Mittelbelastung durch Zerlegung in C die Druckkraft $S = \frac{1}{2} \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} P \cdot \frac{s}{h}$ für $CA'' = CB'' = s$; eine Zerlegung von S in A oder B giebt wieder die Kräfte $H = S \cos \alpha = \frac{1}{2} P \cot \alpha = \frac{1}{2} P \frac{l}{h}$ und $V = \frac{1}{2} P$.

Bei gleichmäßiger Belastung ist AB wieder als Dreistützenträger aufzufassen, so daß $P = \frac{5}{4} Q$ ist für $2\,Q = 2\,l\gamma$.

Bei dem doppelten Sprengwerke der Fig. 1020 (a. f. S.), dessen Knoten mit Kräften vom Werte P belastet sind, giebt die Zerlegung von P nach C_1C_2 und C_1A'' den Druck $H' = P \cdot \cot \alpha = P \cdot \frac{l}{h}$ und den Druck $S = \frac{P}{\sin \alpha} = P \cdot \frac{s}{h}$, während eine weitere Zerlegung von S in A'' oder B'' dort die Kräfte $H = H'$ und $V = P$ liefert.

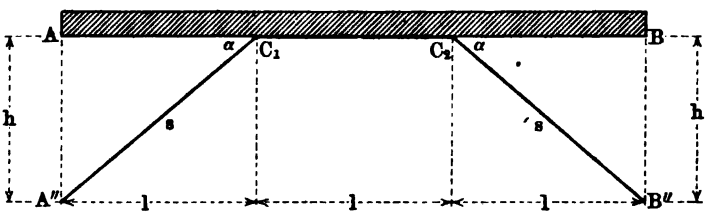
Bei gleichmäßiger Belastung ist AB wieder als Vierstützenträger aufzu-

fassen, so daß $P = 1{,}1\,Q$ ist für $3\,Q = 3\,l\gamma$. Bei den Sprengwerken ist die Stabilität der Pfeiler in Bezug auf $[H]$ und $[V]$ zu beurteilen.

Die Werte der Spannkräfte der betrachteten Konstruktionen lassen sich natürlich auch durch die Ritterschе Methode gewinnen.

Die entwickelten Formeln sind nur als gute Näherungsformeln zu betrachten, vor allem, weil die Formänderungen der einzelnen Teile nicht berücksichtigt wurden.

Fig. 1020.



Für eine genauere Behandlung müssen die betrachteten Konstruktionen als statisch-unbestimmte Fachwerke aufgefaßt werden, welche gewisse elastische Formänderungen zeigen. Für den einfach armierten Träger der Fig. 1017 a, welcher bei A und B frei aufgelagert ist, sind alle Spannkräfte bekannt, wenn eine von ihnen gegeben ist. Nimmt man den Wert von $[S]$ als gegeben an, so ist $H = S\cos\alpha$ und $V = S\sin\alpha$, während $S' = 2\,S\sin\alpha = 2\,V$ der Druck in CD ist.

Wir wollen nun S hier nach dem Satze von Castigliano wirklich bestimmen, und zwar bei beliebiger Belastung von AB. Dazu betrachten wir die beiden Teile AC und BC von AB bezw. von A und B aus für sich. Für einen Schnitt MN durch AC ist das biegende Moment für den linken Teil des Trägers

$$Mo = \overline{Mo} + V\varepsilon = \overline{Mo} + \varepsilon S\sin\alpha,$$

falls $\overline{Mo}$ das Moment der Belastung in der Schnittstelle MN für AB als gewöhnlichen Zweistützenträger bezeichnet, da außerdem nur $[S]$ mit seinen Komponenten $[V]$ und $[H]$ in Frage kommt.

Die Formänderungsarbeit $F(\varepsilon)$ für Mo ist gemäß S. 1073 bestimmt durch

$$F'(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\frac{Mo^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = \frac{1}{2\,E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\,(\overline{Mo}^2 + 2\,\varepsilon\,\overline{Mo}\,S\sin\alpha + \varepsilon^2 S^2\sin^2\alpha)$$

und demnach ist $F(\varepsilon)$ selbst für $\xi = \frac{1}{n}\,l$ und für $\varepsilon = 0 \ldots l$ gegeben durch

$$1)\quad \frac{1}{2\,E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}\,(\Sigma\,\overline{Mo}^2\,.\,\xi + 2\,S\sin\alpha\,\Sigma\,\varepsilon\,\overline{Mo}\,.\,\xi + S^2\sin^2\alpha\,\Sigma\,\varepsilon^2\,.\,\xi).$$

Entsprechendes gilt für BD, so daß 1) auch die gesamte Biegungsarbeit für AB darstellt, falls die Summation einmal von A bis C und einmal von B bis C erstreckt wird.

Außerdem entspricht der Achsialkraft $H = S\cos\alpha$ gemäß S. 867 eine Formänderungsarbeit $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}\cdot V$ und zwar ist hier $\sigma = \frac{S\cos\alpha}{f}$ und $V = f\,.\,2\,l$,

falls f den Querschnitt von AB bezeichnet, so daß dieser Teil der Formänderungsarbeit den Wert

$$2)\quad \frac{S^2 \cos^2\alpha\, l}{fE}$$

hat für E als Elasticitätsmodul des Materials von AB. Will man auch die Formänderungsarbeit der Stäbe DA und DB und des Stabes CD berücksichtigen, so hat man gemäß der Formel $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V$ für erstere $\sigma = \frac{S}{f_1}$ und $V = \frac{l}{\cos\alpha}\cdot f_1$ und $E = E_1$ und für letzteren $\sigma = \frac{S}{f_2} = \frac{2S\sin\alpha}{f_2}$ und $V = l\,tng\,\alpha\,.\,f_2$ und $E = E_2$ einzuführen, falls f_1 und E_1 bezw. f_2 und E_2 die entsprechenden Querschnitte und Elasticitätsmoduln bezeichnen. Man hat demnach als Formänderungsarbeit für die Stäbe

$$3)\quad 2\,.\,\tfrac{1}{2}\frac{S^2 l}{f_1 E_1 \cos\alpha} + \tfrac{1}{2}\frac{4\,S^2 \sin^2\alpha\, l\, tng\,\alpha}{f_2 E_2}.$$

Um S zu bestimmen, hat man den Wert der gesamten, durch 1), 2) und 3) dargestellten Arbeit nach S abzuleiten und diese Ableitung zu annullieren, so daß sich ergiebt

$$\frac{1}{2E\mathfrak{T}r}\,(2\sin\alpha\,\Sigma\,z\overline{Mo}\,.\,\zeta + 2\,S\sin^2\alpha\,\Sigma z^2\,.\,\zeta)$$
$$+\frac{2\,Sl\cos^2\alpha}{fE} + \frac{2\,Sl}{f_1 E_1\cos\alpha} + \frac{4\,Sl\sin^2\alpha\,tng\,\alpha}{f_2 E_2} = 0.$$

Daraus folgt, da $\Sigma z^2\,.\,\zeta = \frac{2}{3}l^3$ ist, für

$$\eta = 1 + \frac{3\,\mathfrak{T}r}{fl^2\,tng^2\alpha}\left(1 + \frac{fE}{f_1 E_1\cos^3\alpha} + \frac{2fE\,tng^3\alpha}{f_2 E_2}\right)$$

$$S = \frac{-3\,\Sigma\,z\,Mo\,.\,\zeta}{2\,\eta\,l^3\sin\alpha}.$$

Um den Zähler von S auszuführen, beachten wir, daß $\overline{Mo}\,.\,\zeta$ ein Streifen der Momentenfläche, senkrecht zu AC oder zu BC, ist, so daß $z\overline{Mo}\zeta$ das Massenmoment eines solchen Streifens bezw. für die Vertikale durch A oder durch B bedeutet. Teilt die Vertikale DC die Momentenfläche in die Flächen F_A und F_B und haben deren Schwerpunkte bezw. von A und B die Abstände s_A und s_B, so ist demnach

$$\Sigma\,z\overline{Mo}\zeta = F_A s_A + F_B s_B$$

und man hat also als Wert von S gegeben

$$S = \frac{3\,(F_A s_B + F_B s_B)}{2\,\eta\,l^3\sin\alpha}.$$

Für gleichmäßige Belastung ($2\,Q = 2\,l\gamma$) ist z. B. die Momentenfläche eine symmetrisch gelegene Parabelfläche von der Pfeilhöhe $\frac{1}{8}\,.\,2\,Q\,.\,2\,l$, deren Hälften von der Vertikale durch A bezw. B den Abstand $\frac{5}{8}\,l$ haben (vergl. S. 431). Hier ist also $F_A = F_B = \frac{2}{3}(l\,.\,\frac{1}{8}\,2\,Q\,2\,l) = \frac{1}{3}\,Q\,l^2$ und $s_A = s_B = \frac{5}{8}\,l$, so daß demnach $3\,(F_A s_A + F_B s_B) = \frac{5}{4}\,Q\,l^3$ und

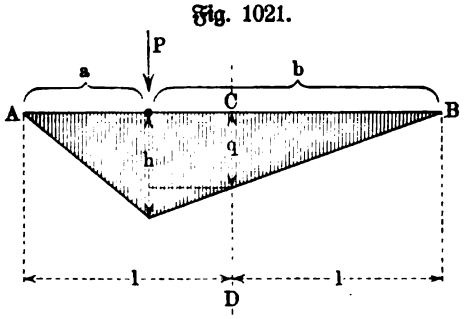
$$S = \tfrac{5}{8}\frac{Q}{\eta \sin\alpha} = \tfrac{5}{8}\frac{l\gamma}{\eta \sin\alpha},$$

ist, woraus folgt

$$H = \tfrac{5}{8}\frac{Q}{\eta\, tng\,\alpha} \quad \text{und} \quad S' = \tfrac{5}{4}\frac{Q}{\eta}.$$

Man sieht, daß diese genauen Werte für $\eta = 1$ in die angenäherten Werte übergehen, welche lediglich das biegende Moment für AB berücksichtigen.

Fig. 1021.



Für eine Einzellast $[P]$, welche von A den Abstand a und von B den Abstand b hat, gilt für die Momentenfläche der Fig. 1021, bei der $a < l$ und $b > l$ ist, folgendes.

Bezeichnet man

$$Mo_{max} = P\frac{ab}{2l} = \frac{Pa(2l - a)}{2l}$$

durch h, so giebt der Schnitt CD durch die Momentenfläche $q = h \cdot \frac{l}{b} = h\frac{l}{2l - a}$ und demnach ist

$$F_B s_B = \tfrac{1}{3} l^2 q.$$

Gemäß den drei Teilen, in welche F_A zerfällt, ist zunächst

$$F_A s_A = \tfrac{1}{3} a^2 h + \tfrac{1}{2}(l^2 - a^2)\,q + \tfrac{1}{6}(h - q)(l - a)(2a + l).$$

Nach Einführung von q ist demnach

$$F_A s_A + F_B s_B = \frac{hl}{3} \cdot \frac{3l^2 - a^2}{2l - a} = \tfrac{1}{6} Pa(3l^2 - a^2).$$

Man hat also

$$S = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{4\eta l^3 \sin\alpha}.$$

Für eine Gruppe von Einzellasten $P_1^{(A)}$, $P_2^{(A)}$, ..., welche auf AC bezw. in den Abständen a_1, a_2, ... von A angreifen, entsteht S natürlich durch Summation gemäß der zuletzt entwickelten Formel, und Entsprechendes gilt für eine Gruppe von Einzellasten $P_1^{(B)}$, $P_2^{(B)}$, ..., welche auf BC bezw. in den Abständen b_1, b_2, ... von B angreifen.

Für den Fall der Mittelbelastung ergiebt sich wieder mit $\eta = 1$, da dann $l = a$ ist, $S = \frac{P}{2\sin\alpha}$, wie bei der angenäherten Rechnung.

Die gefundenen Werte der Spannkräfte gelten natürlich auch wieder für das einfache Hängewerk.

Für das einfache Sprengwerk gilt die Formel für S weiter, falls man in ihr

$$\eta = 1 + 3\frac{E}{E_1}\frac{\mathfrak{T}r}{f_1 l^2 \cos\alpha \sin^2\alpha} \cdot \frac{l'}{l}$$

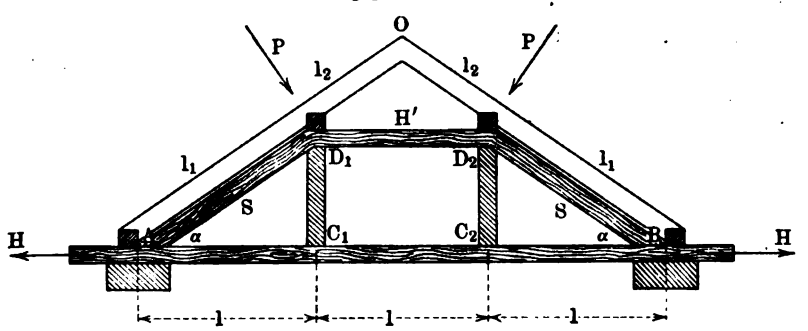
einführt, wobei sich E und Tr auf den Balken AB und E_1 und f_1 auf die Streben CA' und CB' beziehen (vergl. Fig. 1019).

Es hat keine Schwierigkeiten, diese Betrachtung auf den zweifach armierten Träger u. s. w. auszudehnen.

Sind die Felder der betrachteten Konstruktionen ungleich, so muß man für eine angenäherte Behandlung auf die allgemeine Theorie der durchgehenden Träger zurückgreifen.

8. Dachkonstruktionen. Das gewöhnliche dreikantige Dach besteht aus parallel gelagerten Bindern (vergl. S. 362 f.), deren entsprechende Knoten durch wagerechte Balken (Fetten oder Pfetten) verbunden werden; diese Fetten tragen die im allgemeinen parallel zur oberen Gurtung des Binders gelagerten Sparren, auf welchen dann die eigentliche Eindeckung ruht.

Fig. 1022.



Eine der einfachsten Konstruktionen dieser Art beruht in der Verwendung eines zweifachen Hängewerks als Binder, wie es Fig. 1022 darstellt; die (beiden) Fetten verlaufen oberhalb D_1 und D_2 senkrecht zur Ebene der Zeichnung und tragen je n Sparren von der Länge $l_1 + l_2$.

Tragen die Felder des Daches von der Breite l_1 und l_2, welche zu n Sparren gehören, bezw. Belastungen P_1 und P_2, so sieht man jeden Sparren als durchlaufenden Träger an, der auf l_1 durch $\frac{1}{n} P_1$ und auf l_2 durch $\frac{1}{n} P_2$ gleichmäßig belastet ist. In D_1 überträgt dann jeder der n Sparren auf das Hängewerk $\frac{1}{n} P$, wobei

$$P = \frac{P_1 l_1 (4 l_2 + l_1) + P_2 l_2 (4 l_1 + l_2)}{8 l_1 l_2}$$

ist; für $l_1 = l_2$ und $P_1 = P_2 = \overline{P}$ ist wieder $P = \frac{10}{8} \overline{P} = \frac{5}{8} (2 \overline{P})$.

Erfahrungsmäßig zerlegen sich hier die Kräfte vom Werte P in D_1 und D_2 so, daß $D_1 C_1$ und $D_2 C_2$ kraftfrei bleiben, während für $D_1 A$ und $D_2 B$ einerseits und $D_1 D_2$ anderseits entsprechende Komponenten anzusetzen sind (vergl. S. 1453).

Sind die Kräfte vom Werte P senkrecht zur Dachfläche gerichtet, so

haben diese Komponenten bezw. die Werte $P \cot\alpha$ und $\frac{P}{\sin\alpha}$, sind sie senkrecht zum Erdboden gerichtet, so haben sie bezw. die Werte $\frac{P}{\sin\alpha}$ und $P\cot\alpha$.

Im ersten Falle gilt für den Druck in D_1A und D_2B bei gleichmäßiger Belastung ($Q = l\gamma$) von AB

$$S = \frac{1{,}1\,Q}{\sin\alpha} + P\cot\alpha$$

und für den Druck in D_1D_2

$$H' = 1{,}1\,Q \cdot \cot\alpha + \frac{P}{\sin\alpha},$$

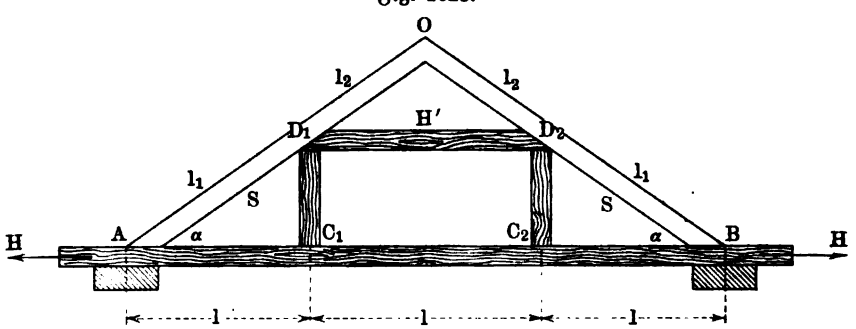
im zweiten Falle ist

$$S = \frac{1{,}1\,Q + P}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad H' = (1{,}1\,Q + P)\cot\alpha,$$

während in beiden Fällen in C_1D_1 und C_2D_2 der Zug $1{,}1\,Q$ herrscht. In AB tritt beide Male Zug auf vom Werte $H = H'$.

Für derartige Dachkonstruktionen werden auch dreifache Hängewerke (mit drei Säulen C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3) verwandt, deren Hauptbalken dann als Fünfstützenträger aufzufassen ist.

Fig. 1023.



Eine andere einfache Konstruktion eines Binders stellt das Kehlbalkendach der Fig. 1023 dar, in welchem D_1D_2 an den Sparren OA und OB rechts und links eingekehlt ist und von den Stützen D_1C_1 und D_2C_2 getragen wird. In Bezug auf die Verteilung der Belastung der Dachfelder auf die Punkte O, D_1, A bezw. O, D_2, B gilt dasselbe wie für das Fettendach der Fig. 1022.

Bei gleichmäßiger Belastung $2\overline{P}$ von OA ist für $l_1 = l_2$ die Belastung der Punkt O, D_1 A wieder bezw. durch $\frac{3}{8}\overline{P}$, $\frac{10}{8}\overline{P}$, $\frac{3}{8}\overline{P}$ gegeben.

Wirkt $2\overline{P}$ senkrecht zum Erdboden, so ist zunächst in D_1 eine Zerlegung nach D_1A und senkrecht dazu anzusetzen mit den Komponenten $\frac{10}{8}\overline{P}\sin\alpha$ und $\frac{10}{8}\overline{P}\cos\alpha$, während letztere Komponente dann weiter nach D_1D_2 und D_1C_1 in die Komponenten $\frac{10}{8}\overline{P}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{5}{8}\overline{P}\sin 2\alpha$ und $\frac{10}{8}\overline{P}\cos^2\alpha$ zerfällt.

Für den Druck in D_1D_2 gilt demnach $H' = \frac{5}{8}\overline{P}\sin 2\alpha$, während der Zug in D_1C_1 und D_2C_2 den Wert $\frac{10}{8}\overline{P}\cos^2\alpha$ hat.

In O zerlegt sich $[\frac{3}{8}\overline{P}]$ nach der Richtung OA und wagerecht, so daß bezw. die Komponenten $\frac{3}{8}\frac{\overline{P}}{\sin\alpha}$ und $\frac{3}{8}\overline{P}\cot\alpha$ anzusetzen sind. Demnach gilt für den Druck in D_1A

$$S = \tfrac{5}{4}\overline{P}\sin\alpha + \tfrac{3}{8}\frac{\overline{P}}{\sin\alpha}$$

und für den Zug in AB

$$H = S\cos\alpha = \tfrac{5}{8}P\sin 2\alpha + \tfrac{3}{8}\overline{P}\cot\alpha.$$

Fehlen die Stützen D_1C_1 und D_2C_2, so ist für D_1 dieselbe Zerlegung wie für O anzusetzen, nämlich in Richtung der Sparren und wagerecht; man hat infolgedessen hier $H' = \frac{5}{4}\overline{P}\cot\alpha$ und $S = \frac{13}{8}\frac{\overline{P}}{\sin\alpha}$ und $H = S\cos\alpha = \frac{13}{8}\overline{P}\cot\alpha$.

Sieht man die Sparren in D_1 als gestoßen an, so ist eine gleichmäßige Verteilung der Belastung einzuführen, d. h. man hat $\frac{5}{4}\overline{P}$ durch $\overline{P}$ und $\frac{3}{8}\overline{P}$ durch $\frac{1}{2}\overline{P}$, ebenso $\frac{13}{8}\overline{P}$ durch $\frac{3}{2}\overline{P}$ zu ersetzen.

In Bezug auf die Bestimmung der Spannkräfte in den einzelnen Stangen verwickelterer Binderkonstruktionen ist den früheren Entwickelungen (vergl. S. 362 f. und den Abschnitt über Fachwerke) nur wenig hinzuzufügen.

Statt der gleichmäßigen Belastung der Knoten der oberen Gurtung, bei welcher diese als ein System aneinander gereihter (durch Stoß verbundener) Stäbe aufgefaßt wird, pflegt man jetzt auch in der Praxis vielfach der Rechnung die Verteilung der gesamten Belastung zu Grunde zu legen, welche sich ergiebt, wenn man die obere Gurtung als durchgehenden Träger betrachtet.

Bei den Bindern der Fig. 205, 206, 207 stellt sich die obere Gurtung jeder Seite dann als ein Fünfstützenträger dar, für welchen die Verteilung der gesamten Belastung gemäß Berechnung oder Tabelle der Einteilung folgt

$$0{,}3929\,\gamma l \qquad 1{,}1428\,\gamma l \qquad 0{,}9286\,\gamma l \qquad 1{,}1428\,\gamma l \qquad 0{,}3929\,\gamma l,$$

falls jedes der vier Felder die Länge l hat bei einer Belastung γ für den laufenden Meter.

Ist Q die gesamte Belastung des Binders, so ist $\gamma l = \frac{1}{8}Q$, und demnach gilt für die Verteilung auf die Knoten

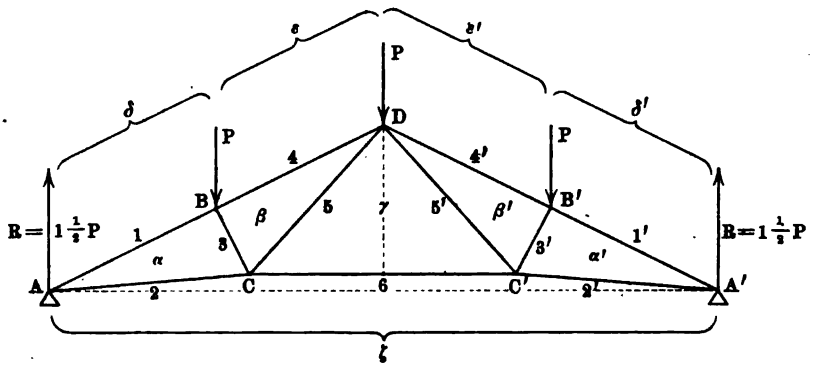
$$\tfrac{393}{8000}Q \sim \tfrac{1}{20}Q \qquad \tfrac{1143}{8000}Q \sim \tfrac{57}{400}Q \qquad \tfrac{929}{8000}Q \sim \tfrac{46}{400}Q \text{ u. s. w.,}$$

wobei natürlich für die Spitze (First) von beiden Seiten $\frac{1}{20}Q$ in Rechnung zu stellen sind.

Ferner ist zu bemerken, daß sich bei der graphostatischen Behandlung der Binder in der Praxis die Verwendung der sogenannten reciproken Kräftepläne, welche auch als Bowsche oder Cremonasche Kräftepläne bezeichnet werden, mehr und mehr einbürgert. Wie das Kräftedreieck gegenüber dem Kräfteparallelogramm eine wesentliche Vereinfachung darstellt, insofern es die doppelte Zeichnung auf eine einfache zurückführt, so löst der reciproke Kräfteplan die Aufgabe, in der Zeichnung mit einem Minimum von Strecken auszukommen, wodurch Übertragungen und entsprechende Zeichenfehler vermieden werden.

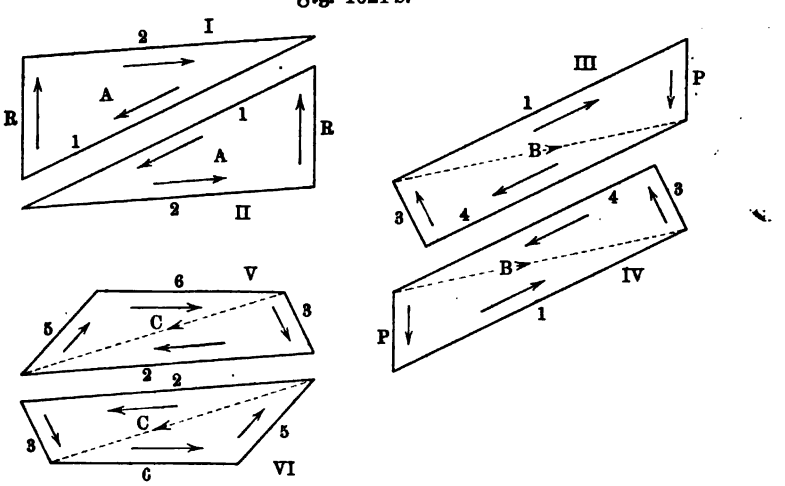
Als Beispiel für die Bildung eines solchen reciproken Planes (vergl. auch S. 375) wählen wir den einfachen Polonçeaubinder der Fig. 1024, welcher aus der Verbindung zweier einfacher armierter Träger ($ABDC$ und $A'B'DC'$) entsteht.

Fig. 1024 a.



Bei gleicher Belastung der Knoten durch Kräfte vom Werte P haben die Auflagerreaktionen die Werte $\frac{3}{2}P$. Die Zerlegung von $[R]$ für den Knoten A zeigen Fig. 1024 b I und II, welche das Gleichgewicht am Knoten A darstellen; da Stab 1 auf den Knoten A in der Richtung BA wirkt, so ist Stab 1 gedrückt, während Stab 2, der auf den Knoten A in der Richtung AC wirkt, gezogen ist.

Fig. 1024 b.



Am Knoten B wirkt Stab 1 in der Richtung AB, während $[P]$ dazu kommt, so daß die Diagonale von Fig. 1024 III oder IV die entsprechende Resultante zeigt, welche nun nach den Stäben 3 und 4 zerlegt werden muß. Aus der Gleichgewichtsfigur für den Knoten B folgt, daß Stab 3 und Stab 4 gedrückt sind.

Ebenso zeigt Fig. 1024 V oder VI für den Knoten C, daß Stab 5 und Stab 6 gezogen sind.

Durch Aneinanderlegung von Fig. I, III, V (oder II, IV, VI) entsteht ein gewöhnlicher Kräfteplan, wie ihn Fig. 1024 c zeigt, während durch Aneinanderlegung von Fig. II, III, VI (oder Fig. I, IV, V) ein Kräfteplan entsteht, wie ihn Fig. 1024 d zeigt, in welchem jede Stabkraft nur einmal vorkommt.

Fig. 1024 c.

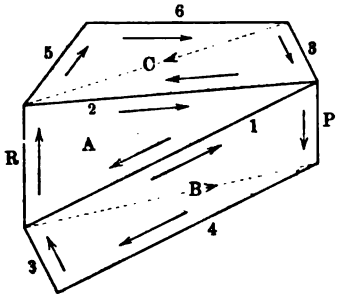
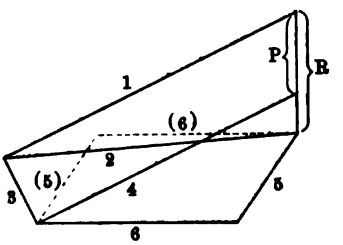


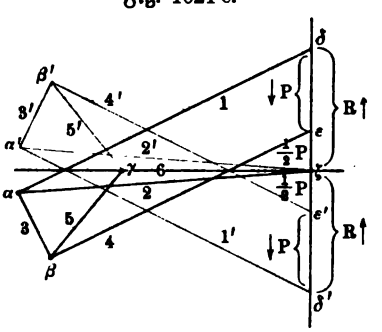
Fig. 1024 d.



Natürlich kann man in Fig. III und IV die Kräfte 3 und 4 und in Fig. V und VI die Kräfte 5 und 6 auch überschlagen zeichnen; man thut dies thatsächlich mit den Stabkräften 5 und 6 in Fig. 1024 d, einerseits, um den Anschluß der Knoten D u. s. w. vorzubereiten, was hier allerdings mit Rücksicht auf die Symmetrie des Binders nicht erforderlich ist, anderseits mit Rücksicht auf die folgenden Erklärungen.

Das Besondere des reciproken Kräfteplanes liegt darin, daß jeder Kraft des Binders (äußere Kräfte einschließlich der Reaktionen und Stabkräfte) je eine und nur eine Parallelstrecke im Kräfteplan entspricht und umgekehrt, und daß ferner jedem Knoten der einen Figur ein Polygon in der anderen Figur zugeordnet ist, wobei äußere Parallelkräfte am Binder offene Polygone (Schnitt im Unendlichen) bilden.

Fig. 1024 e.



Die damit ausgesprochene Verwandtschaft der beiden Figuren wird in graphostatischer Hinsicht als reciprok bezeichnet, während die reciproke Verwandtschaft im Sinne der Geometrie der Lage ein durchaus anderes Gepräge zeigt.

Daß jedem Knoten des Binders ein Polygon des Kräfteplans entspricht, ist aus der Entstehung des Kräfteplans ersichtlich; umgekehrt entspricht dem Knoten α des Kräfteplans, in welchem die Stabkräfte 1, 2, 3 zusammenstoßen, das Dreieck 1, 2, 3 des Binders, und dem Knoten β des Kräfteplans, in welchem die Stabkräfte 3, 4, 5 zusammenstoßen, das Dreieck 3, 4, 5 des Binders, während dem Knoten δ des Plans, in welchem $[R]$, $[P]$ und die Stabkraft 1 zusammenstoßen, das offene Polygon $[R]$, Stab 1 und $[P]$ im

Binder, und dem Knoten ε, in welchem $[P]$, $[\frac{1}{2}P]$ und die Stabkraft 4 zusammenstoßen, das offene Polygon $[P]$, Stab 4 und $[\frac{1}{2}P]$ im Binder entspricht. Der Punkt ζ, in welchem $[R]$, $[\frac{1}{2}P]$ und Stabkraft 2 und Stabkraft 6 zusammenstoßen, ist zunächst nicht als Knoten aufzufassen, da D im Binder durch $[P]$ und nicht durch $[\frac{1}{2}P]$ belastet ist; dieser Punkt ζ ist aber bei der Fortsetzung des Plans für die andere Trägerhälfte ein Knoten in Bezug auf $[R]$, $[R']$ und die Stabkräfte 2 und 2′ und 6, welchen im Binder das offene Polygon $[R]$, 2, 6, 2′, $[R']$ entspricht. Vergl. dazu die Bezeichnungen der Fig. 1024a und Fig. 1024e.

Konstruiert man im graphostatischen Sinne eine reciproke Figur zu einem Binder, so ist diese ein reciproker Kräfteplan des Binders, wie einfache Überlegungen zeigen [1]).

Um diese Konstruktion durchzuführen, geht man, wie bereits an dem Beispiele auf S. 375 gezeigt wurde, von dem geschlossenen Krafteck der äußeren Kräfte und ihrer Reaktionen aus und bildet von dessen Knoten aus die gesuchte reciproke Figur.

Für unser Beispiel hier hat man demnach von den Knoten δ, ε, ζ, ε', δ' der Fig. 1024e auszugehen. Da in δ bereits $[P]$ und $[R]$ zusammenstoßen, so zeigt Fig. 1024a, daß dem offenen Polygon δ in ihr entsprechend nun in Fig. 1024e die Stabkraft 1 hinzukommen muß, man zieht also durch δ in Fig. 1024e die Parallele zu 1 in Fig. 1024a; ebenso erfordert ε in Fig. 1024e die Parallele zu 4 in Fig. 1024a und ζ in Fig. 1024e die Parallelen zu 2, 6, 2′ in Fig. 1024a. Nachdem so α in Fig. 1024e bestimmt ist, zieht man die Parallele zu 3, gewinnt dadurch β, zieht die Parallele zu 5 und erhält so γ. Daß natürlich nicht jedem beliebigen Polygon der einen Figur ein Knoten der anderen entspricht, mag noch besonders hervorgehoben werden.

Sieht man die obere Gurtung des Trägers in Fig. 1024a als durchgehenden Träger an, so ändert sich an dem Verfahren nichts, nur hat man in Fig. 1024e zunächst $\delta\varepsilon = \frac{5}{4}P$, $\varepsilon\varepsilon' = \frac{3}{4}P$ und $\varepsilon'\delta' = \frac{5}{4}P$ zu machen, woraus $\zeta\delta = R = \frac{13}{8}P$ und $\delta'\zeta = R' = \frac{13}{8}P$ folgt.

In Bezug auf die Belastung der Dächer ist zu bemerken, daß man neben dem Eigengewicht der Konstruktionsteile (einschließlich Eindeckung), welches für 1 qm der Horizontalprojektion von Fall zu Fall tabellarisch gegeben ist, auch auf Schneedruck und Winddruck Rücksicht nehmen muß. Da man das eine Auflager fest und das andere als Gleit- oder Rollenlager (vergl. Fig. 794) konstruiert, um einerseits statisch-unbestimmte Konstruktionen (vergl. S. 1172) möglichst zu vermeiden, und um anderseits das Mauerwerk möglichst frei von Horizontalschub zu halten, so hat man den Schneedruck, der in mittleren Breiten mit 75 kg für 1 qm der Grundfläche angesetzt werden kann, einmal für beiderseitige Belastung durch Schnee, einmal für Belastung der festen Dachseite und einmal für Belastung der beweglichen Dachseite in Rechnung zu stellen und für jeden Konstruktionsteil die ungünstigste Belastung bei diesen drei Fällen für dessen Dimensionierung auszuwerten.

---

[1]) Vergl. dazu Föppls Mechanik, Bd. II, S. 25 f.

Solange die Obergurte der Binder nur eine geringe Neigung gegen den Horizont haben, kann man den Winddruck ebenso berücksichtigen wie den Schneedruck. Der Druck des Windes beträgt bei einer Geschwindigkeit c erfahrungsmäßig

$$p = 0{,}1185\, c^2$$

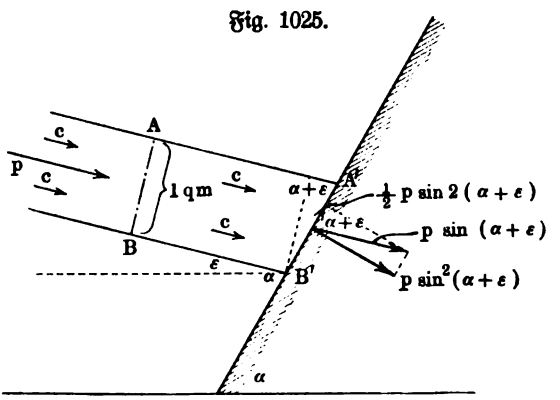
für 1 qm senkrecht zum Windstrom.

Hat der Wind, wie Fig. 1025 zeigt, die Neigung ε gegen die Horizontale, so gilt Folgendes.

Für eine Fläche $A'B'$, welche gegen den Windstrom die Neigung $\alpha + \varepsilon$ hat, verringert sich der Druck im Verhältnis $\sin(\alpha + \varepsilon) : 1$, weil

$A'B' = \dfrac{AB}{\sin(\alpha + \varepsilon)}$ ist, d. h. er beträgt hier nur $p \sin(\alpha + \varepsilon)$ für 1 qm. Die Zerlegung von $[p \sin(\alpha + \varepsilon)]$ senkrecht zu $A'B'$ und parallel dazu liefert als Winddruck $p \sin^2(\alpha + \varepsilon) = 0{,}1185\, c^2 \,.\, \sin^2(\alpha + \varepsilon)$ für 1 qm senkrecht zur Fläche. Für die größte Geschwindigkeit des Windes $c = 32 \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist $p \sim 120$, während ε erfahrungsmäßig im Mittel etwa 10^0 beträgt, und demgemäß setzt man mit Rücksicht auf diese oder jene Zufälligkeiten den Winddruck, senkrecht zur Dachfläche, mit 125 kg für 1 qm an, rechnet aber bei freistehenden Gebäuden mit doppelter Sicherheit, d. h. mit 250 kg für 1 qm.

Fig. 1025.



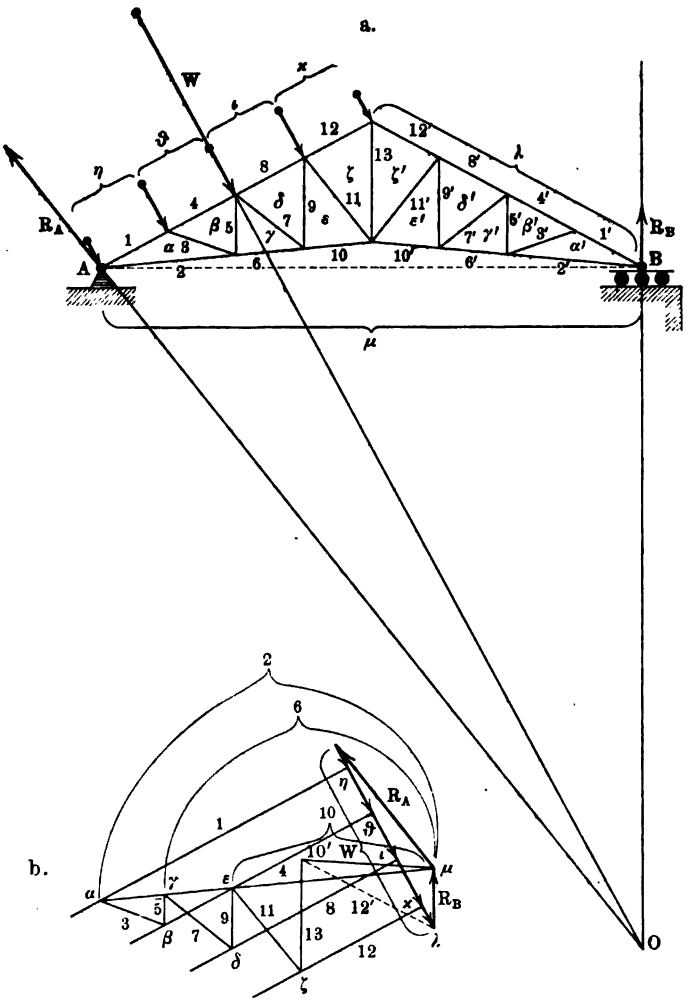
Bei geringer Steigung der Dächer (kleiner als 1 : 3) setzt man nun einfach senkrecht zur Grundfläche für Schneedruck, Winddruck und Eigengewicht der Konstruktion einen tabellenmäßig gegebenen Gesamtwert für 1 qm an, z. B. 125 bis 150 kg bei Glasdeckung, 200 bis 240 kg bei Schieferdeckung u. s. w.

Haben zwei Binder, deren Auflager die Entfernung a haben, den Abstand b, so liegt zwischen ihnen das belastete (γ) Rechteck ab, welches seine Last zur Hälfte auf jeden Binder abgiebt; demnach trägt jeder Binder im Innern die Belastung $ab\gamma$, während den beiden äußersten Bindern nur die Belastung $\frac{1}{2} ab\gamma$ zukommt; auf jede Binderhälfte fällt also $\frac{1}{2} ab\gamma$ bezw. $\frac{1}{4} ab\gamma$ zur Verteilung auf die Knoten des Obergurtes.

Bei starker Steigung der Dächer (1 : 3 bis 1 : 10) muß der Einfluß des Windes besonders berücksichtigt werden, und zwar hat man die Bestimmung der Spannkräfte in den einzelnen Stäben auf rechnerischem oder graphischem Wege im allgemeinen einmal für die Seite mit festem und einmal für die Seite mit beweglichem Auflager durchzuführen. Hat der Wind-

druck für die eine oder die andere Hälfte der Dachfläche zwischen zwei Bindern den Wert W, so muß $[W]$ dazu nach der Bestimmung der entsprechenden Reaktionen zunächst auf die Knoten der oberen Gurtung eines Binders verteilt werden, wobei diese wieder als System gestoßener Stäbe oder auch als durchgehender Träger aufgefaßt werden können.

Fig. 1026.

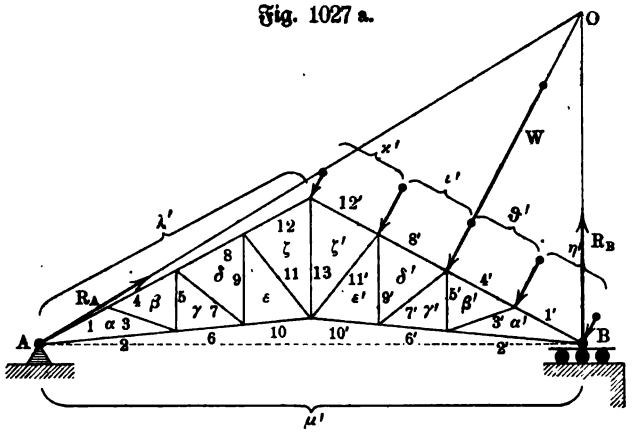


In Fig. 1026 und Fig. 1027 ist die Konstruktion für einen englischen Dachbinder (vergl. S. 375) durchgeführt. Für Fig. 1026 a ist zu bemerken, daß die Reaktion des beweglichen Auflagers senkrecht zur Gleitfläche steht, so daß durch diese Richtung und durch $[W]$ der Punkt O gegeben ist, durch den nach dem Satze von den drei Kräften auch die Reaktion des anderen Auflagers geht.

In Fig. 1026 b ist eine gleichmäßige Verteilung des Winddrucks auf die fünf Knoten des Binders angenommen und dann gemäß vorstehendem bezw. nach S. 375 der Kräfteplan gezeichnet.

Die Fortsetzung für Fig. 1026 b zeigt durch den Schluß des Kräftedreiecks aus $\overline{10'}$, $\overline{12'}$ und R_B an, daß die Ständer und Diagonalen der rechten Seite sämtlich spannungslos werden, so daß die Spannkräfte, welche

Fig. 1027 a.

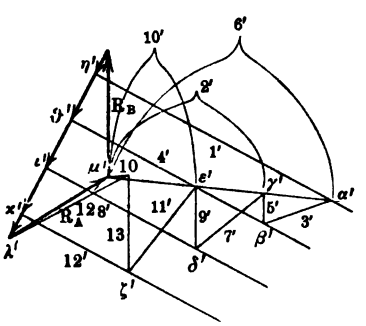


R_B durch Zerlegung nach 1′ und 2′ bezw. nach $\overline{12'}$ und $\overline{10'}$ liefert, für den ganzen oberen und den ganzen unteren Gurt gelten; Entsprechendes gilt für die linke Seite der Fig. 1027.

Hätte man an den Knoten 1 und 1′ noch einen Ständer eingezogen, so würden sich diese auch als spannungslos erweisen.

Zugstäbe sind bei einer Spannkraft P gemäß $\frac{P}{f} = k_1$ oder $f = \frac{P}{k_1}$ zu dimensionieren, kurze Druckstäbe ebenso gemäß der Gleichung $f = \frac{P}{k_2}$, während längere Druckstäbe gemäß der Gleichung $f = \frac{P}{k_2'}$ auf Knickung (vergl. S. 1118) berechnet werden müssen.

Fig. 1027 b.



Für die Fetten ist Eigengewicht, Schnee- und Winddruck und Sparrenlast nebst Eindeckung als Belastung anzusetzen, woraus sich ein bestimmter Wert γ_1 der Belastung für 1 qm der Grundfläche ergiebt. Haben die Binder die Entfernung a, während die wagerechte Entfernung zweier Fetten c beträgt, so trägt das Feld zwischen zwei Fetten die Belastung $ac\gamma_1$, von der die begrenzenden Fetten die Hälfte aufnehmen; demnach ist eine Fette beiderseitig mit $\frac{1}{2}ac\gamma_1$, also mit $ac\gamma_1$ gleichmäßig belastet.

Bei schief gelagerten Fetten ist die Betrachtung der Fig. 781 bezw. 782 anzuwenden für die Berechnung auf Biegung.

Für die Sparren ist Eigengewicht, Schnee- und Winddruck und Eindeckung als Belastung anzusetzen, woraus sich ein bestimmter Wert γ_2 der Belastung für 1 qm der Grundfläche ergiebt. Haben die Sparren die Entfernung d, während die Fetten wieder die wagerechte Entfernung c haben, so trägt das Feld zwischen zwei Sparren die Belastung $cd\gamma_2$.

Man kann die Sparren als durchgehende, auf die Fetten gestützte Träger ansehen, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß eine Fette sich bei starker Belastung durchbiegt und demnach der Sparren als durchgehender Träger mit Stützensenkung aufzufassen ist, wobei sich das Moment für die Sparren über der gebogenen Fette verringert. Infolgedessen sieht man meist die Sparren als auf der Fette gestoßen an und berechnet sie gemäß der Festigkeitsgleichung

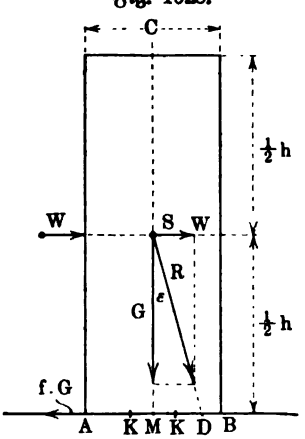
$$\tfrac{1}{8}(cd\gamma_2)\,.\,c = k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}.$$

Für die Auflagerfläche f der Binder auf Mauerwerk u. s. w., welches eine Druckspannung k_2 verträgt, gilt bei einer gesamten Belastung Q des Binders

$$f = \frac{\frac{1}{2}Q}{k_2}.$$

9. **Mauern, im besonderen Futtermauern.** Bildet eine Mauer ein Rechtkant von der Höhe h, der Breite b und der Länge l, so ist ihr Gewicht $(bhl)\,.\,\gamma$, falls γ das specifische Gewicht des Materiales ist. Demnach ist die Druckspannung für die Grundfläche bl gegeben als

Fig. 1028.



$$\frac{bhl\,.\,\gamma}{bl} = h\,.\,\gamma.$$

Diese muß kleiner sein als die zulässige Druckspannung für das Material der Mauer und als die zulässige Druckspannung für den Baugrund. Erstere beträgt bei Ziegeln je nach der Güte des Materials und der Ausführung 3 Atm. bis 14 Atm., während letztere für guten Baugrund im Mittel 2,5 Atm. beträgt, bei Felsboden aber bis 15 Atm. steigt. Bezeichnet k_2 den kleineren der beiden für einen bestimmten Fall in Frage kommenden Werte, so muß

$$h\gamma \leqq k_2 \quad \text{oder} \quad h \leqq \frac{k_2}{\gamma}$$

sein, so daß sich dabei für die Höhe der Mauer eine bestimmte Grenze ergiebt.

Hat die Mauer nicht die Form eines Rechtkants, so ist eine entsprechende Rechnung anzustellen, ebenso, falls die Mauer noch anderweitig belastet wird.

Wirken auf eine Mauer noch andere Kräfte als das Eigengewicht und eine gewöhnliche Belastung, so ist die Sicherheit der Mauer im allgemeinen

in Bezug auf Kippen und Gleiten, aber auch auf Biegung und Schub zu untersuchen.

Das einfachste Beispiel für eine derartige Beanspruchung bietet eine freistehende rechtkantige Mauer, auf welche der Wind senkrecht zur Wandfläche drückt, wie es Fig. 1028 andeutet. Für B als Drehpunkt giebt die Beziehung der Momente

$$G \cdot \frac{b}{2} > W \cdot \frac{h}{2}$$

Sicherheit gegen Kippen um eine Achse durch B senkrecht zur Ebene der Zeichnung. Geht die Resultante $[R]$ von $[G]$ und $[W]$ durch B, so gilt

$$G : W = h : b \quad \text{oder} \quad Gb = Wh$$

und demnach erfordert die Stabilität, daß $[R]$ die Strecke MB (in D) schneidet; aus $MD < \frac{b}{2}$ folgt für $tng\,\varepsilon = \frac{W}{G}$ und $tng\,\varepsilon = \frac{MD}{\frac{1}{2}h}$ wieder $G \,.\, b > W \,.\, h$.

Für $G \,.\, b = W \,.\, h$ würde das Kippen noch gerade vermieden werden, doch würde dann die Druckspannung in der Kante durch B, welche $[R]$ entspricht, unendlich groß werden, weil dann die (lineare) Kante statt einer endlichen Fläche der Aufnahme von $[R]$ zu dienen hätte.

Die Sicherheit gegen Gleiten an der Grundfläche wird durch die Beziehung

$$W < fG$$

dargestellt, falls f der Reibungskoeffizient für die Grundfläche ist, der im Mittel 0,57 beträgt.

Da $\frac{W}{G} = tng\,\varepsilon$ ist, so gilt auch

$$tng\,\varepsilon < f$$

oder nach Einführung des Reibungswinkels φ

$$\varepsilon < \varphi,$$

d. h. $[R]$ muß innerhalb des für die Grundfläche konstruierten Reibungskegels des Punktes D liegen.

Da Mauerwerk gegen Zug nur in sehr geringem Maße[1]) widerstandsfähig ist, so läßt man den Punkt D auf die Kerngrenze K (vergl. S. 1137) fallen, d. h. man macht $MD = MK = \frac{1}{6}b$.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$tng\,\varepsilon = \frac{W}{G} = \frac{\frac{1}{6}b}{\frac{1}{2}h} \quad \text{oder} \quad G = W \cdot \frac{3h}{b}.$$

Da G und W proportional sind zur Mauerlänge l, so rechnet man mit einer Mauer von 1 m Länge.

---

[1]) Der Gewölbeausschuß des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins zu Wien kommt in seinem Bericht (1895) allerdings zu dem Ergebnis, daß Ziegelgewölbe bis zu 5 Atm. und Bruchsteingewölbe bis 8,5 Atm. aushalten, rät aber doch davon ab, bei Mauerwerk mit Fugen solche Spannungen zuzulassen.

Hat W für 1 qm den Wert p, so ist $W = p.h.1$ und $G = (b.h.1)\gamma$, d. h. man hat

$$bh\gamma = \frac{3ph^2}{b} \quad \text{oder} \quad b^2 = 3\frac{p}{\gamma}h.$$

Nimmt man 1 m als Einheit, so ist γ das Gewicht eines Kubikmeters, d. h. im Mittel 1600 kg, und man hat für $p = 125$ kg

$$b^2 = \tfrac{15}{64}h,$$

woraus b bei gegebenem h oder umgekehrt folgt.

Faßt man nun die Mauer als einen durch W gleichmäßig belasteten Freiträger auf, so gilt für die Biegungsspannung σ_2 an der Grundfläche der Mauer

$$W \cdot \frac{h}{2} = \sigma_2 \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1 \cdot b^2}{6},$$

d. h. es ist

$$\sigma_2 = \frac{3Wh}{b^2},$$

während für die Druckspannung σ_1 gilt

$$\sigma_1 = \frac{G}{b \cdot 1} = h\gamma.$$

Nach den Betrachtungen über die Kerngrenze (vergl. S. 1137) muß $\sigma_1 = \sigma_2$ sein, und in der That ist $\sigma_2 = \frac{3Wh}{b^2} = h\gamma$, weil $W = ph$ und $b^2 = \frac{3p}{\gamma}h$ ist.

Auf der Zugseite (links) ist also

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 0,$$

während auf der Druckseite (rechts)

$$\sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma_2 = 2\sigma_1 = 2h\gamma$$

ist.

Ist k_2 die zulässige Druckspannung des Mauerwerks, so muß also

$$2h\gamma < k_2$$

sein.

In Bezug auf den Schub muß

$$\frac{W}{b \cdot 1} \leqq t$$

sein, falls t die zulässige Spannung des Mauerwerks für Schub bezeichnet.

Hat eine Mauer mehrere Absätze von verschiedener Stärke, so gilt diese Betrachtung zunächst für den obersten Absatz, während sie von diesem aus für die folgenden Absätze unter Berücksichtigung von deren Belastung wiederholt werden muß.

Hat eine Mauer Verstärkungspfeiler, so berechnet man diese gemäß dem Momente $\frac{1}{2}(Wh - Gb)$, welches den Überschuß des Momentes des Winddruckes über das Stabilitätsmoment der Mauer darstellt.

Eine entsprechende Betrachtung ist auch für Stütz- und Futtermauern in Bezug auf den Erddruck durchzuführen. Wirkt dieser (vergl. Fig. 1029) unter einem Winkel λ gegen die Horizontale, so ist $H = W \cos \lambda$ dessen horizontale und $V = W \sin \lambda$ dessen vertikale Komponente.

Die Reibung ist hier $f(G + V)$, so daß die Sicherheit gegen Gleiten hier der Beziehung

$$H < f(G + V)$$

entspricht, woraus für $G = bh \,.\, 1 \,.\, \gamma'$

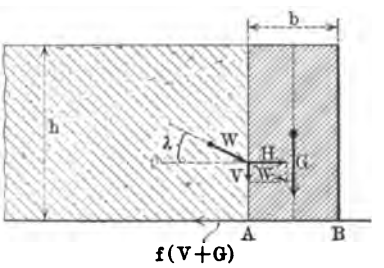
$$bh > \frac{H - fV}{f\gamma'}$$

folgt. Da man in der Praxis gern mit dem Verhältnis $b : h$ arbeitet, pflegt man dieser Beziehung die Form

$$\frac{b}{h} > \frac{H - fV}{f\gamma' h^2}$$

zu geben.

Fig. 1029.



Um zu erreichen, daß die Resultierende aus $[W]$ und $[G]$ durch die Kerngrenze K geht, setzt man das Moment für K als Drehpunkt an und giebt ihm den Wert Null (vergl. Fig. 1028). Es ist dann

$$-G \cdot \frac{b}{6} + H \cdot \frac{h}{3} - V \cdot \frac{2b}{3} = 0,$$

woraus für $G = bh \,.\, 1 \,.\, \gamma'$ folgt

$$b^2 + b \cdot \frac{4V}{h\gamma'} - \frac{2H}{\gamma'} = 0.$$

Man hat dann

$$b = -\frac{2V}{h\gamma'} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{4V^2}{h^2\gamma'^2} + \frac{2H}{\gamma'}}$$

und kann damit wieder $b : h$ bilden.

Für die Druckseite ist wieder mit Rücksicht auf die Biegung ($\sigma_1 = \sigma_2$)

$$2\frac{V + G}{b} \leqq k_2$$

zu setzen, falls k_2 die zulässige Beanspruchung des Materials bezeichnet.

In Bezug auf den Schub ist nichts hinzuzufügen.

Sind die aufgestellten Beziehungen für angenommene Werte von h und b nicht erfüllt, so muß h verkleinert bezw. b vergrößert werden.

Es hat keine Schwierigkeiten, diese Betrachtungen auf rechtkantige Mauern mit Fundamentvorsprung oder auf Mauern von trapezförmigem Querschnitt auszudehnen.

Selbstverständlich ist es erlaubt, den Durchstoßpunkt der Resultante aus $[W]$ und $[G]$ in die Kernfläche zu legen, wodurch sich die Biegungsbeanspruchung entsprechend verringert.

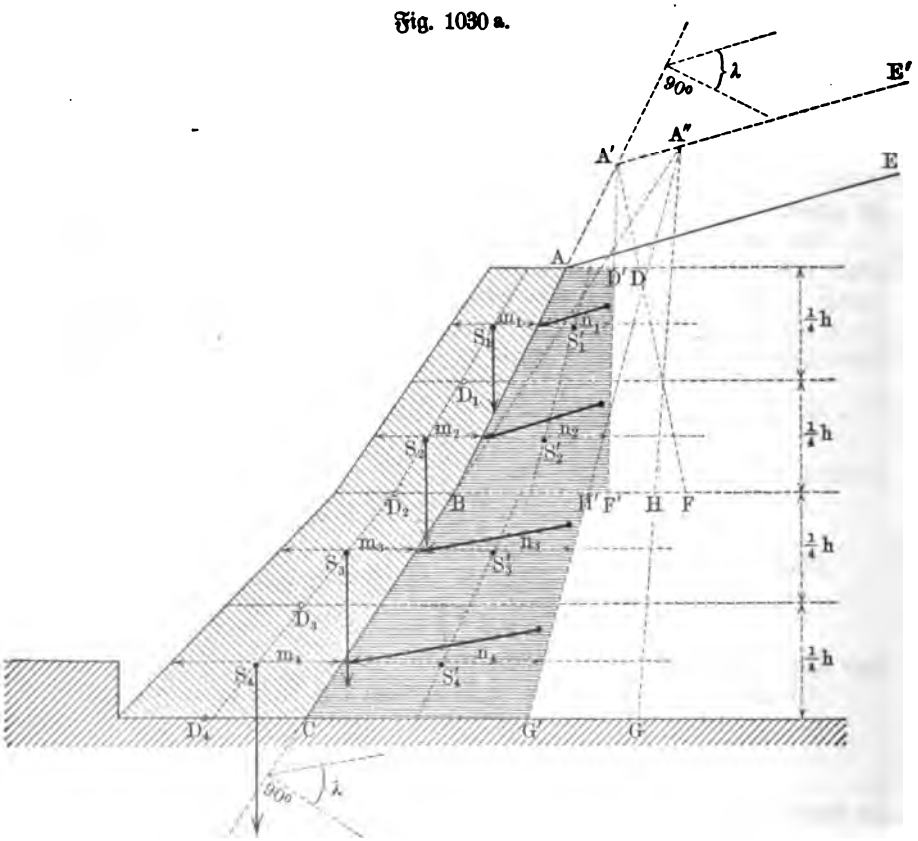
Liegt der Durchſtoßpunkt außerhalb der Kernfläche, ſo treten die Betrachtungen auf S. 1153 in Kraft, wonach bei Fig. 1028 für $BD = c$ und $c < \frac{b}{3}$ die Neutrale in die Grundfläche eintritt und

$$2\,\frac{G+V}{3\,c} \leqq k_2$$

zu halten iſt.

Bei verwickelteren Verhältniſſen, in denen obige Betrachtungen für verſchiedene Horizontalſchichten der Mauer durchgeführt werden müſſen, hat die

Fig. 1030 a.

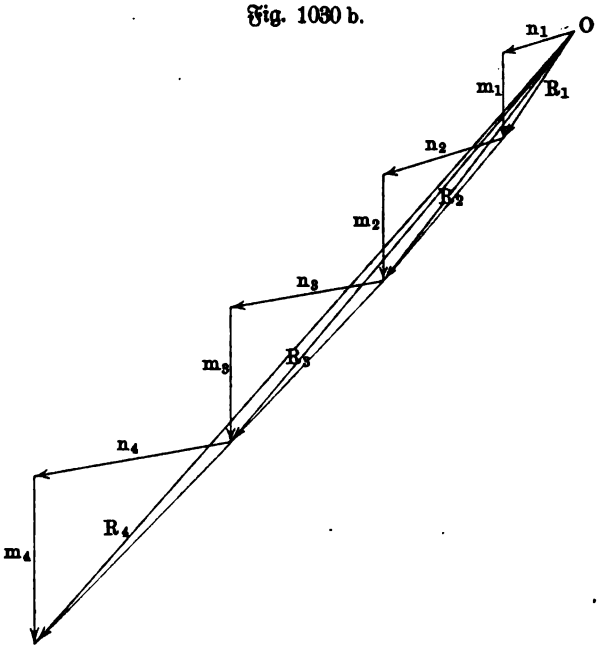


graphoſtatiſche Behandlung große Vorzüge vor dem rechneriſchen Verfahren. Als Beiſpiel betrachten wir in Fig. 1030 eine ſogenannte unterſchnittene Futtermauer bei Erddruck. Trägt die Erdoberfläche AE noch eine gleichmäßige Belaſtung, ſo wird dieſe zunächſt durch eine Erdſchicht $AA'E'E$ dargeſtellt; man beſtimmt dann nach dem Verfahren von Rebhanns den Erddruck für BA' und für CA'' und verwandelt die beiden damit erhaltenen Dreiecke in die Dreiecke $BA'F$ und $CA''G$, ſo daß Fläche $CBADFHG$ den Erddruck für CBA darſtellt.

Ist die Mauer aus Ziegelwerk ($\gamma = 1600\,\text{kg}$ für $1\,\text{cbm}$), so stellen für ein entsprechendes specifisches Gewicht der Erde $\gamma' = 1600$ gleiche Teile des Mauerquerschnittes und der Erddruckfläche $CBADFHG$ gleiche Belastungen dar. Ist die Mauer aus Granit ($\gamma = 2400$), während für die Erde $\gamma' = 1600$ ist, so ist die Erddruckfläche im Verhältnis $16 : 24 = 2 : 3$ zu verkürzen, falls gleiche Teile des Mauerquerschnittes und der Erddruckfläche gleiche Belastungen darstellen sollen; selbstverständlich könnte auch der Mauerquerschnitt im Verhältnis $3 : 2$ vergrößert werden.

In Fig. 1030 ist die Konstruktion für die Reduktion der Erddruckfläche im Verhältnis $2:3$ weitergeführt; für $BF' = \frac{2}{3} BF$ und $CG' = \frac{2}{3} CG$ stellt die Fläche $CBAD'F'H'G'$ die Erddruckfläche so dar, daß gleiche Teile dieser Fläche und des Mauerquerschnittes gleichen Belastungen entsprechen, und zwar so, daß dabei das specifische Gewicht des Mauerwerks als grundlegend anzusehen ist.

Fig. 1030 b.



Teilt man nun die beiden Flächen durch wagerechte Schnitte in beliebig viele Lamellen, so stellen benachbarte Trapeze, welche sich wie ihre Mittellängen verhalten, durch diese die entsprechenden Belastungen dar; dabei greift das Gewicht im Schwerpunkt des betreffenden Trapezes an, während der Erddruck seinen Angriffspunkt auf der Mauerbegrenzung in der Höhe der Schwerpunkte der entsprechenden Trapeze hat und in seiner Richtung durch die Abweichung λ gegen die Normale von AB bezw. BC bestimmt wird.

Für die vier gleich hohen $\left(\frac{h}{4}\right)$ Lamellen der Fig. 1030 a stellen die Mittellinien m_1 und n_1, m_2 und n_2 u. s. w. bezw. Mauergewicht und entsprechenden Erddruck dar, wonach sich Fig. 1030 b ergiebt, bei der zu beachten ist, daß $[R_2]$ aus $[R_1]$, $[m_2]$ und $[n_2]$ erwächst u. s. w.

Die Eintragung der Ergebnisse von Fig. 1030 b in Fig. 1030 a ergiebt dort die Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 für die Stützlinie der Mauer.

Bei Fig. 1030 a stellt das oberste Trapez die Belastung $\left(\frac{h}{4} \cdot m_1 \cdot 1\right)\gamma$

dar, während der entsprechende Erddruck den Wert $\left(\frac{h}{4} \cdot n_1 \cdot 1\right)\gamma$ hat u. s. w., d. h. die Maßzahlen der Strecken m_1 und n_1 in Fig. 1030 b für Meterrechnung sind mit $\frac{h}{4}$ in Metern und mit $\gamma = 2400$ zu multiplizieren, um die dargestellten Kräfte in Kilogramm zu liefern.

Fig. 1030 kann auch die Beanspruchung einer Mauer durch Wasserdruck erläutern, falls $\lambda = 0$ ist, wobei freilich im allgemeinen als Mauerform ein Trapez mit Ausladung anzunehmen ist.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch für Pfeiler, z. B. für die Pfeiler eines Sprengwerkes (vergl. S. 1453), aber auch für die Pfeiler oder Widerlager eines Gewölbes.

Fig. 1031 a.

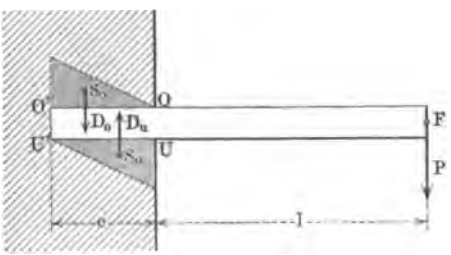
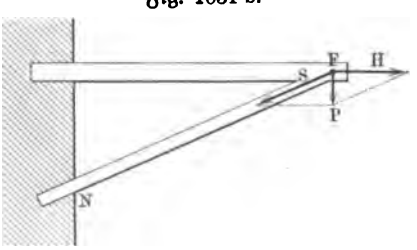


Fig. 1031 b.



Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß Mauerwerk an der Einspannungsstelle eines Freiträgers, der z. B. die Unterlage eines Balkons oder eines Erkers mitbilden hilft, etwa gemäß Fig. 1031 a zu beurteilen ist. Die Stellen U und O' des Mauerwerks erhalten jedenfalls den stärksten Druck, welcher von U nach U' und von O' nach O hin abnimmt, so daß die Dreiecksflächen der Fig. 1031 a wenigstens eine mögliche Druckverteilung darstellen. Sind S_u und S_o die Schwerpunkte dieser Dreiecke, so gilt für die Drucke $[D_o]$ und $[D_u]$, welche das Mauerwerk auf den Ausleger überträgt, bei dieser Annahme

$$1)\quad D_o + P = D_u$$
$$2)\quad D_o\left(l + \tfrac{2}{3}e\right) = D_u\left(l + \tfrac{1}{3}e\right),$$

letzteres nach dem Momentensatz für F als Drehpunkt. Daraus folgt

$$D_o = P \cdot \frac{3l + e}{e} \quad \text{und} \quad D_u = P \cdot \frac{3l + 2e}{e}.$$

Demnach muß die Belastung von $O'O$ durch das darüber stehende Mauerwerk u. s. w. mindestens den Wert D_o haben.

Für einen Träger von der oberen Breite b_o und der unteren Breite b_u sind die obere und die untere Druckfläche bezw. eb_o und eb_u, die entsprechenden mittleren Spannungen also

$$\frac{D_o}{eb_o} \quad \text{und} \quad \frac{D_u}{eb_u}.$$

Da die Spannung von O bis O' stetig wächst, so gilt für die größten Spannungen, welche bei Ausnutzung des Materials den Wert der zulässigen Druckspannung für das Mauerwerk k_2 gerade erreichen dürfen, das Doppelte; man hat also

$$b_o = \frac{2\,D_o}{e k_2} \quad \text{und} \quad b_u = \frac{2\,D_u}{e k_2}$$

als Breiten für die Auflagerung oben und unten, welche gegebenen Falles durch Unterlagsplatten hergestellt werden müssen.

Wird der Ausleger durch eine Steife FN unterstützt (Fig. 1031 b), so ist der Ausleger auf Zug (H) und Biegung zu berechnen, die Steife auf Druck bezw. Knickung (S), während dann N die am meisten gefährdete Stelle der Mauer ist.

10. Gewölbe. Den früheren Betrachtungen über die gewöhnlichen Gewölbe (Tonnengewölbe) auf S. 501 und S. 580 sowie in § 209 ist nur wenig hinzuzufügen. Man geht stets davon aus, daß Stützweite (Spannweite) und Pfeilhöhe gegeben sind, entweder für die innere Bogenlinie oder für die Mittellinie des Gewölbes, und bestimmt dementsprechend mit Rücksicht auf die Belastung nach erprobten empirischen Formeln (von Rondelet für Hochbau, von Müller-Breslau, A. v. Kaven, Tolkmitt u. a. für Brückenbau) zunächst vorläufige Werte für die Stärke im Scheitel und an den Kämpfern. Auf Grund dieser Bestimmungen zeichnet man nun, mit Rücksicht auf Theorie und auf Erfahrungen, eine vorläufige Form des Gewölbequerschnittes und fügt die zugehörige Belastungslinie hinzu, wobei man bei beweglichen Belastungen zunächst deren Hälfte als dauernde Belastung ansetzt. Diese vorläufige Zeichnung des belasteten Gewölbes dient der weiteren Untersuchung; man trägt radiale oder vertikale Fugen ein, konstruiert die entsprechenden Stützlinien (vergl. S. 587) und verfährt weiter gemäß § 209.

Bei beweglicher Belastung des Gewölbes untersucht man dieses einmal für volle Belastung und jedenfalls noch einmal für halbseitige Belastung; da nämlich der Satz von Winkler (vergl. S. 1224) auch für unsymmetrische Belastungen gilt, so hat man die entsprechende Untersuchung wenigstens für eine Art von Belastung durchzuführen, bei welcher die Stützlinie (Drucklinie) möglichst unsymmetrisch wird, und in dieser Hinsicht reicht es meist aus, dazu die halbseitige Belastung zu wählen.

Die vorläufige Form des Gewölbequerschnittes pflegt man mit Rücksicht auf den Satz von Winkler meist so zu bilden, daß die Mittellinie eine mögliche Stützlinie (Drucklinie) ist; man nennt ein derartiges Gewölbe ein Druckliniengewölbe.

Gleichmäßige Belastung der Horizontalen weist natürlich auf Parabeln als Stützlinien hin, gleichmäßige Belastung der Mittellinie dagegen auf gemeine Kettenlinien (vergl. S. 354 u. f.), während für die Annahme eines Kreisbogens als Stützlinie die Belastungslinie Fig. 327 entsprechen muß.

Ist die Belastungslinie eine Gerade, was häufig in großer Annäherung thatsächlich der Fall ist, so ist die zugehörige Stützlinie eine Ge-

wölbelinie (vergl. S. 306 und S. 355), wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht. Für die Belastungslinie AB in Fig. 1032 hat die Stützlinie CD eine Gleichung $y = f(x)$, für welche gemäß S. 504 der Ansatz

$$f''(x) = \frac{y}{H}$$

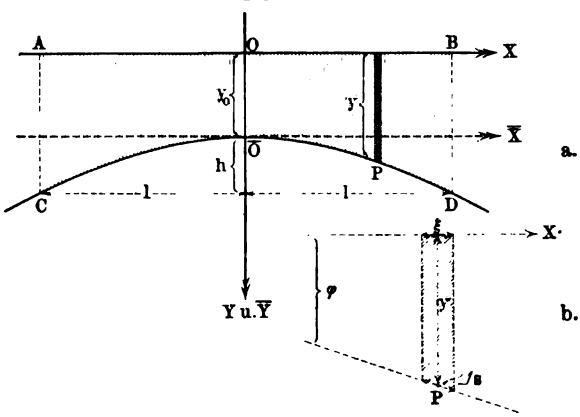
gilt, falls H die wagerechte Spannkraft bezeichnet.

Diese Gleichung entspricht wieder (vergl. S. 1112) der Gleichung für Schwingungen, falls man $\frac{1}{H} = -m^2$ setzt, und demnach ist

$$y = C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx).$$

Um die Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen, beachten wir, daß die Tangente in $\overline{O}$ horizontal ist, d. h. man hat $f'(x) = 0$ für $x = 0$.

Fig. 1032.



Aus

a. $$f'(x) = -m C_1 \sin(mx) + m C_2 \cos(mx)$$

folgt demnach für $x = 0$ der Ansatz $0 = m C_2$, d. h. $C_2 = 0$.

Demnach gilt

b. $$y = C_1 \cos(mx)$$

und es ist, da $y = y_0$ ist, für $x = 0$ ferner $C_1 = y_0$, so daß sich

$$y = y_0 \cos(mx) = y_0 \cdot \frac{e^{+mxi} + e^{-mxi}}{2}$$

ergiebt.

Da $-m^2 = +\frac{1}{H}$ ist, so ist $mi = \frac{1}{\sqrt{H}}$ und man hat schließlich

$$y = f(x) = y_0 \cdot \frac{e^{+\frac{x}{\sqrt{H}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}}{2} = y_0 \cdot \mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{\sqrt{H}}\right).$$

Die gewonnene Gleichung stimmt überein mit der Gleichung der Gewölbelinie auf S. 355 für $c = \sqrt{H}$ und $b = y_0$.

Für das Kreuz durch $\overline{O}$ hat die Kurve die Gleichung

$$y = y - y_0 = y_0 \left[\mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{\sqrt{H}}\right) - 1\right].$$

Für $y_0 = \sqrt{H}$ geht die Gleichung der Gewölbelinie in eine gemeine Kettenlinie über.

Die Belastung für ein Element Δs der Gewölbelinie bei P ist gemäß

Fig. 1032 b gegeben durch $\xi \,.\, y$, während sie anderseits als $\Delta s \,.\, \psi(x)$ dargestellt werden kann.

Demnach ist

$$\psi(x) = y \cdot \frac{\xi}{\Delta s} = y \,.\, \cos\varphi,$$

falls φ den Winkel der Tangente in P gegen die X-Achse bezeichnet.

Da $tng\,\varphi = f'(x)$ ist, so bilden wir

$$1 + tng^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{y^2}{\psi^2(x)}$$

und

$$tng\,\varphi = f'(x) = \frac{y_0}{\sqrt{H}} \cdot \frac{e^{+\frac{x}{\sqrt{H}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}}{2}.$$

Da sich nun bei Bildung von $tng^2\varphi$ mit Rücksicht auf die Gleichung für y ergiebt

$$tng^2\varphi = \frac{y^2 - y_0^2}{H},$$

so ist die Belastung $\psi(x)$ von Δs gegeben durch

$$\psi^2(x) = \frac{H}{1 + \frac{H - y_0^2}{y^2}}.$$

Da für die gemeine Kettenlinie $y_0 = \sqrt{H}$ ist, so ist für diese $\psi(x) = \sqrt{H} = y_0$, d. h. bei der gemeinen Kettenlinie wird jedes Element der Kurve in gleicher Weise belastet wie das Element im Scheitel (y_0). Vergl. S. 355.

Da für die Gewölbelinie $y^2 - y_0^2 = H \,.\, tng^2\varphi$ oder $y = y_0\sqrt{1 + \frac{H}{y_0^2} tng^2\varphi}$ ist, so pflegt man $\frac{H}{y_0^2}$ die Charakteristik der Gewölbelinie zu nennen; die gemeine Kettenlinie entspricht demnach der Charakteristik 1.

Da allgemein gemäß S. 505 der Ansatz $H = y_0\varrho_0$ gilt, falls ϱ_0 den Krümmungsradius der Stützlinie im Scheitel bezeichnet, so gilt für die gemeine Kettenlinie $\varrho_0 = y_0 = \sqrt{H}$.

Die Gewölbelinie wird bei ihrer Verwendung als Stützlinie eines Gewölbes auch als Hagensche Drucklinie bezeichnet, weil G. Hagen sie zu diesem Zweck empfohlen hat.

Ist für CD in Fig. 1032 a die Spannweite $2l$ und die Pfeilhöhe h gegeben, so haben C und D für das Kreuz durch O die Koordinaten $y_0 + h$ und $\pm l$ und demnach gilt zur Bestimmung von H

$$y_0 + h = y_0 \,.\, \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pm l}{\sqrt{H}}\right).$$

Für die Untersuchung von Widerlagerpfeilern gilt Entsprechendes wie für die Gewölbe.

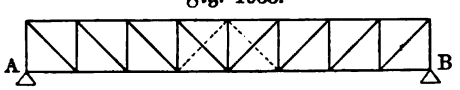
Pfeiler, welche auf beiden Seiten je einen Gewölbebogen stützen, werden meist untersucht, indem man das Gewölbe der einen Seite als unbelastet und das Gewölbe der anderen Seite als halbseitig belastet annimmt, weil dabei im allgemeinen die ungünstigste Beanspruchung der Pfeiler auftritt.

11. Die Hauptformen der Brückenträger. Aus den allgemeinen Untersuchungen auf S. 1181 u. f. läßt sich leicht feststellen, welche besonderen Eigenschaften ein bestimmter vollwandiger Träger bezw. ein entsprechendes Fachwerk bei bestimmter Belastung hat.

Als Normalfall der Belastung kann man ansehen, daß ein Träger durch eine gleichmäßige ständige Belastung (γ') und eine gleichmäßige bewegliche Belastung (γ) beansprucht wird.

Einen dünnwandigen Träger mit parallelen Gurten kann man entweder als gewöhnlichen Balken behandeln, falls man den Ausfall der Nietlöcher berücksichtigt, oder als einen Balken, der lediglich aus den beiden Gurten besteht, in Verbindung mit einer Wand; in letzterem Falle haben die Gurten nur die Beanspruchung durch die Biegung auszuhalten, während die Wand nur den Schub aufzunehmen hat (vergl. S. 1188).

Fig. 1033.



Bei ständiger gleichmäßiger Belastung (γ') ist die Beanspruchung gemäß Fig. 681 zu beurteilen und demnach nehmen die Gurtkräfte von der Mitte nach den Enden zu ab bis auf Null, während die Vertikalkraft in der Mitte den Wert Null und an den Enden ihre Maxima hat.

Bei beweglicher gleichmäßiger Belastung (γ) gelten die Betrachtungen auf S. 1039 u. f.

Wird die Blechwand gemäß Fig. 1033 durch Fachwerk ersetzt, so bleiben bei ständiger gleichmäßiger Belastung (γ') die Biegungsmomente bei Knotenbelastung für die Knoten ungeändert (vergl. S. 1041), während die parabolische Momentenfläche dazwischen für die Gurtkräfte stufenförmig umzubilden ist, und zwar liegen die Stufen für den oberen Gurt außerhalb und für den unteren Gurt innerhalb des Parabelzuges, wenn die Streben beiderseits nach der Mitte zu abfallen. Die nach der Mitte zu abfallenden Streben werden sämtlich gezogen, und zwar nimmt der Zug nach der Mitte zu ab, fast bis auf Null.

Bei beweglicher Belastung tritt die Betrachtung auf S. 1184 ein, wonach in den mittleren Streben auch Druck auftritt, den man dann durch entgegengesetzt gerichtete Zugstreben abfängt; diese sind in Fig. 1033 punktiert eingezeichnet.

Gezogene Streben entsprechen stets gedrückten Ständern und umgekehrt. Ob die Belastung am oberen oder unteren Gurte angreift, ist für die Beanspruchung der Gurten und Streben gleichgültig, beeinflußt aber die Beanspruchung der Ständer.

Bei einem vollwandigen Träger führt die Bedingung, daß die Vertikalkraft bei voller gleichmäßiger Belastung überall den Wert Null annehmen

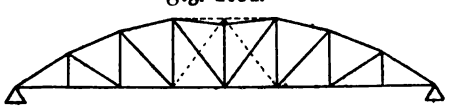
soll, dazu, die Gurte paraboliſch auszubilden (vergl. dazu S. 1191). Bei dieſem paraboliſchen Träger ſind die Gurte bei voller Belaſtung am ſtärkſten beanſprucht, und zwar haben die horizontalen Komponenten der Gurtkräfte überall denſelben Wert (vergl. S. 1189), während demnach die Gurtkräfte ſelbſt bei gekrümmten Gurten nach den Enden zu etwas zunehmen.

Bei beweglicher Belaſtung treten die Maxima der Vertikalkraft auf, falls volle einſeitige Belaſtung vorliegt, und zwar ſind dieſe Maxima der Trägerhöhe an der betreffenden Stelle proportional, ſie nehmen alſo nach den Enden zu ab bis auf Null.

Beim paraboliſchen Fachwerkbalken gilt für die Gurte dasſelbe wie für den vollwandigen Träger. Bei voller gleichmäßiger Belaſtung ſind die Streben ſpannungslos, während ihre Beanſpruchung bei einſeitiger Belaſtung in der Mitte etwa der des Parallelträgers entſpricht, nach den Enden zu aber abnimmt.

Während bei den paraboliſchen Trägern die horizontalen Komponenten der Gurtkräfte überall denſelben Wert haben und dieſe ſelbſt demnach von der Mitte nach den Enden zu je nach der Krümmung mehr oder weniger zunehmen (im Mittel bei den gebräuchlichen Konſtruktionen etwa 3 Proz.), haben bei dem Pauliſchen Träger die Gurtkräfte überall denſelben Wert.

Fig. 1034.



Der Pauliſche Träger weicht in ſeiner Form nur wenig von einem paraboliſchen Träger ab, die Vertikalkräfte fallen aber größer aus, während die horizontalen Komponenten der Gurtkräfte von der Mitte aus nach den Enden zu etwas abnehmen.

Will man beim paraboliſchen Fachwerk nur Zugſtreben haben, ſo muß man in allen Fächern gekreuzte Streben anbringen, weil bei einer Strebe in jedem Fache alle Streben bei gleichmäßiger beweglicher Belaſtung gleich ſtark auf Zug und auf Druck beanſprucht werden.

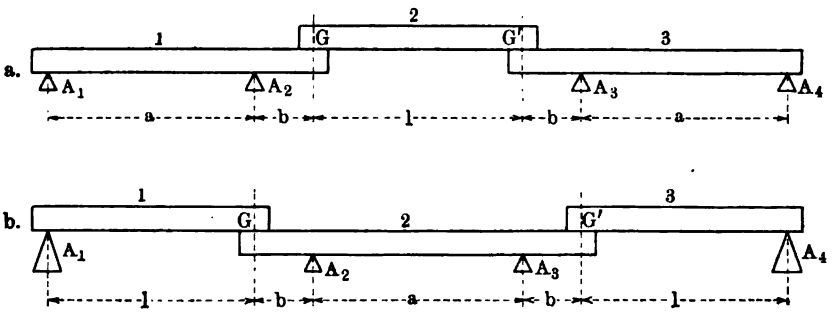
Will man in jedem Fach mit einer Strebe auskommen, welche nur gezogen wird, ſo muß man den Schwedlerſchen Träger anwenden, den Fig. 1034 darſtellt. Man gleicht deſſen mittlere Einbuchtung meiſt aus äſthetiſchen Gründen geradlinig aus, muß aber dann auch wieder für die entſprechenden Fächer gekreuzte Streben einführen.

Die Bevorzugung der Zugſtreben vor den Druckſtreben iſt bedingt durch die ſonſt auftretende Knickgefahr, durch welche verhältnismäßig dicke Stäbe bedingt würden.

12. **Durchgehende Gelenkträger** (Gerberſche Träger). Ein durchgehender Träger iſt ſtatiſch unbeſtimmt, und zwar ſind für deſſen Behandlung bei n Stützen $n - 2$ Beziehungen aus der Elaſticitätslehre zu entwickeln. Schneidet man den Träger über den $n - 2$ inneren Stützen durch, ſo geht er in eine Folge von $n - 1$ einfachen Balken über, die durch Stoß aneinandergefügt ſind. Der Vorteil der durchgehenden Träger, welcher darin beſteht, daß die Biegungsmomente in einem Felde durch die Gegenwirkungen der benach-

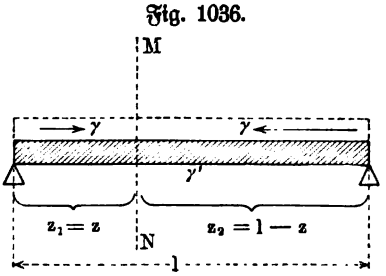
harten Felder zum Teil aufgehoben werden, geht bei der Auflösung dieser Träger in eine Folge gestoßener Balken verloren. Bringt man aber die $n - 2$ Schnitte nicht über den Stützen an, sondern nach dem Vorgange von Gerber in bestimmter Weise innerhalb der Felder, so behält der Träger den genannten Vorteil und wird außerdem unabhängig von der Empfindlichkeit, welche durchgehende Träger in Bezug auf zufällige Änderungen in der Höhenlage der Stützen zeigen.

Fig. 1035.



In Fig. 1035 a und b ist für einen Vierstützenträger die übliche Anordnung solcher Schnitte dargestellt; die Trägerstücke sind an den Schnittstellen entweder durch möglichst reibungslose Gelenke oder durch einfache Auflagerung verbunden. Der Balken 2 in Fig. 1035 a und die Balken 1 und 3 in Fig. 1035 b sind einfache Zweistützenträger, während die Balken 1 und 3 in Fig. 1035 a Zweistützenträger mit einem überkragenden Ende und der Balken 2 in Fig. 1035 b ein Zweistützenträger mit zwei solchen Enden ist.

Fig. 1036.



Wir wollen hier die Gerberschen Träger der Fig. 1035 a und b für eine gleichmäßige ständige Belastung (γ') und eine gleichmäßige bewegliche Belastung (γ) untersuchen.

Für die einfachen Zweistützenträger ist den Betrachtungen in § 159 nichts hinzuzufügen. Für jede Schnittstelle MN in Fig. 1036 hat das Moment bei voller Belastung seinen größten Wert

$$Mo = \tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma)\, z\,(l - z),$$

und zwar liegt das Maximum aller dieser Werte in der Mitte ($z = \frac{1}{2} l$) und beträgt

$$1) \quad Mo_l = \tfrac{1}{8}(\gamma + \gamma')\, l^2.$$

Für jede Schnittstelle hat die Vertikalkraft ihre größten Werte bei einseitiger Belastung von rechts aus oder von links aus; für Belastung der linken Seite ist

$$(+ V_{max}) = \tfrac{1}{2}\gamma \frac{z^2}{l} - \tfrac{1}{2}\gamma'(l - 2z) = + \left[\tfrac{1}{2}\frac{(\gamma + \gamma')}{l} z^2 - \tfrac{1}{2}\gamma' \frac{(l - z)^2}{l}\right]$$

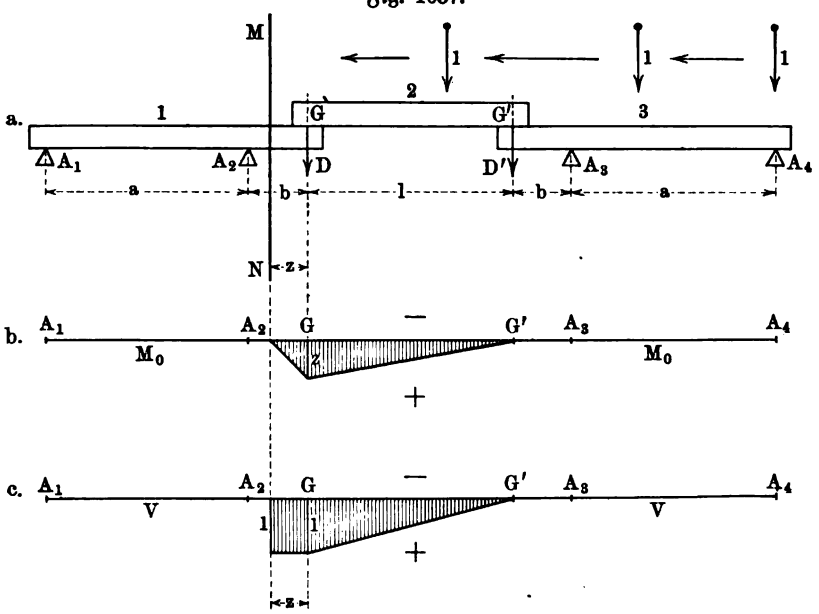
und für Belastung der rechten Seite ist

$$(-V_{max}) = -\tfrac{1}{2}\gamma\frac{(l-\varepsilon)^2}{l} - \tfrac{1}{2}\gamma'(l-2\varepsilon)$$
$$= -\left[\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')\frac{(l-\varepsilon)^2}{l} - \frac{\tfrac{1}{2}\gamma'\varepsilon^2}{l}\right].$$

Wir untersuchen nun die Anordnung der Fig. 1035 a, und zwar zunächst das Kragstück b bei A_1A_2 gemäß Fig. 1037.

Bewegt sich eine Last vom Werte 1 vom rechten Ende des Trägers aus, so ist sie auf das Kragstück b zunächst ohne Einfluß, wirkt aber mit dem Druck $[D]$ auf das Kragstück, sobald sie den rechten Auflagerpunkt G' vom Stück 2 erreicht hat, wobei $D + D' = 1$ ist. Der Wert der Kraft $[D]$,

Fig. 1037.



welche für den Schnitt MN das positive Moment $D \cdot \varepsilon$ erzeugt, wächst für eine Bewegung der Last 1 von G' bis G von 0 bis 1, das Moment also von 0 bis ε. Hat die Last 1 die Stelle G erreicht, so giebt sie für MN unmittelbar ein Moment, das von $\varepsilon \cdot 1$ bis 0 abnimmt. Dieser Betrachtung entspricht die Einflußlinie, welche unterhalb von A_4A_1 als Fig. 1037 b gezeichnet ist. Man bemerkt sofort, daß wegen der Beziehung $0 < \varepsilon < b$ die Einflußlinie für einen Schnitt durch A_2 das größte Moment $b \cdot 1$ an der Stelle G liefert; zu ihm gehört $b + l$ als Grundlinie, so daß die entsprechende Momentenfläche den Wert $\frac{b}{2}(b+l)$ hat. Da die Momentenfläche keine Teile von verschiedenen Vorzeichen enthält, so erhält das Moment für volle Belastung von $G'A_2$ seinen größten Wert, und demnach ist das größte Moment für das Stück b gemäß § 159

$$2)\quad Mo_b = \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')b(b+l).$$

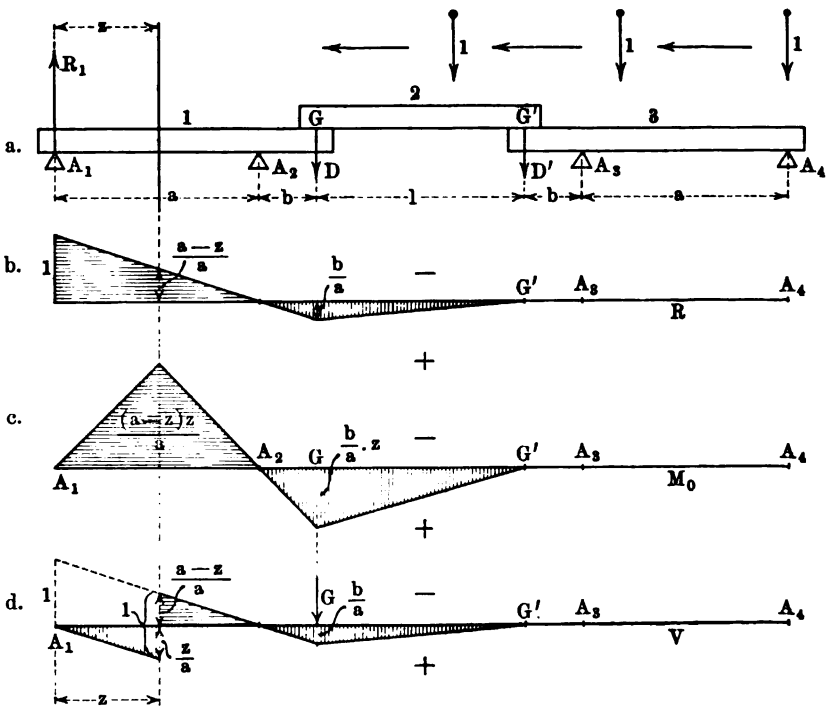
Die Vertikalkraft für A_2G wird bestimmt durch den Druck D bezw. durch die unmittelbare Belastung von GA_2, so daß ihre Einflußlinie durch Fig. 1037 c dargestellt wird; die entsprechende Fläche ist $(\varepsilon + \frac{1}{2}l) \cdot 1$, so daß damit gemäß § 159 die Vertikalkraft selbst gegeben ist. Da auch diese hier bei voller Belastung ihren größten Wert erreicht, so ist für die Schnittstelle MN

$$V_{max} = (\gamma + \gamma')(\varepsilon + \tfrac{1}{2}l),$$

während bei unbelastetem Träger $V = \gamma'(\varepsilon + \frac{1}{2}l)$ für sie gilt.

Wir gehen nun dazu über, einen Schnitt im Stücke A_1A_2 zu betrachten, gemäß Fig. 1038. Dazu stellen wir erst den Auflagerdruck $[-R_1]$ in A_1

Fig. 1038.



fest für eine von A_4 aus sich bewegende Last 1. Solange sich die Last auf A_4G' befindet, ist $R_1 = 0$, betritt sie $G'G$, so wirkt sie durch $[D]$ auf A_1G, so daß $[R_1]$ zunächst die Richtung von oben nach unten hat, wobei für A_2 als Drehpunkt $R_1 a = bD$ ist; demnach wächst R_1 von 0 bis $\frac{b}{a} \cdot 1$. Durchläuft die Last 1 das Stück GA_2, so nimmt R_1 proportional mit der Entfernung der Last von A_2 ab und hat für die Laststellung über A_2 den Wert 0. Bewegt sich die Last von A_2 nach A_1, so ist $[R_1]$ nach oben gerichtet und wächst von A_2 an proportional zur Lastentfernung von A_1 bis 1. Demgemäß ergiebt sich für $[R_1]$ die Einflußlinie der Fig. 1038 b.

Die entsprechende Fläche ist $-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}(b+l)\frac{b}{a}$.

Soll in R_1 der positive Teil möglichst groß sein, so muß die der positiven Fläche entsprechende Belastung möglichst groß und die der negativen Fläche entsprechende Belastung möglichst klein sein, so daß dann für R_1 nach § 159

$$-\tfrac{1}{2}\gamma' \cdot a + \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')(b+l)\frac{b}{a}$$

folgt; es entspricht dies einer Anordnung, bei welcher A_4A_3 voll belastet und A_2A_1 unbelastet ist.

Soll in R_1 der negative Teil einen möglichst großen Wert haben, so muß A_4A_3 unbelastet und A_2A_1 voll belastet sein, und man hat dann für R_1 den Wert

$$-\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')a + \tfrac{1}{2}\gamma'(b+l)\frac{b}{a}.$$

Um das Moment für MN festzustellen, hat man zu beachten, daß sein Wert $R_1 z$ ist, solange die Last 1 sich rechts vom Schnitte befindet, und zwar ist das Moment positiv für ein nach unten gerichtetes R_1. Demnach verläuft die Einflußlinie des Momentes von A_4 an bis zum Schnitte MN genau so wie die Einflußlinie von $[R_1]$ und ist der Wert Mo in G durch $z\frac{b}{a}$ gegeben. Der Abschluß der Einflußlinie nach links hin ergiebt sich ohne weiteres, da Mo in A_1 den Wert 0 hat, und zwar ist die Höhe im Schnitte

$$\frac{a-z}{b} \cdot z\frac{b}{a} = \frac{(a-z)z}{a};$$

dem entspricht die Einflußlinie der Fig. 1038 c. Der größte Wert des positiven Teils von Mo entspricht wieder einer vollen Belastung der Strecke A_4A_2, während A_2A_1 unbelastet ist, so daß sich für diese Anordnung nach § 159 ergiebt

$$Mo = \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')(l+b)\frac{b}{a}z - \tfrac{1}{2}\gamma' a \cdot \frac{(a-z)z}{a}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')(l+b)\frac{b}{a}z - \tfrac{1}{2}\gamma'(a-z)z.$$

Dem größten Werte des negativen Teiles von Mo entspricht ebenso

$$\tfrac{1}{2}\gamma'(l+b)\frac{b}{a}z - \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')(a-z)z.$$

Um die Stellen z zu bestimmen, für welche überhaupt die größten Werte von Mo auftreten, beachten wir, daß sich für volle Belastung der Strecke A_4A_2

$$Mo = -R_1 z + \tfrac{1}{2}\gamma' z^2$$

und für volle Belastung der Strecke A_2A_1

$$Mo = -R_1 z + \tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')z^2$$

ergiebt; im ersten Falle tritt Mo_{max} für $z = \frac{R_1}{\gamma'}$ mit dem Werte $-\frac{1}{2}\frac{R_1^2}{\gamma'}$

ein, im zweiten Falle für $\varepsilon = \frac{R_1}{\gamma + \gamma'}$ mit dem Werte $-\frac{1}{2}\frac{R_1^2}{\gamma + \gamma'}$, wobei R_1 in jedem Falle durch die oben entwickelten Ausdrücke gegeben ist.

Der größte Wert des Momentes beim Überwiegen des positiven Teiles beträgt also

$$-\frac{1}{2\gamma'} \cdot \left[-\tfrac{1}{2}\gamma' a + \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')(b + l)\frac{b}{a}\right]^2$$
$$= -\tfrac{1}{8}\gamma' a^2 \left[1 - \frac{\gamma + \gamma'}{\gamma'}\frac{(b + l)b}{a^2}\right]^2$$

und ebenso ist dessen größter Wert beim Überwiegen des negativen Teiles

$$-\frac{1}{2(\gamma + \gamma')} \cdot \left[-\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma') a + \tfrac{1}{2}\gamma'(b + l)\frac{b}{a}\right]^2$$
$$= -\tfrac{1}{8}(\gamma + \gamma') a^2 \left[1 - \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'}\frac{(b + l)b}{a^2}\right]^2.$$

Da der Zahlenwert des letzten Momentes überwiegt, so ist der größte Wert für die Strecke a einzuführen als

$$3) \quad Mo_a = \tfrac{1}{8}(\gamma + \gamma') a^2 \left[1 - \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'}\frac{(b + l)b}{a^2}\right]^2.$$

Die Vertikalkraft, welche einer von A_4 aus wandernden Belastung 1 entspricht, hat den Wert 0, bis die Last den Punkt G' erreicht, und stimmt von da ab mit dem Auflagerdrucke $[R_1]$ überein, bis die Last 1 den Schnitt MN erreicht. Links vom Schnitt MN hat die Vertikalkraft den Wert $-R_1 + 1$, welcher für A_1 zu Null wird. Demgemäß ergiebt sich die Einflußlinie der Fig. 1038 c.

Sollen die positiven Teile überwiegen, so muß $G'A_2$ und ε voll belastet sein, während $a - \varepsilon$ unbelastet ist; man hat dann

$$V = \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')\left[(b + l)\frac{b}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a}\right] - \tfrac{1}{2}\gamma'\frac{(a - \varepsilon)^2}{a}.$$

Sollen die negativen Teile überwiegen, so ist ebenso

$$V = \tfrac{1}{2}\gamma'\left[(b + l)\frac{b}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a}\right] - \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')\frac{(a - \varepsilon)^2}{a}.$$

Durch starke Belastung von GG' in Fig. 1038 könnten die Stücke 1 und 3 bezw. unter Drehung um A_2 und A_3 bei A_1 und A_4 von den Stützen abgehoben werden. Soll dies vermieden werden, so muß $[R_1]$ stets nach oben gerichtet sein, d. h. R_1 muß selbst bei Überwiegen der positiven Teile der Einflußfläche noch negativ sein. Diese Bedingung verlangt also

$$-\tfrac{1}{2}\gamma' a + \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')(b + l)\frac{b}{a} < 0$$

oder

$$4) \quad (b + l)\frac{b}{a^2} < \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'}.$$

Um eine möglichst günstige Anordnung zu erhalten, sucht man möglichst kleine Momente zu erzielen, indem man (vergl. S. 1006) setzt

$$5) \quad Mo_l = Mo_b = Mo_a.$$

Nach 1) und 2) ist zunächst

$$\tfrac{1}{4} l^2 = b(b + l),$$

woraus

$$b = 0{,}207\, l$$

folgt.

Nach 1) und 3) ist ferner

$$l^2 = a^2 \left[1 - \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'} \frac{(b + l)\, b}{a^2}\right]^2$$

oder, da $b(b + l) = \frac{1}{4} l^2$ ist, auch

$$\pm l = a \left[1 - \tfrac{1}{4} \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'} \cdot \frac{l^2}{a^2}\right],$$

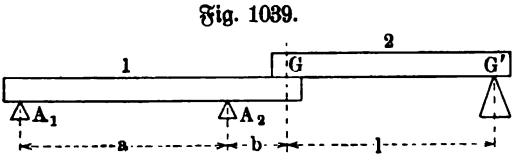
woraus

$$a = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'}}\right)$$

folgt.

Führt man die Werte von b und a in die oben entwickelte Bedingung 4) ein, so folgt $\frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'} > 0{,}23$, d. h. wenn $\gamma < \frac{77}{23} \gamma'$ ist, so sind die Werte für b und a, welche der günstigsten Anordnung entsprechen, brauchbar.

Fig. 1039.



Ist dies nicht der Fall, so muß die Ungleichheit, 4), durch welche die Sicherheit gegen Kippen gewährleistet wird, unbedingt erfüllt werden, während man entsprechend 5) von den Gleichungen

$$Mo_l = Mo_b, \quad Mo_b = Mo_a, \quad Mo_a = Mo_l$$

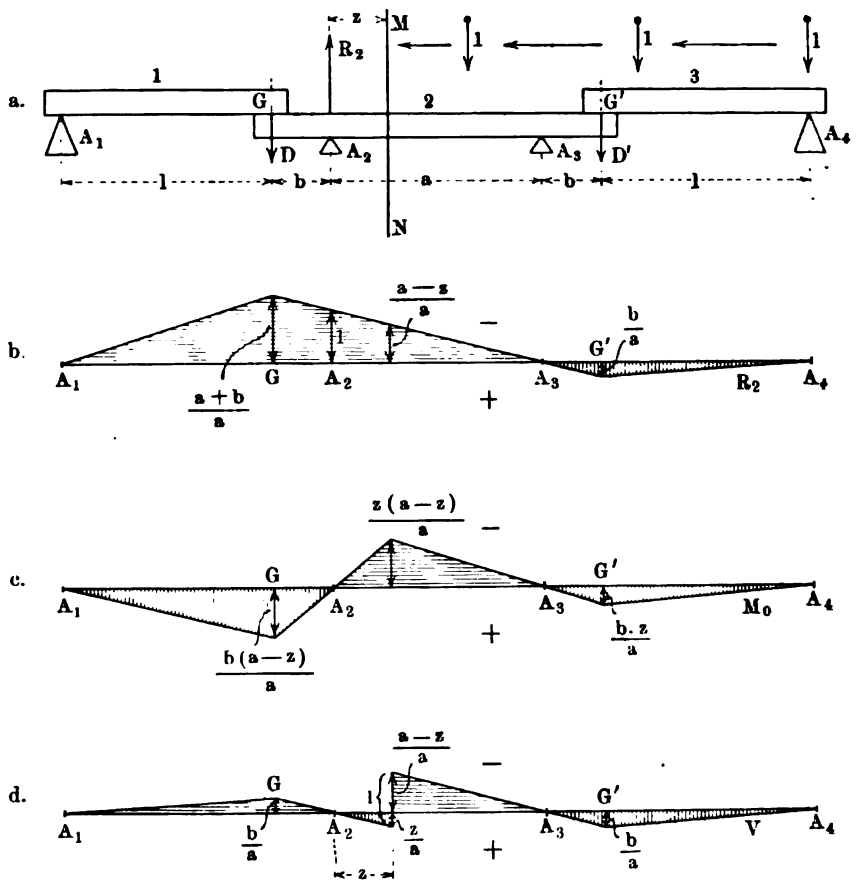
diejenige auswählt, durch welche die größte Verminderung der Momente erreicht wird.

Verwandelt man G oder G' in ein festes Auflager, wie es z. B. Fig. 1039 zeigt, so entsteht ein Dreistützenträger, für welchen die obige Betrachtung gleichfalls gilt.

Für die zweite Anordnung (vergl. Fig. 1040 a. f. S.) ist nach Vorstehendem nur noch das Stück a mit den beiden Kragstücken b zu untersuchen. Es ist zweckmäßig, zunächst den Auflagerdruck in A_2 oder in A_3 zu betrachten, wir wählen $[R_2]$ in A_2. Schreitet hier die Last 1 von A_1 aus fort, so tritt sogleich in A_2 eine Reaktion auf, und zwar ist diese nach unten gerichtet, bis die Last 1 die Stelle A_3 erreicht, für welche $R_2 = 0$ ist. Zunächst wirkt die Last 1 durch den Druck $[D']$ auf den Balken 2 und zwar ist für A_3 als Drehpunkt $R_2 \,.\, a = D' \,.\, b$, so daß $R_2 = \frac{b}{a} D'$ ist. Da D' von 0 bis 1 gleichmäßig zunimmt, während die Last von A_1 nach G' wandert, so nimmt R_2 hier gleichmäßig zu von 0 bis $\frac{b}{a}$. Nach Überschreitung von G' wirkt Last 1 unmittelbar auf den Balken 2, und zwar wirkt $[R_2]$ nach

Überschreiten von A_3 von unten nach oben und hat in A_2 den Wert 1 und in G den Wert $\frac{a+b}{a}$. Nach Überschreitung von G verteilt sich die Last 1 wieder auf G und A_1 und zwar so, daß beim Fortschreiten der Anteil für G kleiner und kleiner wird bis Null. Dieser Betrachtung entspricht die Einflußlinie der Fig. 1040 b.

Fig. 1040.



Soll der positive Teil überwiegen, so ist A_4A_3 zu belasten, während A_3A_1 unbelastet sein muß; es ist dann

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')(b + l)\frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\gamma'(a + b + l)\frac{a+b}{a}.$$

Soll der negative Teil überwiegen, so ist entsprechend

$$R_2 = \tfrac{1}{2}\gamma'(b + l)\frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')(a + b + l)\frac{a+b}{a}.$$

Das Moment für den Schnitt MN hat jedenfalls den Wert Null, wenn

die Last 1 über A_3 oder A_2 steht, und ist dazwischen negativ mit einem Maximum im Schnitt MN, für den es den Wert $-R_2 . z$ bei $R_2 . a = (a - z) . 1$ hat, d. h. den Wert $-\frac{z(a-z)}{a}$. Rückt die Last über A_2 oder A_3 hinaus nach G oder G', so wird das Moment positiv und erhält in G bezw. G' die Werte $b\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ und $b\left(1 - \frac{a-z}{a}\right)$. Rückt die Last 1 von G oder G' weiter nach A_1 oder A_4, so bleibt das Moment positiv und hat für A_1 oder A_4 den Wert Null. Demgemäß entsteht die Einflußlinie des Momentes der Fig. 1040 c.

Die positive Fläche beträgt $\frac{1}{2}(l + b)b$, während die negative den Wert $\frac{1}{2}z(a - z)$ hat.

Demnach gilt für ein Überwiegen der positiven Teile des Momentes

$$Mo = \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')(l + b)b - \tfrac{1}{2}\gamma' z(a - z)$$

und für ein Überwiegen der negativen Teile des Momentes

$$Mo = \tfrac{1}{2}\gamma'(l + b)b - \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')z(a - z).$$

Da $z(a - z) = za - z^2$ für $z = \frac{1}{2}a$ seinen Größtwert $\frac{1}{4}a^2$ hat, so tritt beim Überwiegen der negativen Teile der Größtwert von Mo in der Mitte von A_2A_3 auf und beträgt

$$\tfrac{1}{2}\gamma'(l + b)b - \tfrac{1}{8}(\gamma + \gamma')a^2,$$

so daß als Wert des gefährlichen Momentes für A_2A_3 anzusetzen ist

$$6)\quad Mo_a = -\tfrac{1}{2}\gamma'(l + b)b + \tfrac{1}{8}(\gamma + \gamma')a^2.$$

Die Vertikalkraft stimmt wieder mit $[R_2]$ überein, während die Last 1 von A_4 bis zum Schnitt MN vorrückt, und ändert sich an der Schnittstelle um 1 gegen R_2, und behält diese Änderung bei, bis die Last 1 nach G gekommen ist, hat also z. B. unter A_2 den Wert Null. Rückt die Last von G nach A_1, so geht die Vertikalkraft der Schnittstelle gleichmäßig in Null über. Demgemäß entsteht die Einflußlinie der Fig. 1040 d.

Der positive Teil hat den Wert $\frac{1}{2}(l + b)\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a}$, während der negative Teil den Wert $\frac{1}{2}\frac{(a-z)^2}{a} + \frac{1}{2}(l + b)\frac{b}{a}$ hat. Beim Überwiegen der positiven Teile ist also die Vertikalkraft anzusetzen als

$$\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')\left[(l + b)\frac{b}{a} + \frac{z^2}{a}\right] - \tfrac{1}{2}\gamma'\left[\frac{(a-z)^2}{a} + (l + b)\frac{b}{a}\right]$$

und beim Überwiegen der negativen Teile als

$$\tfrac{1}{2}\gamma'\left[(l + b)\frac{b}{a} + \frac{z^2}{a}\right] - \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma')\left[\frac{(a-z)^2}{a} + (l + b)\frac{b}{a}\right].$$

Durch starke Belastung von A_4G' oder A_1G kann der Teil GG' in Fig. 1040 von der Stütze A_2 oder A_3 abgehoben werden. Soll dies unmöglich sein, so muß die Reaktion $[R]$ auch beim Überwiegen der positiven Teile noch nach oben gerichtet (negativ) sein, d. h. man hat als Bedingung

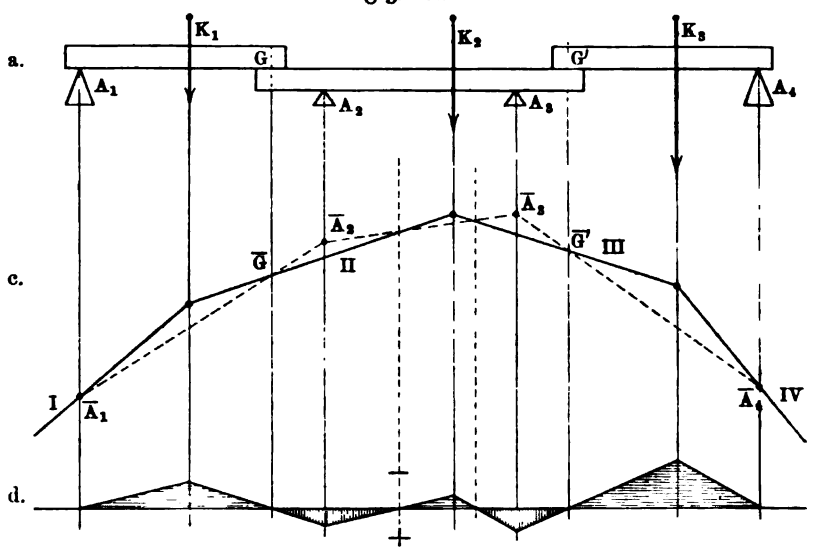
$$\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')(b+l)\frac{b}{a}-\tfrac{1}{2}\gamma'(a+b+l)\frac{a+b}{a}<0$$

oder

$$7)\quad (a+b+l)(a+b)>\frac{\gamma+\gamma'}{\gamma'}\cdot(b+l)b.$$

Da auch bei dieser Anordnung die Gleichungen 1) und 2) in Geltung bleiben, so fordert eine möglichst günstige Anordnung hier

Fig. 1041.



$$8)\quad Mo_l = Mo_b = Mo_a$$

gemäß den Gleichungen 1) und 2) und 6).

Man hat zunächst wieder $\frac{1}{4}l^2 = b(b+l)$ oder $b = 0{,}207\,l$ und hat ferner nach 1) und 6)

$$\tfrac{1}{8}(\gamma+\gamma')l^2 = \tfrac{1}{8}(\gamma+\gamma')a^2 - \tfrac{1}{2}\gamma'(l+b)b$$

oder, da $b(b+l) = \frac{1}{4}l^2$ ist, auch

$$\tfrac{1}{8}(\gamma+\gamma')l^2 = \tfrac{1}{8}(\gamma+\gamma')a^2 - \tfrac{1}{8}\gamma' l^2$$

oder

$$a = l\sqrt{1+\frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'}}.$$

Führt man die Werte für b und a in die oben entwickelte Beziehung 7) ein, so folgt $\frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'} > 0{,}09$, d. h. wenn $\gamma < \frac{91}{9}\gamma'$ ist, so sind die Werte für b und a, welche der günstigsten Anordnung entsprechen, brauchbar. Ist dies nicht der Fall, so muß die Ungleichheit 7), durch welche die Sicherheit gegen Kippen gewährleistet wird, unbedingt erfüllt werden, während man, entsprechend 8) von den Gleichungen

$$Mo_l = Mo_b, \quad Mo_b = Mo_a, \quad Mo_a = Mo_l$$

diejenige auswählt, durch welche die größte Verminderung der Momente erreicht wird.

Es hat keine Schwierigkeiten, gemäß Fig. 1037 und Fig. 1038 in Verbindung mit Fig. 1040 Träger zusammenzusetzen, welche über mehr als vier Stützen gehen, ohne daß für diese eine neue Untersuchung nötig wird.

Für die graphostatische Behandlung der Gerberschen Träger ist bei ruhenden Lasten nichts hinzuzufügen. Im Falle der Fig. 1041 a vereinigt man z. B. die Kräfte gemäß Fig. 1041 b zu einem Kraftеck und konstruiert dem Pole O entsprechend in Fig. 1041 c das entsprechende Seileck. Da die Momente unter A_1, G, G' und A_4 den Wert Null haben und sich dazwischen linear verändern, so begrenzen $\overline{A_1 G}$ und $\overline{A_4 G'}$ die Momentenfläche. Da unter A_2 und A_3 Maxima des Momentes liegen, so giebt die Verlängerung von $\overline{A_1 G}$ den Punkt $\overline{A_2}$ und die Verlängerung von $\overline{A_4 G}$ den Punkt $\overline{A_3}$, während dann $\overline{A_2 A_3}$ den Abschluß der Momentenfläche bildet. Da die Momente bei A_1 und $\overline{A_4}$ zunächst negativ sind, so ergiebt sich deren Vorzeichenbestimmung ohne weiteres.

In Fig. 1041 d ist der Verlauf des Momentes mit entsprechender Schraffierung noch gemäß Fig. 1041 c in horizontaler Abgleichung dargestellt.

Bei gleichmäßiger Belastung entsteht eine Figur, welche Fig. 1041 c und d entspricht, falls man die Streckenzüge der Begrenzung durch Parabelbögen ersetzt.

In Bezug auf bewegliche Belastungen ist dasselbe Verfahren anzuwenden, nachdem die Belastungen jeweilig so angebracht worden sind, daß die größten Zahlenwerte von Mo und V auftreten.

Dritte Gruppe.

Maschinenteile.

13. Zähne an Zahnrädern und Zahnstangen. Für die Berechnung der gewöhnlichen Stirnräder pflegt man einen Zahn als ein Rechtkant aufzufassen, wie es Fig. 1042 (a. f. S.) darstellt. Länge l, Stärke s und Breite b drückt man durch die Teilung t aus, d. h. durch den Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte, gemessen auf dem Teilkreise (r), wobei für eine Zähnezahl z natürlich $z \,.\, t = 2r\pi$ ist.

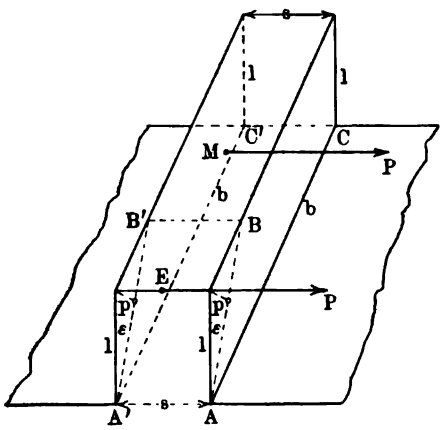
Es hat sich zweckmäßig erwiesen, im allgemeinen die Länge $l = 0{,}7\,t$ zu nehmen, wobei $0{,}4\,t$ auf den unteren Teil des Zahnes (Wurzel) und $0{,}3\,t$ auf den oberen Teil des Zahnes (Kopf oder Krone) kommen; bei gleicher Größe für Zahn und Lücke ist die Stärke $s = 0{,}5\,t$ zu setzen, man konstruiert thatsächlich meist mit $s = 0{,}5\,t$ bis $0{,}55\,t$.

Für die Bestimmung der Breite b hat man zu unterscheiden, ob es sich um sogenannte Kraträder oder um sogenannte Arbeitsräder handelt. Dienen die Räder bei relativ geringer Tourenzahl der Übertragung von Kräften, wie es z. B. bei Handwinden, Kranen u. s. w. der Fall ist, so wird

die Breite lediglich durch die Lehre von der Elasticität und Festigkeit bestimmt; haben die Räder bei relativ großer Tourenzahl eine erhebliche Menge von Arbeit zu übertragen, wie z. B. bei den gebräuchlichen Transmissionen, so werden die Abmessungen der Zähne auch durch die Rücksicht auf Abnutzung, Erwärmung, Stöße u. s. w. mit bedingt.

Für **Krafträder** gilt Folgendes. Wenn die Kraft $[P]$ parallel zur Mittelebene des Rades die Ecke E tangential faßt, wie es Fig. 1042 zeigt, so tritt erfahrungsmäßig bei mangelhaftem Material eine Bruchfläche wie $ABB'A'$ ein; dabei ist der Abstand der Bruchfläche von $[P]$ durch $p = l \sin \varepsilon$ gegeben, so daß als biegendes Moment $Mo = Pp = Pl \sin \varepsilon$ anzusetzen ist, während die Bruchfläche ein Rechteck von der Höhe s und der Breite $\frac{l}{\cos \varepsilon}$ ist. Nach der Festigkeitsgleichung für Freiträger gilt demnach

Fig. 1042.



$$Pl \sin \varepsilon = \sigma \cdot \tfrac{1}{6} \frac{l}{\cos \varepsilon} s^2,$$

woraus eine Spannung

$$\sigma = \frac{3 P \sin 2\varepsilon}{s^2}$$

folgt.

Für $2\varepsilon = 90^0$ tritt der Größtwert von σ auf, so daß $\varepsilon = 45^0$ die gefährliche Bruchfläche bestimmt, für welche

$$\sigma = \frac{3 P}{s^2}$$

ist.

Wenn $[P]$ parallel zur Mittelebene des Rades die Mitte M tangential faßt (vergl. Fig. 1042), so ist $ACC'A'$ die wahrscheinliche Bruchfläche, für welche nach der Festigkeitsgleichung für Freiträger gilt

$$Pl = \sigma \cdot \tfrac{1}{6} b s^2,$$

woraus

$$\sigma = \frac{6 Pl}{b s^2}$$

folgt.

Soll die Sicherheit für den Angriff von $[P]$ in E und in M dieselbe sein, so muß

$$\frac{3 P}{s^2} = \frac{6 Pl}{b s^2}$$

sein, woraus

$$b = 2l$$

oder für $l = 0{,}7\, t$

$$b = 1{,}4\, t$$

folgt.

Greift $[P]$ zwischen E und M an, so ist der Arm p von $[P]$ für eine Bruchfläche $ABB'A'$ kleiner als $l \sin \varepsilon$, d. h. man hat für m als echten Bruch $p = ml \sin \varepsilon$, woraus

$$\sigma = m \cdot \frac{3P}{s^2}$$

folgt; bei einem Vergleich dieser Spannung mit $\sigma = \frac{6Pl}{bs^2}$ wird jetzt b größer als im vorigen Falle.

Da man thatsächlich mit einem Angriffe von $[P]$ zwischen E und M zu rechnen hat, so legt man der Konstruktion statt $b = 1{,}4\,t$ die Gleichung

$$b = 2t$$

zu Grunde.

Aus der Gleichung

$$Pl = \sigma \,.\, \tfrac{1}{6} b s^2$$

folgt ferner für $l = 0{,}7\,t$ und $s = 0{,}5\,t$ bis $0{,}55\,t$

$$P = \sigma \,.\, 0{,}06\,bt \text{ bis } \sigma \,.\, 0{,}07\,bt.$$

Dabei ist für σ die zulässige Spannung k_b des Materials anzusetzen, und zwar mit Rücksicht auf den Wechsel zwischen Entlastung und Druckbelastung, entsprechend der Ursprungsfestigkeit (vergl. S. 857).

Für Gußeisen ist z. B. $k_b = 300$ Atm. zu nehmen, so daß hier

$$P = 18\,bt \text{ bis } 21\,bt$$

ist.

Dabei ist die Breite b als $2t$ bestimmt mit Rücksicht auf die annähernd gleichmäßige Sicherheit der Beanspruchung durch $[P]$ zwischen E und M.

Sieht man sich gezwungen, bei einer Konstruktion eine größere Breite b' zu verwenden, so hält man mit Rücksicht auf jene gleichmäßige Sicherheit die Gleichung

$$P = c \,.\, bt$$

für $c \,.\, b = 18\,b$ bis $21\,b$ fest und rechnet mit

$$P = c' \,.\, b't,$$

wobei nun $cb = c'b'$ oder

$$c' = c \cdot \frac{b}{b'} = 18 \cdot \frac{2t}{b'} \text{ bis } 21 \cdot \frac{2t}{b'}$$

ist.

Für einen gegebenen Wert von P folgt t nach Wahl von b; so ist z. B. für $b = 2t$ bei Gußeisen ($c = 18$ bis 21)

$$t = \sqrt{\frac{P}{36}} \text{ bis } \sqrt{\frac{P}{42}}.$$

Ist das zu übertragende Moment Mo gegeben, so ist $Pr = Mo$ und $2r\pi = \varepsilon \,.\, t$, so daß für $b = \psi t$ aus $P = cbt$ folgt

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi \,.\, Mo}{c\psi\varepsilon}}.$$

Dabei wird t in Centimetern erhalten, wenn Mo in Centimeterkilogrammen gegeben ist.

Ist die Tourenzahl n und die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken N gegeben, so ist (vergl. S. 257) für Meterkilogramm

$$Mo = 716{,}20\,\frac{N}{n}$$

und für Centimeterkilogramm

$$Mo = 71\,620\,\frac{N}{n}$$

und man hat für t in Centimetern

$$t = 10\sqrt[3]{\frac{450}{c\psi\varepsilon}\cdot\frac{N}{n}}.$$

Für Arbeitsräder geht man bei der Berechnung der Zähne davon aus, daß die Pressung in den aufeinander gleitenden Berührungsflächen zweier Zähne eine gewisse Größe nicht überschreiten darf. Da diese Flächen angenähert der Zahnbreite b und der Teilung t proportional sind, so legt man nach dem Vorgange von Kankelwitz hier der Rechnung die Gleichung

$$P = c\,.\,bt$$

zu Grunde, welche in der Form mit der Gleichung für Krafträder übereinstimmt.

Mit Rücksicht auf die Arbeit der Zahnreibung u. s. w. läßt sich hier für c nur eine empirische Formel geben.

Für Gußeisen auf Gußeisen gilt bei einer Tourenzahl n

$$c = 20 - \sqrt{n},$$

solange etwa $n \leqq 250$ ist.

Für Holz (Weißbuche) auf Gußeisen gilt ebenso $c = 0{,}4\,(20 - \sqrt{n})$ für kleinere und $c = 0{,}5\,(20 - \sqrt{n})$ für größere Tourenzahlen.

Man hält auch hier daran fest, daß cb der oben bestimmten Konstanten entspricht, setzt also bei Gußeisen $cb = 36\,t$ bis $42\,t$, und bestimmt daraus b; so ist z. B. für $n = 100$ hier $c = 10$ und demnach $b = 3{,}6\,t$ bis $4{,}2\,t$.

Während für Krafträder $b = 2\,t$ ist, hat man bei gewöhnlichen Transmissionen $b = 2\,t$ bis $b = 3\,t$; für Transmissionen mit außergewöhnlicher Arbeitsübertragung steigt b bis zum Wert $5\,t$.

Große Breiten haben den Vorteil, die Zahnstärke und damit die Teilung kleiner halten zu können, so daß dann die Räder relativ viele Zähne erhalten, was einen möglichst ruhigen Gang gewährleistet. Man wählt infolgedessen überhaupt die Zähnezahl möglichst groß, für Krafträder jedenfalls im allgemeinen über 12 und für Arbeitsräder über 24.

Es scheint im allgemeinen vorteilhaft zu sein, die Zähnezahl als ein ganzes Vielfaches der Anzahl der Radarme anzusetzen.

Für ein rasches Einlaufen neuer Räder ist es von Vorteil, wenn immer dieselben Zahnflanken aufeinander treffen; infolgedessen sind die Übersetzungsverhältnisse 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 u. s. w. in dieser Hinsicht am günstigsten, weniger günstig sind 2 : 3, 2 : 5 u. s. w. oder gar 3 : 4, 3 : 5 u. s. w.

Bei Winden geht man mit dem Übersetzungsverhältnis nicht unter 1 : 6, bei Triebwerken nicht unter 1 : 6 bezw. 1 : 4.

Holzzähne (Kämme) giebt man dem einen Rade eines Paares, um einen ruhigen Gang zu erzielen.

Vorstehendes bezieht sich auf gewöhnliche Stirnräder bezw. gerade Zahnstangen, aber auch bei Kegelrädern legt man die Gleichung $P = cbt$ zu Grunde, ebenso für Schrauben ohne Ende (vergl. S. 613); für letztere setzt man $b = 1{,}5\,t$ an und bei Gußeisen $c = 18$ bis 28, falls auf Abnutzung nicht besonders Rücksicht zu nehmen ist, sonst $c = 8$ bis 12.

14. Scheiben und Räder. Die Abmessungen der Scheiben und Räder werden im einzelnen durch empirische Formeln bestimmt, deren Zuläßigkeit dann von Fall zu Fall zu prüfen ist.

So giebt man z. B. bei einer Teilung t des Zahnrades dem Zahnkranze im allgemeinen die Stärke $0{,}5\,t$, während man der Nabe bei einer lichten Weite d in Centimetern im allgemeinen die Länge $1{,}2\,d$ bis $1{,}5\,d$ und die Stärke $\frac{1}{5}(d_0 + \frac{1}{2}d) + 1$ cm bis $\frac{1}{4}(d_0 + \frac{1}{2}d) + 1$ cm giebt, wobei d_0 den Durchmesser der lediglich auf Verdrehung berechneten Welle ($d_0 < d$) bezeichnet.

Fig. 1043 a.

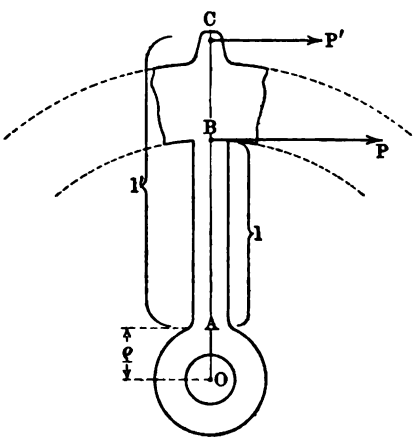
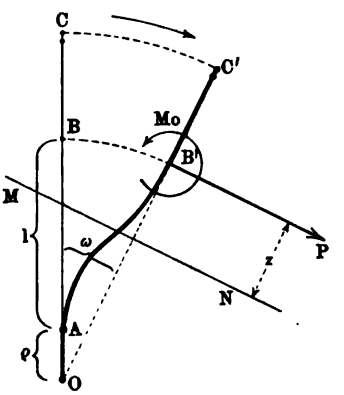


Fig. 1043 b.



So bestimmt man z. B. bei Riemenscheiben die Breite des Kranzes durch $1{,}1\,b + 1$ cm, wenn b die Riemenbreite in Centimetern ist u. s. w.

Die Anzahl n der Arme eines Zahnrades bestimmt man im Überschlage bei im Ganzen gegossenen Rädern ($n = 3$ bis 6) durch

$$n = \tfrac{1}{7}\sqrt{2r}$$

und bei Rädern, die aus Segmenten zusammengesetzt sind, durch

$$n = \tfrac{1}{8}\sqrt{2r},$$

falls r den Radius des Teilkreises in Millimetern bezeichnet.

Die erste Formel wird auch für Riemenscheiben verwendet, falls r den Radius der Scheibe bezeichnet.

In Bezug auf die Abmessungen der Arme eines Rades gilt gemäß Fig. 1043 Folgendes. Wird ein Arm durch die vom Kranze aus tangential wirkende Kraft $[P]$ in B gebogen, so ist er bei einem kräftigen Kranze an diesem und an der Nabe als eingespannt zu betrachten; er

legt ſich erfahrungsmäßig (vergl. Fig. 1043 b) in A tangential an AB und in B' tangential an $B'C'$ an.

Bezeichnet $[Mo]$ das Einſpannungsmoment bei B', ſo iſt nach S. 945 und 946 gegen die Achſe AB die Winkelabweichung ω von B', gegeben durch

$$\omega = \tfrac{1}{2}\frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} - \frac{Mol}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}},$$

während die entſprechende Durchbiegung BB' den Wert hat

$$BB' = \tfrac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}} - \tfrac{1}{2}\frac{Mol^2}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Da außerdem $BB' = (l + \varrho)\,arc\,\omega$ iſt, ſo gilt

$$\tfrac{1}{3}Pl^3 - \tfrac{1}{2}Mol^2 = (l + \varrho)(\tfrac{1}{2}Pl^2 - Mol),$$

d. h. man hat

$$Mo = \tfrac{1}{3}Pl\frac{l + 3\varrho}{l + 2\varrho} \sim \tfrac{1}{3}Pl.$$

Für eine beliebige Schnittſtelle MN iſt das biegende Moment im Sinne von $[P]$ durch

$$P\varepsilon - Mo$$

gegeben, ſo daß es für A den Wert

$$\tfrac{1}{3}Pl\frac{2l + 3\varrho}{l + 2\varrho} \sim \tfrac{2}{3}Pl$$

annimmt.

Für $l = 8\varrho$ iſt z. B. das biegende Moment am Kranze $0{,}367\,Pl$, während er an der Nabe $0{,}633\,Pl$ iſt.

Iſt der Kranz ſehr ſchwach, ſo kann OB als ein bei A eingeſpannter Freiträger gelten, und in dieſem Falle iſt das biegende Moment an der Nabe als Pl gegeben.

Für die Anſatzſtelle des Armes an der Nabe ſchwankt alſo das biegende Moment etwa zwiſchen $\frac{2}{3}Pl$ und Pl. Dabei iſt $[P]$ von Fall zu Fall zu beſtimmen; für den Fall der Fig. 1043 iſt der Zahndruck $[P']$ gegeben, ſo daß aus $P'(l' + \varrho) = P(l + \varrho)$ folgt

$$P = P'\frac{l' + \varrho}{l + \varrho}.$$

Um die Stärke der Arme an der Nabe zu beſtimmen, hat man zu berückſichtigen, daß die Betrachtung der Fig. 1043 für den (an ſich unmöglichen) Fall gelten würde, daß nur ein Arm vorhanden wäre und daß immer gerade deſſen Anſatzſtelle am Kranze tangential von $[P]$ ergriffen würde.

Da thatſächlich ſtets mehrere Arme vorhanden ſind und da der Angriff von $[P]$ relativ zu ihnen wechſelt, ſo nimmt man erfahrungsmäßig an, daß im Mittel $\frac{1}{4}n$ bis $\frac{1}{3}n$ Arme durch die Kraftübertragung beeinflußt werden.

Bezeichnet man für den Anſatz an der Nabe den Wert des biegenden Momentes, der etwa zwiſchen $\frac{2}{3}Pl$ und Pl ſchwankt, durch $\mu\,Pl$, ſo gilt alſo

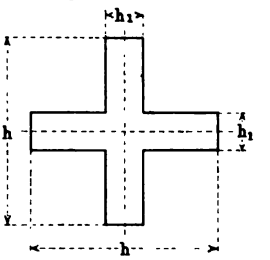
$$\mu P l = \frac{n}{4} k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \text{ bis } \frac{n}{3} k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}.$$

Bei Zahnrädern pflegt man $\frac{n}{4}$, bei Riemenscheiben $\frac{n}{3}$ einzuführen; bei Riemenscheiben ist $\mu \sim 1$.

Für Arme von rechteckigem Querschnitt ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{b h^2}{6}$, wobei h in der Ebene des Rades und b senkrecht dazu liegt.

Für einen Arm vom Kreuzquerschnitt der Fig. 1044, wie er bei Zahnrädern üblich ist, bei welchem h parallel zur Ebene des Rades und h_1 senkrecht dazu liegt, ist

Fig. 1044.



$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{h_1 h^3 + (h - h_1) h_1^3}{6 h},$$

wofür meist $\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim \frac{h_1 h^2}{6}$ gesetzt werden darf; bei dem oft verwendeten Wert $h = 5 h_1$ ist z. B. $\frac{h_1 h^2}{6} = \frac{h^3}{30}$ und demgemäß für $\frac{n}{4}$

$$h = \sqrt[3]{\frac{120 \mu P l}{n \,.\, k_b}},$$

wobei für Gußeisen im Mittel $k_b = 300$ Atm. ist.

Man verjüngt h von der Nabe zum Kranz etwa im Verhältnis 5 : 4. Für einen Arm von elliptischem Querschnitt (wie es bei Riemenscheiben üblich ist), dessen große Achse $2a$ der Ebene des Rades parallel ist, gilt $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{4} \pi b a^2 \sim \frac{4}{5} b a^2$; bei dem oft verwendeten Wert $b = 0{,}4\, a$ ist z. B. für $\frac{n}{3}$ und $\mu \sim 1$

$$a = \sqrt[3]{\frac{75 P l}{8 n k_b}},$$

wobei für Gußeisen im Mittel $k_b = 300$ Atm. ist.

Bei Bremsscheiben sind die Arme stärker zu machen, weil die Erwärmung des Kranzes hier in den Armen Zugspannungen hervorruft.

Für die Beurteilung der Beanspruchung der Arme durch aktuelle Energie hat man auf die Biegungsarbeit (vergl. S. 1071) zurückzugreifen.

Bei relativ großen Geschwindigkeiten ist die Centrifugalkraft zu berücksichtigen.

Bei vollen Scheiben sind die Ansätze von Nr. 43, 44, 45 auf S. 798 und S. 799 maßgebend, wobei für einen Achsenschnitt f natürlich

$$\frac{C}{f} \leqq k_1$$

sein muß.

Bei Rädern sind die Stellen B und B' in Fig. 1045 a besonders gefährdet, falls BB' aus einem Stücke besteht, sonst auch die Verbindungsstelle V, da BB' als ein, durch die Centrifugalkräfte gleichmäßig beanspruchter Balken mit beiderseitiger Einklemmung angesehen werden kann (vergl. S. 964).

Besteht ein Rad aus Stücken, welche durch eingelegte Platten und Niete oder Schrauben verbunden sind, so gilt für ein solches Stück gemäß Fig. 1045 b für den durch die Centrifugalkraft bewirkten Zug an der Verbindungsstelle MN oder $M'N'$

$$2\,Z\cos(90^0 - \alpha) = C.$$

Fig. 1045 a.

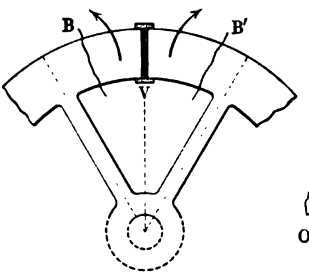
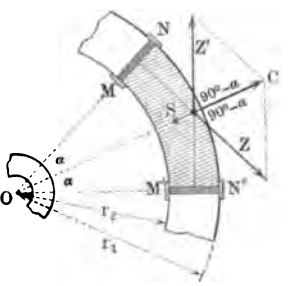


Fig. 1045 b.



Ist G das Gewicht des Schwungringes, so wiegt das betrachtete Stück $G \cdot \frac{2\alpha}{360^0} = G \cdot \frac{arc\,2\alpha}{2\pi}$ und hat also die Masse $\frac{G}{g} \cdot \frac{arc\,2\alpha}{2\pi}$. Demgemäß ist bei einer Winkelgeschwindigkeit γ für C gemäß der Formel $C = \gamma^2 . m . r$ zu setzen

$$C = \gamma^2 \cdot \frac{G}{g} \cdot \frac{arc\,2\alpha}{2\pi} \cdot \frac{2}{3}\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\frac{\sin\alpha}{arc\,\alpha}.$$

Man hat also

$$Z = \frac{1}{3}\frac{\gamma^2}{\pi} \cdot \frac{G}{g} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

d. h. $[Z]$ ist unabhängig von der Anzahl der Stücke, welche das Rad zusammensetzen.

Gemäß der Gleichung $Z = f . k_1$ wird für die Stelle MN oder $M'N'$ ein (ungeschwächter) Querschnitt

$$f = \frac{Z}{k_1}$$

erforderlich, der also sowohl für den Radkranz als auch für die eingelegte Platte vorhanden sein muß.

15. Achsen und Wellen. Die stabförmigen Körper, welche in Lagern als rotierende oder schwingende Träger von anderen Maschinenteilen, namentlich von Rädern verwendet werden, werden stets auf Biegung und Verdrehung beansprucht; sie werden als Achsen bezeichnet, wenn vorzugsweise ihre Biegung, als Wellen, wenn hauptsächlich ihre Verdrehung berücksichtigt werden muß.

Bei **senkrechter oder geneigter Stellung** einer Achse oder Welle ist jedenfalls mindestens ein, vom Gewicht herrührender Achsendruck vorhanden, so daß der Träger dann auf **Druck bezw. Knickung** beurteilt werden muß, abgesehen von seiner Beanspruchung auf Biegung und Verdrehung; bei wagerechter Lagerung braucht eine achsiale Beanspruchung nicht vorhanden zu sein. Beanspruchung auf **Schub** ist stets vorhanden.

Da für Achsen und Wellen in Bezug auf Druck bezw. Knickung und in Bezug auf Schub keine neuen Beziehungen auftreten, so setzen wir im Folgenden stets eine wagerechte Lagerung ohne achsiale Beanspruchung voraus.

Für wagerecht gelagerte **Achsen** gilt die **Festigkeitsgleichung der Biegung**

$$Mo = k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w},$$

wobei für den vollen Kreis als Querschnitt bei einem Durchmesser $d = 2r$

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim 0{,}1\, d^3$$

ist.

Da in den meisten Fällen die Richtung der Kraft vollständig wechselt, so ist k_b mit Rücksicht auf die Schwingungsfestigkeit zu wählen, also z. B. bei Schmiedeeisen $k_b = 300$ Atm. bis 400 Atm.

Da hier Gußeisen vielfach als Material verwandt wird, so ist zu beachten, daß k_b für dieses von der **Form des Querschnittes** abhängig ist und daß sich Stücke mit Gußhaut anders verhalten als solche ohne Gußhaut [1]).

Nach v. **Bach** gilt hier (vergl. S. 1314) folgende Tabelle:

Querschnitt	k_b bei Stücken ohne Gußhaut				k_b bei Stücken mit Gußhaut			
	$k_b : k_1$	a	b	c	$k_b : k_1$	a	b	c
Kreis	2,05	615	410	205	1,7	510	340	170
Rechteck	1,7	510	340	170	1,4	420	280	140
I-Profil bei mittleren Verhältnissen .	1,45	435	290	145	1,2	360	240	120

Die Reihen a), b), c) entsprechen bezw. Tragfestigkeit, Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit.

Für wagerecht gelagerte **Wellen** gilt zunächst die **Festigkeitsgleichung der Drehung**, welche für den vollen Kreis als Querschnitt bei einem Durchmesser $d = 2r$

$$Mo = k_d \frac{\pi}{16} d^3 \sim 0{,}2\, k_d\, d^3$$

lautet.

Für k_d sind je nach den Umständen die Werte zu wählen, welche der Tragfestigkeit, Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit entsprechen, doch

[1]) $k_s = t$ hat für Gußeisen mindestens den Wert k_1.

liegen Fälle, welche der Tragfestigkeit entsprechen, nur selten vor (bei Turbinen und Wasserrädern mit gleichmäßiger Kraftübertragung).

Bei Gußeisen ist k_d wenig davon abhängig, ob die Stücke eine Gußhaut haben oder nicht.

Nach v. Bach gilt (vergl. S. 1314) folgende Tabelle:

Querschnitt	$k_d : k_1$	k_d		
		a	b	c
Kreis	1,0	300	200	100
Kreisring	0,8	240	160	80
Quadrat	1,4	420	280	140
Langgestrecktes Rechteck	1,6	480	320	160

Die Reihen a), b), c) entsprechen bezw. Tragfestigkeit, Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit, doch empfiehlt es sich, Konstruktionen gemäß c) im allgemeinen zu vermeiden.

Sind N Pferdestärken bei einer Tourenzahl n zu übertragen, so gilt, da d in Centimetern gegeben ist,

$$75\,N = \frac{Mo}{100} \cdot \frac{2\,\pi n}{60}.$$

Für den vollen Kreis als Querschnitt ist z. B. demgemäß für $\pi^2 \sim 10$

$$d = \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_d} \cdot \frac{N}{n}}.$$

Wird die Welle erheblich auf Biegung beansprucht, so gilt gemäß S. 1156 für die gesamte Anstrengung

$$\bar{\sigma} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0 \tau)^2}$$

bei $\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d}$.

Unterscheidet man für den vollen Kreis als Querschnitt das biegende und das drehende Moment durch Mo_b und Mo_d, so ist $\sigma = \frac{Mo_b}{0{,}1\,d^3}$ und $\tau = \frac{Mo_d}{0{,}2\,d^3}$ und demnach die Anstrengung $\bar{\sigma}$ bei Ausnutzung des Materials ($\bar{\sigma} = k_b$) bestimmt durch

$$0{,}35\,Mo_b + 0{,}65\,\sqrt{Mo_b^2 + (\alpha_0\,Mo_d)^2} = 0{,}1\,k_b \,.\, d^3.$$

Dabei ist k_b fast nur der Schwingungsfestigkeit entsprechend zu beurteilen.

In der Praxis berücksichtigt man die Biegung bei Überschlägen nach der Verdrehungsformel, indem man in dieser statt k_d etwa die Hälfte seines Wertes einführt.

Für gewöhnliches Walzeisen (Schweißeisen) gilt $k_d = 240$ Atm., so daß bei kreisförmigem Querschnitt mit Rücksicht auf die Verdrehung

$$d = \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_d} \cdot \frac{N}{n}} = \sqrt[3]{1500 \cdot \frac{N}{n}}$$

ist; mit Rücksicht auf Verdrehung und Biegung setzt man im Überschlage in diesem Falle an

$$d = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{N}{n}}.$$

In gewissen Fällen bestimmt man die Abmessungen von Achsen und Wellen auch mit Rücksicht auf die zulässige Formänderung (vergl. S. 969).

Der Ansatz für die Durchbiegung richtet sich natürlich nach der Art der Belastung, für Mittelbelastung $[P]$ beträgt sie z. B. $\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$.

Eine größere Durchbiegung ist besonders gefährlich wegen der Winkelabweichungen an den Lagerstellen, am Sitze der Räder u. s. w., durch welche neben einem unruhigen Gange auch Heißlaufen der Zapfen und Lager und Anfressen der Gleitflächen eintreten kann.

Abgesehen von Wellen mit Kegelrädern, welche eine besondere Einschränkung der Durchbiegung verlangen, gilt als empirische Regel, daß die Winkelabweichung an den Lagerenden den Wert 0,001 nicht überschreitet.

Für den Fall der Mittelbelastung ist damit als Ansatz gegeben

$$0{,}001 \geqq \tfrac{1}{16}\frac{Pl^2}{E\mathfrak{T}r},$$

während die größte Durchbiegung (in der Mitte) den Wert $y_{max} = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r}$ hat. Demnach ist

$$0{,}001 \geqq \frac{3}{l} \cdot y_{max}$$

oder

$$y_{max} \leqq \frac{0{,}001 \,.\, l}{3},$$

d. h. für den Fall der Mittelbelastung darf die größte Durchbiegung höchstens $\frac{1}{3}$ mm auf 1 m Wellenlänge betragen.

Für den Fall der gleichmäßigen Belastung ergiebt sich fast dasselbe (0,3 mm statt $\frac{1}{3}$ mm).

Was die Verdrehung anlangt, so gilt nach einer älteren empirischen Regel ein viertel Grad Verdrehung für den laufenden Meter als zulässig. Bei einem kreisförmigen Querschnitt gilt für die Verdrehung $arc\,\varepsilon$ die Beziehung (vergl. S. 1095)

$$arc\,\varepsilon = \frac{Mo}{G \,.\, \frac{1}{32}\pi d^4} \sim \frac{10\,Mo}{G \,.\, d^4},$$

woraus bei einer Tourenzahl n für N Pferdestärken folgt bei 1 cm als Einheit

$$arc\,\varepsilon = \frac{2\,250\,000}{\pi \,.\, G} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{1}{d^4}.$$

Bei einem viertel Grad Verdrehung für den laufenden Meter ist hier $100 \,.\, arc\,\varepsilon = \frac{\frac{1}{4}}{360} \cdot 2\pi$ und demnach in Centimetern für Schmiedeeisen mit $G = 800\,000$ Atm.

$$d \sim 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Die entwickelte Formel ist bei der Übertragung kleinerer und mittlerer Drehungsmomente brauchbar, giebt aber bei der Übertragung größerer Drehungsmomente zu geringe Stärken, so daß jedenfalls außer dieser Gleichung stets auch noch die Festigkeitsgleichung herangezogen werden muß.

Für $arc\,\lambda = l \,.\, arc\,\varepsilon$ gilt allgemein

$$arc\,\lambda = 0{,}93\,\frac{N}{n} \cdot \frac{l}{d^4} \text{ für Schweißeisen mit } G = 770\,000$$

und

$$arc\,\lambda = 0{,}86\,\frac{N}{n} \cdot \frac{l}{d^4} \text{ für Flußeisen mit } G = 830\,000.$$

Aus der ersten Gleichung für $arc\,\varepsilon$ folgt noch in Verbindung mit $Mo = 0{,}2\,k_d \,.\, d^3$ die Beziehung

$$arc\,\varepsilon = 2\,\frac{k_d}{G} \cdot \frac{1}{d},$$

aus welcher der Zusammenhang von $arc\,\varepsilon$, k_d und d von Fall zu Fall beurteilt werden kann.

Gelegentlich bestimmt auch die, der Verdrehung entsprechende Formänderungsarbeit der Welle die Abmessungen. Für den vollen Kreis als Querschnitt ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau^2}{G} \cdot V.$$

Dabei ist auch hier (vergl. S. 871) darauf hinzuweisen, daß eine teilweise Verschwächung der Welle durch Eindrehung die Arbeitsfähigkeit relativ stark vermindert, während das übertragbare Moment dabei relativ wenig verändert wird.

Um für die zulässige Wellenlänge l einen Überschlag machen zu können, denkt man sich alle die Welle auf Biegung beanspruchenden Kräfte (Eigengewicht, Riemenspannung u. s. w.) durch eine gleichmäßige Belastung der Welle ersetzt, welche γ_1 kg für 1 ccm betragen mag; die Belastung beträgt dann $Q = \frac{\pi}{4}\,d^2 l \gamma_1$.

Für die Welle als Zweistützenträger lautet dann die Festigkeitsgleichung

$$\tfrac{1}{8}\,Q l = \sigma \cdot \frac{\pi}{32}\,d^3,$$

woraus

$$\sigma = \gamma_1 \frac{l^2}{d}$$

folgt.

Man hat dann als gesamte Anstrengung (vergl. S. 1156)

$$0{,}35\,\gamma_1 \frac{l^2}{d} + 0{,}65 \sqrt{\left(\gamma_1 \frac{l^2}{d}\right)^2 + 4\,(\alpha_0 \tau)^2}.$$

Darf diese bei Schmiedeeisen 300 Atm. betragen, so ist für

$$\alpha_0 = \frac{300}{1{,}3 \,.\, 240} \sim 1$$

und $\tau = 120$ Atm.

$$300 = 0{,}35\,\gamma_1 \frac{l^2}{d} + 0{,}65\,\sqrt{\left(\gamma_1 \frac{l^2}{d}\right)^2 + 4 \,.\, 120^2},$$

woraus

$$\frac{l^2}{d} = \frac{450 \,.\, 0{,}527}{\gamma_1}$$

folgt.

Für mittlere Verhältnisse hat man $\gamma_1 = 3\gamma$ zu setzen, falls γ das specifische Gewicht der Welle bezeichnet, so daß dann für Schmiedeeisen $\gamma_1 = 3 \,.\, 0{,}0079 = 0{,}0237$ und

$$\frac{l^2}{d} \sim 10\,000 \text{ bezw. } l \sim 100\sqrt{d}$$

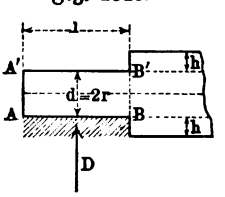
ist.

Gehört die Welle einem Wellenstrange an, so muß sie als beiderseits eingespannt angesehen werden ($\frac{1}{12} Ql$). In diesem Falle erhält man

$$l \sim 125\sqrt{d}.$$

16. Zapfen (vergl. S. 543 f.). Bei der Bestimmung der Abmessungen der Zapfen ist neben der Beanspruchung des Materials darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Pressung zwischen Zapfen und Lager das dazwischen liegende Schmiermaterial nicht verdrängt und daß die Wärme, welche der Reibungsarbeit entspricht, gehörig abgeleitet werden kann.

Fig. 1046.



Der cylindrische Tragzapfen (vergl. Fig. 1046) wird als ein Freiträger aufgefaßt, der bei BB' eingespannt ist. Liegt er auf dem Lager in AB gleichmäßig auf, so gilt bei einem Zapfendruck D gemäß der Festigkeitsgleichung

$$1) \quad \tfrac{1}{2} Dl = k_b \cdot \frac{\pi}{32} d^3 \sim 0{,}1\, k_b d^3.$$

Da senkrecht zu $[D]$ die Fläche ld vorhanden ist, so gilt für eine zulässige Pressung $\bar{k}$ für die Flächeneinheit

$$2) \quad D = \bar{k} \,.\, ld.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3) \quad \frac{l}{d} = \sqrt{0{,}2 \frac{k_b}{\bar{k}}}.$$

Dabei ist k_b unter Berücksichtigung der Verschiedenheit von Tragfestigkeit, Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit aus den Tabellen zu entnehmen, während für $\bar{k}$ von Fall zu Fall weitere Überlegungen nötig sind.

Im Mittel ist $\bar{k} = 150$ Atm. für gehärteten Stahl auf gehärtetem Stahl, 90 Atm. für gehärteten Stahl auf Bronze, 30 Atm. bis 40 Atm. für Schmiedeeisen auf Bronze u. s. w.

Man bestimmt $l : d$ gemäß Gleichung 3) und berechnet daraus gemäß Gleichung 2) die Werte von l und d.

Diese Werte sind noch zu prüfen in Bezug auf die Gefahr des Heißlaufens.

Die Wärme, welche bei der Reibung entsteht, fließt durch die Mantelfläche $l \,.\, d\pi$ und die Stirnfläche $\frac{\pi}{4} d^2$ (bezw. auch beide Stirnflächen) des Zapfens ab, so daß die Menge W der in einer bestimmten Zeit abfließenden Wärme proportional zu $\alpha \,.\, ld + \beta \,.\, d^2$ ist, wobei α und β durch Versuche festzustellen sind. Soll der durch Leitung und Strahlung erfolgende Abfluß der Wärme ausreichend sein, so muß demnach

$$\frac{W}{\alpha \,.\, ld + \beta \,.\, d^2}$$

unter einer erfahrungsmäßig zu bestimmenden Grenze bleiben. Man begnügt sich in der Praxis meist mit der Berücksichtigung der Mantelfläche, was $\beta = 0$ entspricht.

Nimmt man an, daß W der Arbeitsstärke der Reibung proportional ist, welche für den cylindrischen Zapfen (vergl. S. 550) bei einer Winkelgeschwindigkeit γ zu $D \,.\, r \,.\, f \,.\, \gamma$ bezw. $D \,.\, d \,.\, f \,.\, \gamma$ proportional ist, so muß also

$$\frac{Ddf\gamma}{ld} = \frac{Df\gamma}{l}$$

unter einer gewissen Grenze gehalten werden. Da γ proportional ist zur Tourenzahl n, so gilt dies auch für

$$\frac{Dfn}{l},$$

d. h. man hat

$$\frac{Dfn}{l} \leqq w' \quad \text{oder} \quad l \geqq Dn \cdot \frac{f}{w'}.$$

Die Zahl w' ist um so größer, je größer unter sonst gleichen Umständen die ableitbare Wärmemenge ist.

Setzt man $\frac{w'}{f} = w$, so gilt dasselbe von w, welches außerdem umgekehrt proportional zu dem Reibungskoeffizienten f wächst. Man gelangt so zu der Gleichung für l in Centimetern

$$4) \quad l \geqq \frac{Dn}{w},$$

in der D den Zapfendruck in Kilogramm und n die Tourenzahl (für die Minute) bezeichnet, während w erfahrungsmäßig festzustellen ist.

Daß Gleichung 4) nur von l abhängt und nicht auch von d, liegt an dem angenäherten Ansatze ($\beta = 0$).

Für Kurbelzapfen, bei welchen der Luftzug gleichmäßig kühlt, ist im Mittel

$$w = 35\,000 \text{ bis } 70\,000,$$

für Zapfen von Schwungradwellen, bei denen der kühlende Luftzug fehlt, ist

$$w = 15\,000 \text{ bis } 30\,000.$$

Die Betrachtung gilt auch für cylindrische Hohlzapfen von den Durchmessern d_1 und d_2. Bei diesen ist

$$1)\quad \tfrac{1}{2} Dl \sim 0{,}1\, k_b \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1}$$

$$2)\quad D = \bar{k} \,.\, l d_1,$$

während Gleichung 4) unverändert bleibt, da die Stirnflächen des Zapfens nicht berücksichtigt werden.

Die sogenannte Schulterhöhe h des Zapfens (vergl. Fig. 1046) ist erfahrungsmäßig in Centimetern durch

$$\tfrac{1}{16} d + 0{,}5 \text{ bis } \tfrac{1}{10} d + 0{,}5$$

gegeben für d in Centimetern.

Für kugelförmige (d) Tragzapfen aus gutem Stahl, welche als Kurbelzapfen auftreten, gilt bei Bronzelager ebenso

$$D = 40\, d^2,$$

und

$$d \geqq \frac{Dn}{w}$$

für $w = 30\,000$.

Der Durchmesser am Halse des Kugelzapfens wird meist zu $\frac{5}{8} d$ angenommen.

Für den ebenen Stützzapfen (Spurzapfen) (vergl. S. 552) fällt die Gleichung 1) des Tragzapfens fort, während 2) in der Form

$$D = \bar{k} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \sim 0{,}8\, \bar{k} d^2$$

bestehen bleibt, falls d den Durchmesser des Zapfens bezeichnet.

Für $\bar{k}$ sind im allgemeinen dieselben Werte zu nehmen wie für die Tragzapfen.

Der Gleichung 4) des Tragzapfens entspricht die Gleichung

$$d \geqq \frac{Dn}{w},$$

wobei $w = 40\,000$ bis $60\,000$ ist.

Für den ringförmigen Stützzapfen gilt Entsprechendes. Hier hat Gleichung 2) die Form

$$D = \bar{k} \cdot \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2) \sim 0{,}8\, \bar{k} (d_1^2 - d_2^2)$$

und Gleichung 4) die Form

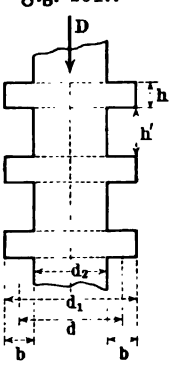
$$d_1 - d_2 \geqq \frac{Dn}{w},$$

wobei $\bar{k}$ und w dieselben Werte haben wie für normale Stützzapfen.

Mit Rücksicht auf die Wärmeabfuhr ist bei einem ringförmigem Stützzapfen $d_1 - d_2$ gemäß Gleichung 4) möglichst groß zu halten, während

anderseits die Reibungsarbeit, welche *Mo* proportional ist (vergl. S. 554), mit $d_1 + d_2$ wächst. Diese und andere Überlegungen haben dazu geführt, statt des gewöhnlichen ringförmigen Stützzapfens den Kammzapfen (vergl. Fig. 1047) einzuführen, bei welchem die gesamte Fläche für die Wärmeabfuhr bei relativ kleinen Werten von $d_1 + d_2$ relativ groß gehalten werden kann. Da einerseits aber der Abfluß der Wärme durch das umgebende Material gehindert wird und da es auch schwer ist, die gleichmäßige Berührung aller Ringflächen zu sichern, so muß man hier die Werte von $\bar{k}$ und w auf die Hälfte und noch weiter reduzieren, wodurch der Vorteil des Kammzapfens wiederum fraglich wird. Man verwendet daher Kammzapfen fast nur noch bei den Betriebswellen der Schraubenschiffe und bei Hebezeugen, weil hier ein anderer Vorteil des Kammzapfens überwiegt, nämlich bei Umkehrung der Druckrichtung von [*D*] wirksam zu bleiben. Da eine Ringfläche die Größe

Fig. 1047.



$$\tfrac{1}{4}\pi(d_1^2 - d_2^2) = \pi\frac{d_1 + d_2}{2}\cdot\frac{d_1 - d_2}{2}$$

hat, so ist für

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = d \quad \text{und} \quad \frac{d_1 - d_2}{2} = b$$

bei m Ringen für die Beurteilung der Pressung die Fläche $m \cdot \pi d b$ einzuführen, woraus

$$1)\quad D = \bar{k} \cdot m \cdot \pi d b$$

folgt.

Anderseits gilt in Bezug auf die Wärmeabfuhr

$$2)\quad mb \geqq \frac{Dn}{w}$$

und zwar ist w bei Luftkühlung etwa mit 20000 anzusetzen.

Erfahrungsmäßig setzt man $b \sim 0{,}1\, d_2$, woraus dann $d_1 \sim 1{,}2\, d_2$ und $d \sim 1{,}1\, d_2$ folgt, so daß nach Gleichung 1)

$$\frac{D}{0{,}35\, m \cdot \bar{k}} = d_2^2$$

folgt, während außerdem nach Gleichung 2) noch sein muß $0{,}1\, m d_2 \geqq \frac{Dn}{w}$.

Die Höhen h und h' sind zu berechnen, wie bei den Schrauben, indem man jeden Ringansatz als einen auf Biegung beanspruchten Freiträger von der Länge b, der Höhe h und der Breite $d_2\pi$ auffaßt, während für den ringförmigen Hohlraum $d_1\pi$ statt $d_2\pi$ eintritt.

Vielfach berechnet man den Ringansatz und den ringförmigen Hohlraum auch auf Schub, wobei die Fläche $d_1\pi h$ bezw. $d_2\pi h$ in Frage kommt.

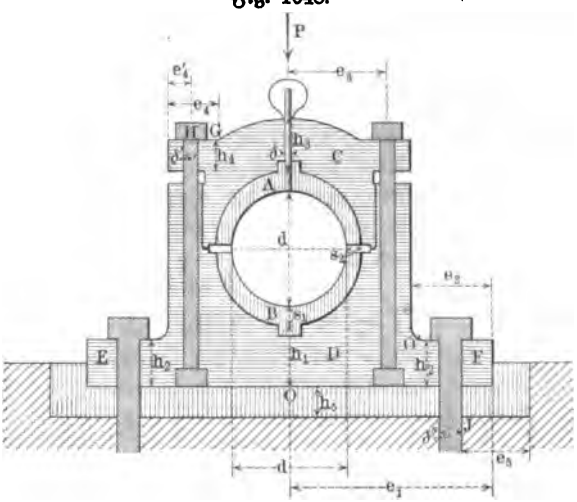
Für den kugelförmigen Stützzapfen der Fig. 397 gilt ebenso ($d = 2r$)

$$D = 0{,}5\,\bar{k} d^2 \text{ bis } 0{,}7\,\bar{k} d^2.$$

17. Lager. Die Zapfen wagerecht gelagerter Achsen und Wellen ruhen in Traglagern, die Zapfen senkrecht stehender Wellen in Spurlagern oder Kammlagern.

Die Beurteilung der Traglager geht am besten von dessen ursprünglicher, jetzt nur noch wenig benutzten Form aus, welche Fig. 1048 darstellt. Die Abmessungen (d und l) der cylindrischen Bohrung der Lagerschalen A und B sind durch die Abmessungen des aufzunehmenden Zapfens unmittelbar gegeben, während für die Stärke der Schalen (s_1 und s_2) und die Abmessungen ihres Randes bewährte empirische Formeln benutzt werden. Falls axiale Kräfte vorhanden sind, ist die Stärke des Schalenrandes besonders zu berechnen. Durch den Zapfendruck $P = \bar{k} l d$ bestimmen sich die Abmessungen der Schrauben für den Deckel C und für den Lagerfuß D u. s. w., während die seitlichen Dimensionen, wie e_1, e_2 u. s. w., dann dadurch unter Benutzung empirischer Formeln gegeben sind.

Fig. 1048.



Für die Höhe h_1 in der Mitte des Lagerkörpers ergiebt sich eine Gleichung, wenn man EF als einen frei aufgelagerten Balken auffaßt, der in der Mitte auf der Strecke d gleichmäßig durch P belastet ist, während die Reaktionen $\frac{1}{2}P$ sich beiderseits in der Mitte von OE und OF verdichten. Man hat dann für die Mitte die Festigkeitsgleichung der Biegung

$$\tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{4}d) = k_b \cdot \tfrac{1}{6} b_1 h_1^2,$$

falls b_1 die entsprechende Abmessung, senkrecht zur Ebene der Zeichnung ist, wobei $b_1 < l$ gehalten wird; dabei ist im Mittel $k_b = 360$ Atm.

Für die Höhe h_2 des Lagerfußes ergiebt sich eine Gleichung, wenn man $O'F$ als Freiträger auffaßt, für den $\frac{1}{2}P$ am Arme e_2 wirkt. Man hat dann

$$\tfrac{1}{2}P \cdot e_2 = k_b \cdot \tfrac{1}{6} b_2 h_2^2,$$

falls b_2 die entsprechende Abmessung, senkrecht zur Ebene der Zeichnung ist, wobei $b_1 < b_2 < l$ gehalten wird.

Für die Höhe h_3 in der Mitte des Deckels gilt ebenso

$$\tfrac{1}{2}P(e_3 - \tfrac{1}{4}d) = k_b \cdot \tfrac{1}{6}(b_1 - \delta) h_3^2,$$

wobei δ die mittlere Verschwächung für die Zufuhr des Öles bezeichnet.

Für die Höhe h_4 an der Flanke des Deckels hat man zwei Gleichungen zu benutzen. Für die Ansatzstelle G gilt

$$\tfrac{1}{2} P e_4 = k_b \,.\, \tfrac{1}{6} b_1 h_4^2,$$

während für die Stelle H, welche durch das Schraubenloch um δ' verschwächt ist, anzusetzen ist

$$\tfrac{1}{2} P e_4' = k_b \,.\, \tfrac{1}{6} (b_3 - \delta') h_4^2,$$

wobei b_3 die der Verjüngung nach außen entsprechende Breite, senkrecht zur Ebene der Zeichnung angiebt; natürlich ist der größere Wert von h_4 aus den beiden Gleichungen zu nehmen.

Die Stärke h_5 der Sohlplatte, deren Bruch etwa bei J zu erwarten ist, wird unter Berücksichtigung der Verschwächung ihrer Breite b_5 durch das Ankerloch (δ'') gegeben durch

$$P' \,.\, \tfrac{1}{2} e_5 = k_b \,.\, \tfrac{1}{6} (b_5 - \delta'') h_5^2.$$

Dabei ist $P' = b_5 e_5 \,.\, k_2$, falls k_2 die Pressung zwischen Lager und Sohlplatte bezeichnet; ferner ist $b_5 - \delta'' \sim \frac{2}{3} b_5$ und man hat für $k_2 = 10$ und $k_b = 360$ Atm. demnach etwa $h_5 = \frac{1}{3} e_5$.

Bei Rollenlagern ist die aufzunehmende Kraft proportional zu l und zu d, wenn l die tragende Länge der Rollen und d ihr Durchmesser ist. Für n Rollen hat man also

$$P = k \,.\, n \,.\, dl.$$

Dabei ist $k \leqq 25$ für Rollen aus Gußeisen bei Gußeisenplatten und $k \leqq 60$ für Rollen aus Stahl bei Stahlplatten.

Werden die Rollen durch Kugeln ersetzt, so ist statt der Druckfläche ld die Fläche $\frac{1}{4} \pi d^2$ einzuführen, so daß man hat

$$P = k \,.\, n \,.\, d^2.$$

Hier ist für Gußeisen zwischen ebenen Platten aus Gußeisen $k \leqq 2{,}5$; für Stahl zwischen ebenen Stahlplatten ist ebenso $k \leqq 6$. Werden die Kugeln in kreisbogenförmige Rinnen eingelassen, so ist in ersterem Falle $k \leqq 125$ und in letzterem Falle $k \leqq 300$.

Bei Spurlagern ist der Flächendruck unter einer gewissen Grenze zu halten, während die Kammlager sich zu ihrem Zapfen etwa wie eine Schraubenmutter zu ihrer Spindel verhalten (vergl. S. 1440). Dabei ist vorausgesetzt, daß sowohl bei Spurlagern als bei Kammlagern radiale Kraftkomponenten durch besondere Lagerkonstruktionen abgefangen werden.

18. Riemen- und Seilbetriebe. Zur Verbindung von Wellen, welche eine größere Entfernung haben, benutzt man Riemen und Seile, welche auf Scheiben laufen, die an den Wellen befestigt sind (vergl. S. 555 f.).

Die Spannkräfte $[P]$ und $[Q]$ in dem treibenden und in dem getriebenen Riemen oder Seile, von denen die übertragbare Kraft vom Werte $D = P - Q$ abhängt, werden fast immer bei Riemen durch einfaches Anspannen des spannungslos aufgelegten Riemens, bei Drahtseilen durch die Gewichte der hängenden Teile des Seiles geliefert, während bei Hanfseilen beide Arten der Spannung vorkommen und außerdem noch die Spannung durch besondere Spannrollen (vergl. Fig. 402 b).

Bei schnell laufenden Riemen oder Seilen ist der Einfluß der Centri-

petalkraft (vergl. S. 557) sehr bedeutend, so daß diese hier stets berücksichtigt werden muß.

a) Riemenbetriebe. Bei Berücksichtigung der Centripetalkraft gilt für Fig. 400 gemäß S. 557 bezw. für Fig. 1049

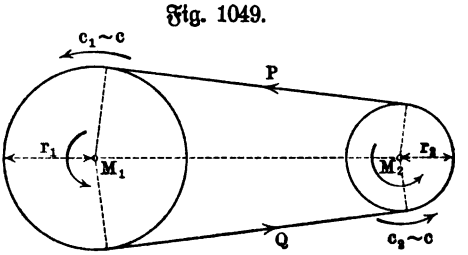
$$P - K = (Q - K)\, e^{f \cdot arc\,\alpha}$$

für

$$K = \frac{\delta \cdot q\,(r\gamma)^2}{g},$$

falls r der Radius der Scheibe und γ ihre Winkelgeschwindigkeit ist, α den vom Riemen auf der Scheibe umspannten Centriwinkel bezeichnet, q den Querschnitt des Riemens und δ das specifische Gewicht seines Materials bedeutet.

Fig. 1049.



Setzt man für $r\gamma$ die Umfangsgeschwindigkeit c der Scheibe ein, so ist $K = \frac{\delta \cdot q}{g} \cdot c^2$.

Da für den Riemenbetrieb der Fig. 1049 die Umfangsgeschwindigkeit beider Scheiben nahezu dieselbe (c) ist, so gilt gemäß S. 559 hier

$$P > Q \quad \text{und} \quad P - K < (Q - K) \cdot e^{f \cdot arc\,\alpha},$$

falls α den kleineren der beiden Umfangswinkel für M_1 und M_2 bezeichnet.

Bildet man $P - Q - K < (Q - K)\, e^{f \cdot arc\,\alpha} - Q$, so gilt für $P - Q = D$ gemäß S. 559

$$Q = \frac{D}{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1} + K + \eta' \quad \text{und} \quad P = \frac{D \cdot e^{f \cdot arc\,\alpha}}{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1} + K + \eta',$$

falls η' eine beliebig kleine positive Korrektur bezeichnet.

Entwickelt man aus der letzten Gleichung die zur Arbeitsleistung verfügbare Kraft $D = P - Q$, so ist

$$D = (P - K - \eta')\, \frac{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1}{e^{f \cdot arc\,\alpha}}.$$

Da $P > Q$ ist, so ist $\sigma_{max} = \frac{P}{q}$ die größte Durchschnittsspannung im Riemen, und man hat für die Grenze des Gleitens ($\eta' = 0$)

$$D = q \left(\sigma_{max} - \frac{\delta}{g} \cdot c^2\right) \frac{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1}{e^{f \cdot arc\,\alpha}} = q \cdot \bar{k}.$$

Versuche an Riemen auf gußeisernen Scheiben, die sich im Betriebe bewährt haben, geben für $c \leqq 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

$$\sigma_{max} = 22{,}5 \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad f = 0{,}25.$$

Faßt man δ als das Gewicht in Kilogrammen eines Riemens von 1 m Länge und 1 qcm Querschnitt auf, so ist für $\delta = 0{,}11$ und $c \sim 15$

$$\bar{k} \sim 10 \text{ für } \alpha \sim 160^0 \text{ und } arc\,\alpha = 2{,}8,$$
$$\bar{k} \sim 6{,}5 \text{ für } \alpha \sim 92^0 \text{ und } arc\,\alpha = 1{,}6.$$

Man hat also für die übliche Zahl $\alpha \sim 160^0$ und $arc\,\alpha = 2{,}8$ im Mittel

$$D = 10 \,.\, q,$$

während man bei besonders breiten und starken Riemen ($\sigma_{max} \sim 28$ Atm.) auf $D = 12{,}5 \,.\, q$ gehen darf.

Die Stärke der übertragbaren Arbeit $D \,.\, c$ ist demgemäß für $c = 1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $q = 1$ qcm im Mittel etwa $10 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = \frac{1}{7{,}5}$ P.S.

Bei N Pferdestärken ist $\frac{D \,.\, c}{75} = N$ und also im Mittel ($\bar{k} = 10$)

$$q = 7{,}5 \frac{N}{c} \quad \text{und} \quad N = \frac{cq}{7{,}5}.$$

Für eine Tourenzahl n hat man bei einem Durchmesser d in Metern

$$c = \frac{nd\pi}{60}$$

und demnach für $D = 10 \,.\, q$

$$N = \frac{Dc}{75} = \frac{qnd\pi}{450}.$$

Da Dc zu $c \,.\, \sigma_{max} - \frac{\delta}{g} \cdot c^3$ proportional ist, so erreicht die Arbeitsstärke Dc für $c = \sqrt{\frac{g \,.\, \sigma_{max}}{3\delta}}$ ihr Maximum, welches

$$\tfrac{2}{3} \sigma_{max} \frac{e^{f \,.\, arc\,\alpha} - 1}{e^{f \,.\, arc\,\alpha}} \sqrt{\frac{g \,.\, \sigma_{max}}{3\delta}} \cdot q$$

beträgt.

Für besonders gute Riemen ist $\sigma_{max} = 27{,}5$, woraus für $\delta = 0{,}11$ folgt $c = 28{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $(Dc)_{max} \sim 3{,}5$ P.S. für $arc\,\alpha = 2{,}8$ und $q = 1$ qcm.

Um den Druck des Riemens auf die Wellen zu beurteilen, bildet man die Spannung

$$S = \frac{P + Q}{2} = \tfrac{1}{2} D \frac{e^{f \,.\, arc\,\alpha} + 1}{e^{f \,.\, arc\,\alpha} - 1} + K + \eta'$$

für $\eta' = 0$.

Mit dieser Spannung muß der Riemen auf die ruhenden Scheiben aufgezogen werden, während sich im Betriebe das Glied $K = \frac{\delta \,.\, q}{g} \cdot c^2$ durch die Centrifugalkraft für die Wellen verringert, ja sogar (für $arc\,\alpha = \pi$) ganz fortfallen kann.

Man hat deshalb den Druck auf die Wellen im Betriebe in großer Annäherung als

$$2\,S = D \cdot \frac{e^{f \,.\, arc\,\alpha} + 1}{e^{f \,.\, arc\,\alpha} - 1}$$

anzusetzen, was für $arc\,\alpha = 2{,}8$ bei $f = 0{,}25$ zu $2\,S \sim 3\,D$ führt.

Das Übersetzungsverhältnis oder Umsetzungsverhältnis (vergl S. 205, Nr. 37) für Fig. 1049 bedarf einer Verbesserung wegen der Elasticität des Riemens. Wäre dieser nicht dehnbar, so hätten das treibende Rad M_1, dessen Winkelgeschwindigkeit γ_1 sei, und das getriebene Rad M_2, dessen Winkelgeschwindigkeit γ_2 sei, gleiche Umfangsgeschwindigkeiten c und es wäre $r_1\gamma_1 = r_2\gamma_2$, d. h.

$$\gamma_2 : \gamma_1 = \frac{r_1}{r_2}.$$

Thatsächlich sind die Umfangsgeschwindigkeiten von M_1 und M_2 etwas verschieden, so daß

$$\gamma_2 : \gamma_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{c_2}{c_1}$$

ist. Für den Teil des Riemens, in welchem die Kraft $[P]$ herrscht, ist die Spannung $\frac{P}{q}$ und die Dehnung $\varepsilon_1 = \frac{P}{q} \cdot \frac{1}{E}$, während diese für den anderen Teil des Riemens $\varepsilon_2 = \frac{Q}{q} \cdot \frac{1}{E}$ ist. Das Stück des Riemens, welches mit M_1 die Geschwindigkeit c_1 hat, besitzt also die Länge $l_1(1 + \varepsilon_1)$, falls l_1 seine Länge im ungedehnten Zustande ist, während das Stück des Riemens, welches mit M_2 die Geschwindigkeit c_2 hat, die Länge $l_2(1 + \varepsilon_2)$ besitzt, falls l_2 seine Länge in ungedehntem Zustande ist. Für zwei Stücke des Riemens bei c_1 und c_2 in Fig. 1049, welche in ungedehntem Zustande die Länge 1 hatten, gilt also

$$(1 + \varepsilon_1) : (1 + \varepsilon_2) = c_1 : c_2$$

und demnach ist

$$\gamma_2 : \gamma_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} \sim \frac{r_1}{r_2}(1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Für $\psi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{P - Q}{q} \cdot \frac{1}{E} = \frac{D}{q} \cdot \frac{1}{E} = \bar{k} \cdot \frac{1}{E}$ gilt also

$$\gamma_2 : \gamma_1 \sim \frac{r_1}{r_2}(1 - \psi).$$

Berücksichtigt man noch genauer die Spannungsverteilung in Riemen, so zeigt sich, daß ψ etwa verdoppelt werden muß, d. h. man hat

$$\psi \sim 2\bar{k} \cdot \frac{1}{E}$$

zu setzen.

Außerdem sind bei genauer Betrachtung die Mitten der Riemen statt der Umfänge der Scheiben bei c_1 und c_2 zu betrachten, so daß für eine ursprüngliche Riemenstärke s

$$\gamma_2 : \gamma_1 = \frac{r_1 + \frac{1}{2}s}{r_2 + \frac{1}{2}s}(1 - \psi)$$

zu setzen ist. Eine weitere Betrachtung der Spannungsverteilung zeigt, daß der starken Spannung P bei c_1 entsprechend statt $\frac{1}{2}s$ etwa $\frac{1}{3}s$ und der

schwachen Spannung Q bei c_2 entsprechend statt $\frac{1}{2}s$ etwa $\frac{2}{3}s$ anzusetzen ist, so daß schließlich

$$\gamma_2 : \gamma_1 = \frac{r_1 + \frac{1}{3}s}{r_2 + \frac{2}{3}s}(1 - \psi) = \frac{3r_1 + s}{3r_2 + 2s}(1 - \psi) \text{ für } \psi = 2\bar{k} \cdot \frac{1}{E}$$

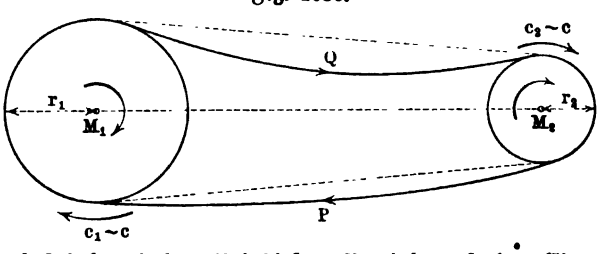
das verbesserte Umsetzungsverhältnis darstellt.

Bei $\bar{k} = 10$ hat man für neue Riemen mit $E = 1250$ Atm. etwa $\psi = 0{,}016$, für gebrauchte Riemen mit $E = 2250$ Atm. etwa $\psi = 0{,}009$ zu setzen.

Der betrachteten Dehnung des Riemens entspricht ein Gleiten desselben, er eilt auf der getriebenen Rolle im Sinne der Bewegung voraus und bleibt auf der treibenden Rolle im Gegensinne der Bewegung zurück (Klettern des Riemens).

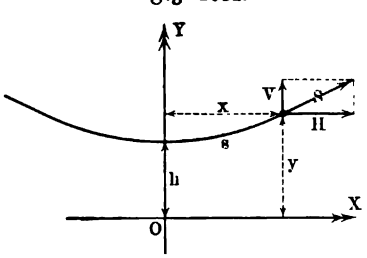
Die ganze Betrachtung gilt für das offene Getriebe der Fig. 1049, während für verschränkte Riemen u. s. w. weitere Betrachtungen nötig sind.

Fig. 1050.



b) **Drahtseilbetriebe.** Bei diesem Betriebe ruft das Eigengewicht des nach zwei Kettenlinien durchhängenden Seiles die erforderlichen Spannungen $[P]$ und $[Q]$ hervor. Man wählt dabei meist das untere Seil zum treibenden Seil (vergl. Fig. 1050), das obere zum getriebenen, weil in diesem Falle α relativ groß gemacht werden kann, wodurch auch $\bar{k}$ möglichst groß wird.

Fig. 1051.



Bei einem Querschnitt q hat das Gewicht des Seiles von 1 m Länge für ein specifisches Gewicht δ den Wert $q\delta$, so daß die Größe γ auf S. 355 u. f. durch $q\delta$ zu ersetzen ist.

Für die Kettenlinie der Fig. 1051 gilt nach S. 355 bei Ersatz von c durch h die Gleichung

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

während außerdem

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

ist, so daß auch $y^2 - s^2 = h^2$ gilt. Es ist ferner

$$H = h(q\delta) \quad \text{und} \quad V = s(q\delta),$$

woraus

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = q\delta\sqrt{h^2 + s^2} = y\,(q\delta)$$

folgt.

Hat h in Fig. 1050 für das untere Seil (P) und das obere Seil (Q) bezw. die Werte h_1 und h_2, so sind die entsprechenden Horizontalspannungen

$$H_1 = (q\delta)\,h_1 \quad \text{und} \quad H_2 = (q\delta)\,h_2.$$

Liegt $M_1 M_2$ in Fig. 1050 wagerecht, so ist bei den üblichen, flach hängenden Seilen der Unterschied der Werte von y gegen h so gering, daß für das untere Seil $S \sim H_1$ und für das obere Seil $S \sim H_2$ gesetzt werden darf, d. h. man hat

$$P \sim (q\delta)\,h_1 \quad \text{und} \quad Q \sim (q\delta)\,h_2.$$

Auch bei geneigter Lage von $M_1 M_2$ hat sich dieser Ansatz im allgemeinen bisher in der Praxis bewährt.

Für P und Q gelten die oben (vergl. S. 1505) bestimmten Werte, so daß für $\eta' = 0$ damit h_1 und h_2 gegeben ist. Zur Berechnung der Pfeilhöhe genügt die erste Annäherung (Parabel) auf S. 356, wonach für zusammengehörige Werte $x' = x$ und $y' = y - h$

$$y' = (x')^2 \cdot \frac{q\delta}{2H}$$

ist; ebenso genügt zur Berechnung von s die Beziehung

$$s = x' + \tfrac{2}{3}\frac{(y')^2}{x'}.$$

Für eine genauere Berechnung ist zu beachten, daß

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = \mathfrak{Cos}\,\frac{x}{h}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}$$

ist (vergl. S. 1124) und daß demnach die jetzt mehr und mehr in Benutzung kommenden Tafeln für die Hyperbelfunktion hier gute Dienste leisten.

Die Pfeilhöhe der Durchsenkung beträgt für 100 m Achsenabstand beim ziehenden Seilstücke etwa 1,5 m und beim gezogenen Seilstücke etwa 3 m, wonach die Höhen der Lagerstühle zu bemessen sind.

Die Längenänderung des Seiles beträgt für 100 m innerhalb einer Schwankung von 40° C. in Bezug auf die Mitteltemperatur bis zu $\pm 2{,}5$ cm, sie wird durch die Durchsenkung von selbst ausgeglichen.

Da die Drahtseile aus schraubenförmig gewundenen Litzen oder Strähnen aus Draht bestehen, welche sich wiederum schraubenförmig um eine meist aus Hanf hergestellte Mittellitze (Seele) winden, so ist deren theoretische Behandlung sehr unsicher.

Um hier für die Gleichung $D = q \cdot \bar{k}$, in welcher $\bar{k}$ proportional ist zu $\sigma_{max} - \frac{\delta}{g} \cdot c^2$, die Größe σ_{max} zu bestimmen, hat man neben der Zugspannung auch die Biegungsspannungen zu berücksichtigen. Für letztere be-

trachtet man ein Seilstück von der ursprünglichen Länge l gemäß Fig. 1052 als gebogenen Stab. Man hat hier für die äußere Faser

$$l_1 : l = (r + s) : (r + \tfrac{1}{2}s)$$

und also die Dehnung

$$\frac{l_1 - l}{l} = \frac{\frac{1}{2}s}{r + \frac{1}{2}s} \sim \frac{s}{2r}$$

und demnach die Spannung

$$\frac{s}{2r} \cdot E.$$

Für die innere Faser ergiebt sich derselbe Wert.

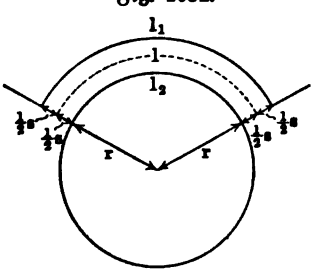
Zu dieser Biegungsspannung tritt noch die Zugspannung $\sigma_{max} = \frac{P}{q}$, so daß die gesamte Anstrengung durch

$$\sigma_{max} + \frac{s}{2r} \cdot E$$

bestimmt ist.

Für Seile aus Eisendraht ist die größte zulässige Anstrengung etwa 1050 Atm. und demnach für $E = 2\,000\,000$ Atm.

Fig. 1052.



$$\sigma_{max} = 1050 - \frac{s}{2r} \cdot 2\,000\,000.$$

Mit Rücksicht auf die Zusammensetzung des Seiles aus einzelnen Drähten vom Durchmesser d', ersetzt v. Bach die Größe s durch $\frac{5}{3}d'$, so daß die Formel

$$\sigma_{max} = 1050 - 750\,000\,\frac{d'}{2r}$$

entsteht.

Für den Mittelwert $\frac{d'}{2r} = \frac{1}{2000}$ ist dann $\sigma_{max} = 675$ Atm. und daraus folgt hier

$$D = q\left(675 - \frac{\delta}{g} \cdot c^2\right)\frac{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1}{e^{f \cdot arc\,\alpha}}.$$

Da die Seillänge in Metern und der Querschnitt in Quadratcentimetern gemessen wird, so bedeutet δ das Gewicht in Kilogrammen eines Seilstückes von 1 m Länge und 1 qcm Querschnitt, und zwar ist im Mittel für Seile aus Eisendraht $q\delta = 0{,}35\,s^2$, falls s die Stärke (Durchmesser) des Seiles in Centimetern bezeichnet.

Mit Rücksicht auf die Zusammensetzung des Seiles aus einzelnen Drähten ist statt des theoretischen Querschnittes $\frac{\pi}{4}s^2$ etwa $q = 0{,}33\,s^2$ einzuführen, so daß

$$D = \left(223 - 0{,}35\frac{c^2}{g}\right)\frac{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1}{e^{f \cdot arc\,\alpha}} \cdot s^2$$

ist.

Für $f = 0{,}25$ und $arc\,\alpha = 2{,}8$ hat man in Kilogrammen

$$D = \left(111{,}5 - 0{,}175\,\frac{c^2}{g}\right) \cdot s^2,$$

woraus für $c = 25\,\frac{\text{m}}{s}$ z. B. $D \sim 100\,s^2$ folgt.

Dabei ist $P = q \,.\, \sigma_{max} = 0{,}33\,s^2 \,.\, 675 \sim 223\,s^2$.

Auch bei diesem Betriebe findet ein Klettern des Seiles (vergl. S. 1508) statt, doch ist hier ψ so gering, daß die Verbesserung des Übersetzungsverhältnisses vernachlässigt werden darf.

c) Hanfseilbetriebe. Man verwendet hier für gute Seile zur Zeit die empirischen Formeln bei s in Centimetern

$$D = 3\,s^2 \text{ bis } 4\,s^2 \text{ für } 2r \geqq 30\,s \quad \text{und} \quad arc\,\alpha \geqq 2{,}5$$

und

$$D = 5\,s^2 \text{ bis } 6\,s^2 \text{ für } 2r \geqq 50\,s \quad \text{und} \quad arc\,\alpha \geqq 3{,}0$$

bei $c = 15\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bis $20\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Aus der Gleichung $D = \bar{k} \,.\, q$ bestimmt man wieder P, und zwar setzt man, weil die Seile in Keilnuten geführt werden, hier im Mittel

$$\frac{e^{f \,.\, arc\,\alpha} - 1}{e^{f \,.\, arc\,\alpha}} \sim \tfrac{1}{2}.$$

Man hat demnach

$$2\,D = \left(P - q\delta\,\frac{c^2}{g}\right),$$

woraus z. B. für $D = 4{,}5\,s^2$ und $c = 20\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $q\delta = 0{,}075\,s^2$ folgt

$$P \sim 12\,s^2.$$

Die Anordnung dieses Betriebes kann erfolgen wie beim Riemenbetrieb oder wie beim Drahtseilbetrieb, außerdem kann aber auch die Spannung durch Spannrollen (vergl. Fig. 402 b) hergestellt werden; im letzteren Falle wählt man $P = 5\,s^2$ für eine Spannrolle vom Durchmesser $30\,s$.

In Bezug auf die Abmessungen der Riemenscheiben und Seilscheiben muß auf die entsprechenden empirischen Regeln verwiesen werden (vergl. auch Räder).

19. Riemen (Gurte), Seile und Ketten zum Heben von Lasten u. s. w. (vergl. S. 587 u. f.). Für gute Riemen darf man erfahrungsmäßig 35 Atm. bis 40 Atm. als zulässige Anstrengung ansehen, für Hanfgurte 50 Atm. bis 80 Atm.

Da die theoretischen Untersuchungen in Bezug auf die Seile und Ketten ziemlich unsicher sind, so hat man auch für diese von Fall zu Fall die zulässige Anstrengung durch Versuche festzustellen.

Bezeichnet s die Stärke (Durchmesser des Seiles) in Centimetern und r den Radius der Rolle bezw. Trommel, so gilt für die Tragkraft P von Hanfseilen im Mittel

$$P \leqq 60\,s^2 \text{ bis } 80\,s^2 \text{ für } 2r > 10\,s.$$

Für die Beurteilung der Anstrengung von Drahtseilen gilt die Betrachtung auf S. 1508. Für gute Seile aus Eisendraht ist die zulässige Anstrengung etwa 1500 Atm., für Seile aus Stahldraht etwa 3000 Atm.; dabei ist auch das Gewicht des hängenden Seilstückes zu berücksichtigen.

Für Ketten pflegt man den Durchmesser s des Ketteneisens in die Versuchsreihen einzuführen und diese auf die Gesamtfläche der beiden etwaigen Bruchquerschnitte $\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} s^2\right)$ zu beziehen.

Für wenig angestrengte Ketten gilt im Mittel

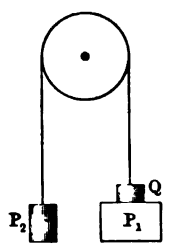
$$P = 1000\, s^2 \text{ bei } k_1 = 637 \text{ Atm.},$$

für stark beanspruchte ebenso

$$P = 500\, s^2 \text{ bei } k_1 = 318 \text{ Atm.}$$

Soll ein Seil bei beiderseitiger Belastung auf der Rolle durch Reibung haften, wie es z. B. bei den Fahrstühlen der Fall ist, so gilt gemäß Fig. 1053 Folgendes. Ist P_1 die Belastung der einen Seite (Fahrstuhl), welche durch Hinzufügung anderer Lasten (Menschen u. s. w.) bis auf $P_1 + Q$ wachsen kann, während P_2 die konstante Belastung (Gegengewicht) der anderen Seite ist, so gilt für $Q = 0$ gemäß S. 557

Fig. 1053.



$$P_2 \leqq P_1 \cdot e^{f \cdot \mathrm{arc}\,\alpha}$$

und für $Q > 0$

$$P_1 + Q \leqq P_2 \cdot e^{f \cdot \mathrm{arc}\,\alpha}.$$

Daraus folgt

$$Q \leqq P_1 (e^{2 \cdot f \mathrm{arc}\,\alpha} - 1).$$

Für $\mathrm{arc}\,\alpha = \pi$ und $f = 0{,}2$ hat man demnach

$$Q \leqq 2{,}5\, P_1 \quad \text{und} \quad P_2 \leqq 1{,}87\, P_1.$$

Meist ist $Q = 1{,}5\, P_1$ bis $2{,}0\, P_1$.

Um das Eigengewicht eines Seiles oder einer Kette zu berücksichtigen, hat man das Gewicht γ in Kilogramm für den laufenden Meter einzuführen. Bei einer Länge l ist dann für eine angehängte Belastung P' die gesamte Belastung $P' + l\gamma$, so daß z. B. für Seile mit $P = 75\, s^2$

$$P' + l\gamma = 75\, s^2$$

ist.

In Bezug auf die Abmessungen der Rollen und Trommeln muß auf die entsprechenden empirischen Regeln verwiesen werden (vergl. auch Räder), wobei zu bemerken ist, daß längere Trommeln ebenso wie Wellen (vergl. diese) auf Biegung und auf Verdrehung zu berechnen sind.

20. Kolben und deren Stangen. Während der Durchmesser des Kolbens von der Bohrung des Cylinders abhängt, in dem er läuft, und von der Dichtung, sind für die Stärke des Kolbens empirische Formeln maßgebend. Die Kolbenstange ist je nach den Umständen auf Zug oder Druck bezw. Knickung oder auf Zug und Druck bezw. Knickung zu berechnen, gelegentlich auch auf Biegung.

Bei der Berechnung auf Knickung wird sie als eine beiderseits geführte Stange angesehen, so daß die Knickbelastung

$$\overline{P} = \pi^2 \frac{E \mathfrak{T}r}{l^2}$$

beträgt; von diesem Werte gilt bei Beanspruchung gemäß Ursprungsfestigkeit $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{11}$ und bei Beanspruchung gemäß Schwingungsfestigkeit $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{22}$, falls die excentrisch wirkende Reibung des Kolbens nicht erheblich ist.

Für diese Reibung gilt bei Taucherkolben, deren Dichtung am Cylinder angebracht ist,

$$R_p = R_0 + F \,.\, p \,.\, f,$$

falls F die Reibungsfläche und p die Spannung ist, wobei der Reibungskoeffizient $f = 0{,}064$ bis $0{,}076$ im Mittel ist; dabei ist R_0, d. h. die Reibung für $p = 0$ durch Versuche von Fall zu Fall zu bestimmen.

Bei Scheibenkolben, deren Dichtung am Kolben selbst angebracht ist, ist die Reibung empirisch zu bestimmen.

Wagerecht gelagerte Kolbenstangen, deren Kolben relativ schwer ist, müssen auch auf Biegung berechnet werden. Man faßt sie als Zweistützenträger mit Mittelbelastung auf und bestimmt demnach die Durchbiegung d durch (vergl. S. 955)

$$d = \tfrac{1}{48}\left(P + \tfrac{5}{8} Q\right) \frac{l^3}{E \mathfrak{T}r},$$

falls P das Gewicht des Kolbens und Q das Gewicht der Stange bezeichnet, während l die Entfernung der Führungen (der beiderseits geführten) Kolbenstange ist.

Man stellt erfahrungsmäßig die Bedingung, daß d höchstens 1 mm bis 2 mm betragen darf.

21. Das Kurbelgetriebe (vergl. S. 754 u. f.). Gemäß den früheren Betrachtungen (vergl. z. B. Fig. 542 oder im Folgenden Fig. 1055) hat man für eine Kraft $[P]$ in Richtung der Kolbenstange beim Hingange folgende Tabelle:

Normaldruck auf die Gleitbahn (bei A)	$P tng\,\alpha$
Schubstangenkraft, zugleich Beanspruchung d. Kurbellagers	$S = \dfrac{P}{\cos\alpha}$
Tangentialkurbelkraft (bei B)	$T = \dfrac{P \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$
Normalkurbelkraft (bei B)	$N = \dfrac{P \cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$.

Bei Vernachlässigung aller Reibungen stimmt die Arbeit der Kolbenkraft $[P]$ überein mit der Arbeit der Tangentialkurbelkraft (T).

Bezeichnet man für einen bestimmten Zeitpunkt die Geschwindigkeiten des Kreuzkopfes und des Kurbelzapfens bezw. durch v_1 und v_2, so gilt demnach für ein Zeitelement τ

$$P v_1 \tau = T v_2 \tau,$$

d. h. es iſt

$$v_1 : v_2 = T : P = \sin(\alpha + \beta) : \cos\alpha.$$

Bezeichnen P_m und T_m die Mittelwerte von P und T, ſo iſt

$$P_m \cdot 2r = T_m \cdot r\pi$$

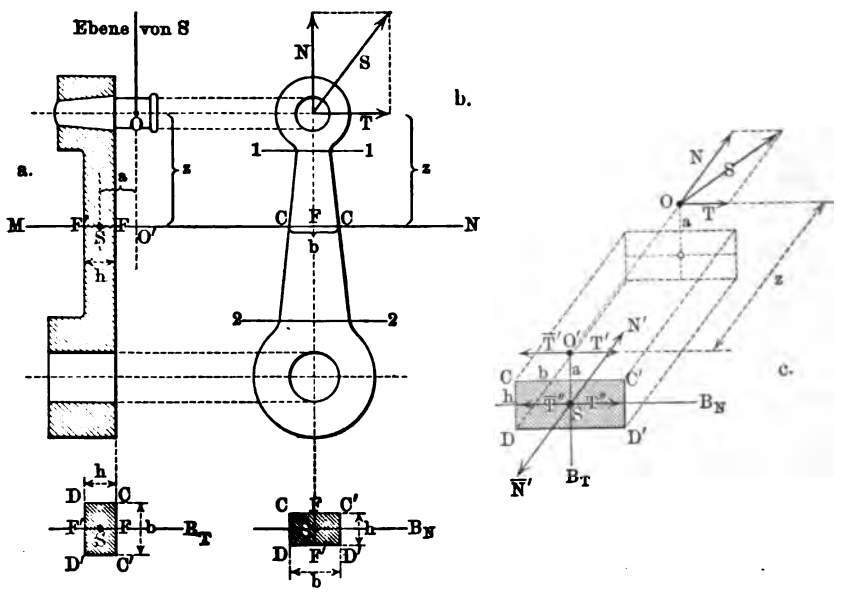
und alſo

$$P_m = \tfrac{1}{2}\pi \cdot T_m$$

und im Mittel

$$v_1 : v_2 = 2 : \pi.$$

Fig. 1054.



Für die Reibungsarbeiten findet man gemäß den Betrachtungen auf S. 760 u. f. (für den Hingang) angenähert Folgendes.

Reibungsarbeit auf der Gleitbahn . . . . $\mathfrak{A}_1 = \tfrac{1}{2}\pi f P_m \dfrac{r^2}{l}$

„ am Kreuzkopfzapfen (d) . . $\mathfrak{A}_2 = f P_m d \,.\, arc\,\alpha_{max}$

„ am Kurbelzapfen (d') . . . $\mathfrak{A}_3 = \tfrac{1}{2}\pi f P_m d'$

„ am Wellenzapfen (d'') . . . $\mathfrak{A}_4 = \tfrac{1}{2}\pi f P_m d''$.

Für $r : l = 1 : 5$ und $f = 0{,}06$ beträgt hiernach der geſamte Arbeitsverluſt durch Reibung 4 bis 5 Proz. im Mittel, d. h. etwa bei $d = 0{,}20\,r$, $d' = 0{,}25\,r$, $d'' = 0{,}45\,r$.

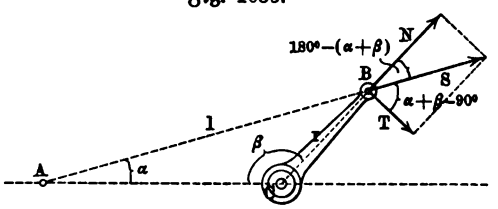
Da über die Schwungräder bereits S. 754 u. f. das Nötige bemerkt iſt, wozu in Bezug auf deren Arme auch S. 1491 zu vergleichen iſt, und da auch Kolben und Kolbenſtangen bereits beſprochen ſind, ſo handelt es ſich noch um die Kurbelarme und um die Schubſtangen.

Bei dem verwickelten Gepräge der Unterſuchung der Kurbelarme beſtimmt man zunächſt die Abmeſſungen der beiden Kurbelnaben, zeichnet dann

demgemäß die Kurbel im Hinblick auf die erfahrungsmäßig vorliegenden Formen auf, und prüft die Abmessungen der Zeichnung auf folgendem Wege.

Fig. 1054 a und b stellen Aufriß und Grundriß der Kurbel dar, während Fig. 1055 ihre Stellung im Getriebe zeigt. Die von der Schubstange AB übertragene Kraft $[S]$ wirkt für Fig. 1054 a in einer Ebene durch die Zapfenmitte, senkrecht zur Zeichenebene, und für Fig. 1054 b in einer Ebene, parallel zur Zeichenebene und oberhalb dieser. Zerlegt man $[S]$ in Fig. 1055 nach Normale und Tangente in die Komponenten $[N]$ und $[T]$, so ist in Fig. 1054 für einen Schnitt MN, welcher ein Rechteck von den Seiten b und h bestimmt, bei Verlegung von $[N]$ und $[T]$ nach S zu berücksichtigen,

Fig. 1055.



I a. die Normalspannung $\sigma = \frac{N}{bh}$,

b. die Biegungsspannung für das Moment Na mit B_N als Biegungsachse.

II a. die Schubspannung, welche T entspricht,

b. die Biegungsspannung für das Moment $T.\varepsilon$ mit B_T als Biegungsachse,

c. die Schubspannung für das verdrehende Moment $T\,.\,a$,

wie es Fig. 1054 c erläutert.

Die Spannung für I b hat das Maximum

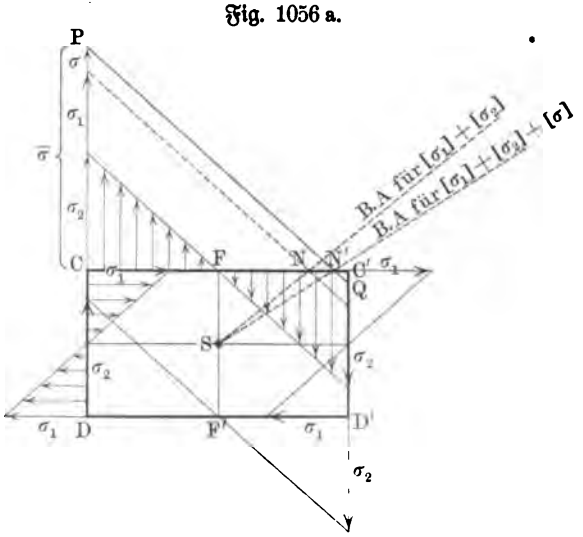
$$\sigma_1 = \frac{6\,N\,.\,a}{bh^2},$$

welchem die graphische Darstellung der Figur 1056 a entspricht; dabei hat man sich das Spannungsbild um CD um 90° gedreht zu denken. Die Spannung für II b hat das Maximum

$$\sigma_2 = \frac{6\,T\varepsilon}{b^2h},$$

welchem die graphische Darstellung der Figur 1056 a entspricht; dabei hat man sich das Spannungsbild um CC' um 90° gedreht zu denken.

Fig. 1056 a.



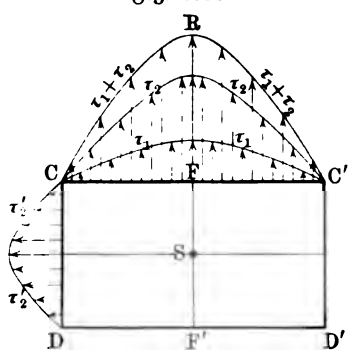
In C fällt thatsächlich $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ aufeinander, und es bleibt $[\sigma_1]$ für

CC' konstant, während $[\sigma_2]$ sich auf CC' gemäß dem Spannungsbilde von $[\sigma_2]$ verändert. Trägt man also $[\sigma_1]$ an $[\sigma_2]$ an, so giebt die punktierte Parallele der Fig. 1056 a das Spannungsbild für CC', welches wieder um CC' um 90° gedreht zu denken ist; in N hat die Spannung den Wert Null, so daß SN die Biegungsachse für das Moment ist, welches den beiden Biegungsmomenten gemäß I b und II b entspricht. Verlängert man $[\sigma_1] + [\sigma_2]$ noch um $[\sigma]$, entsprechend I a, so giebt PQ das Spannungsbild für CC', welches I a, I b und II b entspricht.

Dem Zugmaximum in C entspricht ein Druckmaximum in D' von gleichem Werte, und man überzeugt sich leicht auf Grund der Spannungsbilder, daß dieses die absoluten Maxima des ganzen Querschnittes sind.

Der Kraft $[T]$ von II a entspricht das Schubspannungsbild der Fig. 1056 b mit dem Maximum $\tau_1 = \frac{3}{2}\frac{T}{bh}$, während dem Momente Ta von II c für CC' das Spannungsbild mit dem Maximum $\tau_2 = \frac{9}{2}\frac{Ta}{h^2 b}$ und für CD das Spannungsbild mit dem Maximum $\tau_2' = \frac{9}{2}\frac{Ta}{hb^2}$ entspricht. Daraus ergiebt sich, daß die größte Schubspannung für die Mitte F von CC' auftritt; die Linie CRC' zeigt die Vereinigung beider Spannungsbilder. Man hat nun CF in Fig. 1056 a und CF in Fig. 1056 b in eine Anzahl gleicher Teile zu zerlegen und für jeden Teilpunkt die Werte der Normalspannung $\bar{\sigma}$ aus Fig. 1056 a und der Schubspannung τ aus Fig. 1056 b zu vereinigen, gemäß der Formel

Fig. 1056 b.



$$0{,}35 \cdot \bar{\sigma} + 0{,}65\sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2},$$

wobei hier $\alpha_0 = 1$ ist.

Man gelangt dabei für die Kurbelstellung der Fig. 1055 für verschiedene Schnitte, unter denen erfahrungsmäßig die Schnitte 1 und 2 in Fig. 1054 b eine ausschlaggebende Bedeutung haben, zu dem Ergebnis, daß das Maximum der gesamten Anstrengung auf FC meist in der Nähe von F liegt, gelegentlich aber auch (bei relativ langen Kurbelkörpern) bei C auftritt.

Für Flußstahl ist die zulässige Anstrengung hier etwa 600 Atm.

Die in Fig. 1055 gezeichnete Kurbelstellung, bei welcher $\beta \sim 105°$ für $l:r = 5:1$ ist, entspricht erfahrungsmäßig im allgemeinen bei konstantem Werte von $[P]$ der größten Anstrengung des Kurbelkörpers.

Ist die Veränderlichkeit von $[P]$ erheblich, so muß man verschiedene Stellungen der Kurbel gemäß obigem Verfahren untersuchen.

Bei schwachen Kurbeln hat man außerdem die Kurbel für die Totpunktslage ($P = N$, $T = 0$) auf Biegung und Zug oder Druck zu berechnen; dabei ist die Anstrengung durch

$$\frac{6Pa}{bh^2} + \frac{P}{bh} \leqq k$$

gegeben.

Die Abmessungen des Kurbelzapfens werden erfahrungsmäßig bestimmt; seine Einpassung ist besonders sorgfältig vorzunehmen.

Bei Schubstangen mit mittleren Geschwindigkeiten sind die Schäfte nur auf Zug und Druck bezw. Knickung zu berechnen. Da letztere besonders gefährlich ist, so hat man bei der Berechnung von der Gleichung

$$\overline{P} = \pi^2 \cdot \frac{E\mathfrak{T}r}{l^2}$$

auszugehen.

Stangen mit kreisförmigem Querschnitt verjüngen sich nach den beiden Enden zu im allgemeinen so, daß der Durchmesser am Kurbelzapfen $0{,}8\,d$ und am Kreuzkopf $0{,}7\,d$ ist, wenn d den Durchmesser in der Mitte bezeichnet. Man rechnet für d und wählt wegen der verhältnismäßig starken Verjüngung eine hohe Sicherheit und zwar gewöhnlich 25. Man hat dann für das Maximum der Stangenkraft $[P]$ den Ansatz

$$P = \tfrac{1}{25} \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot \frac{\pi}{64} d^4}{l^2}$$

oder, für $E = 2\,000\,000$,

$$P \sim 40\,000 \frac{d^4}{l^2}.$$

Bei großen Geschwindigkeiten folgen die wechselnden Beanspruchungen auf Zug und Druck so rasch aufeinander, daß es nicht zu einer Ausbildung von Formänderungen kommt, welchen Knickung entsprechen könnte, und infolgedessen kann man hier die Sicherheit erheblich herabsetzen; bei sehr langsamem Gange geht man mit der Sicherheit höher (30 statt 25).

Die so berechnete Abmessung bietet zugleich reichlich Sicherheit gegen Zug.

Ist der Querschnitt ein Kreisring (d_1 und d_2), so kann man die Abmessungen so bestimmen, daß einerseits Sicherheit gegen Knickung vorhanden ist und daß anderseits das Material für Zug ausgenutzt wird, da man über d_1 und d_2 verfügt.

Bei Stangen mit rechteckigem Querschnitt wird die Breite (b) konstant gehalten, während sich die Höhe verjüngt; letztere beträgt im Mittel $1{,}2\,h$ am Kurbelzapfen und $0{,}8\,h$ am Kreuzkopf, wenn h die Höhe in der Mitte bezeichnet, welche meist $1{,}75\,b$ bis $2\,b$ beträgt.

Man rechnet hier im Mittel mit der Sicherheit 15, so daß für Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$)

$$P \sim \frac{1\,000\,000}{9} \frac{b^3 h}{l^2}$$

anzusetzen ist, während für Holz ($E = 100\,000$)

$$P \sim \frac{50\,000}{9} \frac{b^3 h}{l^2}$$

ist.

Bei großen Geschwindigkeiten ist die Sicherheit erheblich geringer anzusetzen; so hat man z. B. bei Schubstangen von Lokomotiven, die sich im Betriebe bewährt haben, statt 15 Werte wie 3 und noch geringere festgestellt. Neben der Normalspannung $\frac{P}{f}$, welche der Knickung entspricht, ist bei schweren Stangen noch die Biegungsspannung, welche dem eigenen Gewichte (Q) entspricht, zu berücksichtigen; man sieht hierfür die Stange als prismatisch an, so daß der Ansatz

$$\tfrac{1}{8} Ql = \sigma \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$$

die entsprechende Spannung σ liefert.

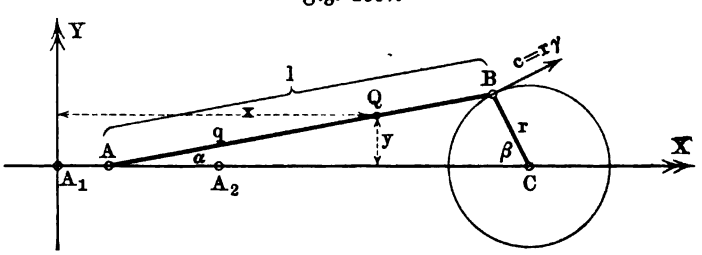
Außerdem liefern noch die Reibungen am Kreuzkopf und am Kurbelzapfen biegende Momente, von denen das erstere meist vernachlässigt werden kann. Bezeichnet man das Moment der Reibung für das eine Ende der Stange durch Mo, so entspricht dieser am anderen Ende eine Reaktion $Mo : l$, welche für einen Schnitt durch die Stange im Abstande z von letzterem Ende das biegende Moment

$$\frac{Mo}{l} \cdot z$$

hervorruft.

Bei großen Geschwindigkeiten sind noch die Effektivkräfte der Bewegung zu berücksichtigen (vergl. S. 767).

Fig. 1057.



Wir betrachten dazu gemäß Fig. 1057 einen beliebigen Punkt Q der Schubstange, der vom Kreuzkopf A den Abstand q hat. Seine Koordinaten sind

$$x = A_1A + q \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = q \cdot \sin\alpha.$$

Nach S. 754 und 755 ist in zweiter Annäherung

$$x = r(1 - \cos\beta) + \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\beta + q\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\beta\right)$$

und genau

$$y = q\frac{r}{l}\sin\beta.$$

Nach S. 757 ist die Beschleunigung in der Richtung der X-Achse bei einer konstanten Geschwindigkeit von B vom Werte $c = r\gamma$ gegeben als

$$j_x = r\gamma^2\left[\cos\beta + \frac{r}{l}\left(1 - \frac{q}{l}\right)\cos 2\beta\right].$$

Da die Veränderung von y einer einfachen Schwingung ($\sin\beta$) entspricht, so ist gemäß S. 172 ferner

$$j_y = -r\gamma^2 \cdot \frac{q}{l} \cdot \sin\beta.$$

Demnach ist gemäß Fig. 1058 die Beschleunigung in Richtung der Stangenachse AB

$$j_x \cos\alpha - j_y \sin\alpha$$

und die Beschleunigung in der Richtung QQ', senkrecht zur Stange

$$j_x \sin\alpha + j_y \cos\alpha.$$

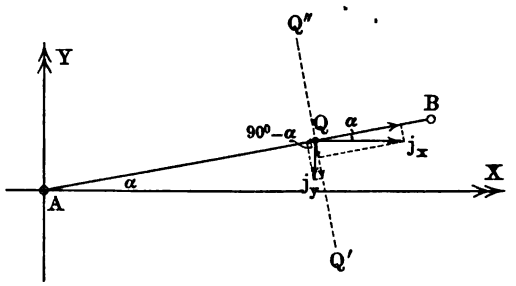
Durch die erste Beschleunigung ist die axiale Beanspruchung der Stange bestimmt, zugleich auch der sogenannte Massendruck des Gestänges, für den auf S. 758 der Näherungswert K entwickelt wurde.

Die zweite Beschleunigung ist nun in erster Annäherung ($\sin\alpha \sim 0$, $\cos\alpha \sim 1$) gegeben als j_y, d. h. als

$$r\gamma^2 \cdot \frac{q}{l} \sin\beta = \gamma^2 \cdot y.$$

Für die Beurteilung der Beanspruchung von Schubstangen reicht es aus, bei dieser ersten Annäherung stehen zu bleiben.

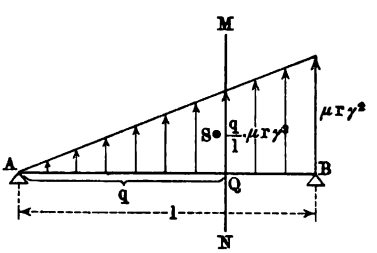
Fig. 1058.



Der entwickelten Beschleunigung entspricht die Kraft $\mu\gamma^2 y$, wenn μ die Masse eines materiellen Teilchens bei Q bezeichnet; als Effektivkraft der Bewegung hat diese Kraft die Richtung QQ', als Trägheitskraft die Richtung QQ''.

Bei einer prismatischen Schubstange, bei welcher μ für alle Teilchen längs AB denselben Wert hat, ist diese Kraft bei jeder bestimmten Stellung (β) für jedes Teilchen auf AB proportional zu q bezw. y, so daß ein Bild gemäß Fig. 1059 entsteht, welches für das Maximum dieser Kräfte $\left(\beta = 90^0 \text{ bezw. } y = q\frac{r}{l}\right)$ entworfen ist.

Fig. 1059.



Der Beanspruchung von AB entspricht also einer Dreieckslast.

Gehört μ zu einem Teilchen von der Stangenlänge $\frac{l}{n}$, so ist an der Stelle Q die Belastung für die Strecke $\frac{l}{n}$ gegeben als $\mu r\gamma^2 \cdot \frac{q}{l}$, d. h. sie würde für die Strecke 1 betragen

$$(n\mu)\frac{r\gamma^2}{l}\cdot\frac{q}{l},$$

wobei $n\mu$ die Masse $\frac{G}{g}$ der Stange ist.

Für die Berechnung der Stange auf Biegung gilt also das Bild der Fig. 1060, dem die Gesamtbelastung

$$\left(\frac{G}{g}\frac{r\gamma^2}{l}\right)\frac{l}{2}=\tfrac{1}{2}\frac{G}{g}r\gamma^2$$

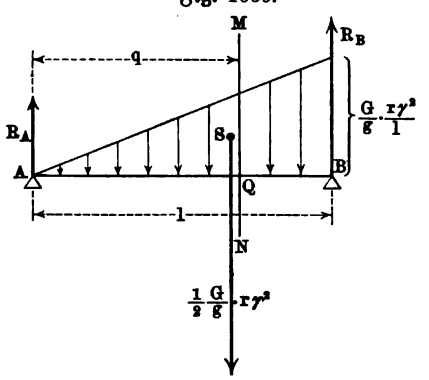
entspricht, während

$$R_A=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\frac{G}{g}r\gamma^2\right)\quad\text{und}\quad R_B=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\frac{G}{g}r\gamma^2\right)$$

ist, wodurch die Beanspruchung des Kreuzkopfes A und des Kurbelzapfens B bestimmt ist.

Nach S. 1008 tritt das Maximalmoment für $q=0{,}5774\,l$ ein und hat den Wert

Fig. 1060.



$$\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}1283\,r\gamma^2\frac{G}{g}l\sim\tfrac{1}{16}r\gamma^2\frac{G}{g}l,$$

so daß es angenähert einer gleichmäßigen Belastung der Stange AB durch $\frac{1}{2}r\gamma^2\frac{G}{g}$ entspricht. Diesem Maximalwerte entspricht die Spannung

$$\sigma=\frac{\frac{1}{16}r\gamma^2\frac{G}{g}l}{\frac{\mathfrak{T}r}{w}}.$$

Ersetzt man die Winkelgeschwindigkeit γ durch die Tourenzahl n, so ist $\gamma=\frac{n\pi}{30}$ einzuführen, und man hat für $\pi^2\sim 10$ und $g\sim 1000\,\text{cm}:\text{sec}^2$

$$\sigma=\frac{\left(\frac{n}{1200}\right)^2 rGl}{\frac{\mathfrak{T}r}{w}}.$$

Für rechteckige Querschnitte ist bei einem spezifischen Gewichte 0,008 für Centimeter und Kilogramm

$$G=0{,}008\,bhl\quad\text{und}\quad\frac{\mathfrak{T}r}{w}=\tfrac{1}{6}bh^2.$$

Ist die Schubstange nicht prismatisch, so hat man die Stange in Elemente zu zerlegen und für ein Element bei Q von der Länge $\lambda=\frac{1}{n}l$ und dem mittleren Querschnitt f bei einem spezifischen Gewicht δ die Kraft

$$\mu r\gamma^2\frac{q}{l}=\frac{(f\lambda\delta)}{g}r\gamma^2\frac{q}{l}$$

zu bilden und senkrecht zu AB in Q aufzutragen.

Diese Kraft stellt die Belastung für die Länge $\lambda = \frac{1}{n} l$ dar, so daß der Länge 1 in Q die Belastung

$$\left(\frac{f\delta \,.\, 1}{g}\right) r\gamma^2 \frac{q}{l}$$

entspricht.

Für eine bestimmte Stangenform ist f rechnerisch oder graphisch als Funktion $f(q)$ von q gegeben, so daß die Belastung

$$\frac{\delta}{g} \frac{r\gamma^2}{l} \cdot q f(q)$$

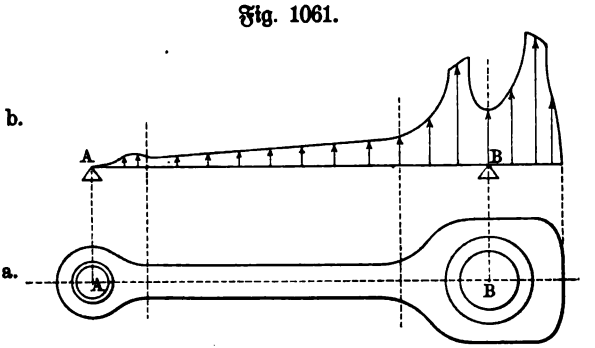
auf AB aufgetragen werden kann; für einen konstanten Querschnitt ist $f = f(q)$ eine Konstante und $f \,.\, l \,.\, \delta = Q$, so daß man Fig. 1060 wieder erhält.

Für die Praxis genügt es meist, die Stangenlänge in Centimeter zu teilen und mit dem mittleren Querschnitt φ jedes Stückes für dieses als Belastungsordinate

$$\frac{\varphi\delta}{g} r\gamma^2 \,.\, \frac{q}{l}$$

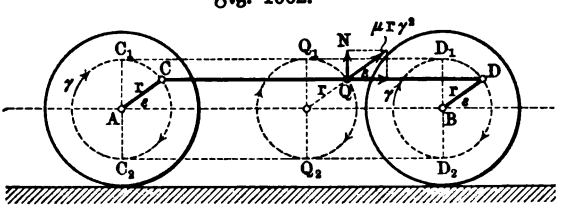
zu bilden.

Fig. 1061.



Für die Schubstange der Fig. 1061 a erhält man so z. B. die Belastungsfläche der Fig. 1061 b, aus welcher dann durch Krafteck und Seileck auf graphischem Wege leicht die Beanspruchung der Stange bestimmt werden kann. Die Fläche über AB in Fig. 1061 b stellt die Centrifugalkraft der ganzen Stange dar, und zwar wird durch den Schwerpunkt der Fläche deren Lage gegeben.

Fig. 1062.



Wir betrachten noch die Kuppelungsstange CD zwischen zwei Treibrädern A und B einer Lokomotive, gemäß Fig. 1062. Abgesehen von der Verschiebung mit dem Fahrzeuge, besteht die Bewegung jedes Punktes Q von CD in einer kreisförmigen (r) Verschiebung. Für ein Massenteilchen μ bei Q ist demnach bei einer Winkelgeschwindigkeit γ die Effektivkraft der Bewegung $[\mu\gamma^2 r]$, von welcher eine Komponente vom Werte $\mu\gamma^2 r \cos\varepsilon$ in die Achse der Stange fällt, während eine Komponente vom Werte $\mu\gamma^2 r \sin\varepsilon$ senkrecht zu dieser steht. Die Gegenkraft QN von letzterer Komponente wirkt auf Biegung, und demgemäß ist die Beanspruchung auf Biegung ein Maximum für die Stellungen ($\varepsilon = 90^0$

bezw. 270°) der Stange, welche durch $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ bezeichnet sind. Für $C_1 D_1$ vermindert die Biegung durch das Eigengewicht die Biegung durch die Trägheitskräfte, während sich für $C_2 D_2$ beide Einwirkungen verstärken.

Bei einer prismatischen Stange hat also für $C_2 D_2$ die Belastungsordinate, welche den Trägheitskräften entspricht, für jede Stelle Q den Wert $\frac{G\gamma^2 r}{gl}$, falls G das Gewicht der Stange ist; zu dieser gleichmäßigen Belastung kommt noch die gleichmäßige Belastung durch das Gewicht G selbst.

22. Cylinder und Röhren. Bei der Berechnung der Pumpencylinder, Preßcylinder, Dampfcylinder u. s. w. finden die Formeln für plattenförmige Körper (vergl. S. 1241 u. f.) unmittelbar Anwendung, wobei gelegentlich mit Rücksicht auf diesen oder jenen Umstand eine erfahrungsmäßig gebotene Verbesserung der Formeln vorzunehmen ist.

So pflegt man z. B. bei nicht ausgebohrten Pumpencylindern aus Gußeisen die Wandstärke, welche Formel Nr. 521 a) liefert, noch um 0,3 cm bis 0,6 cm zu vergrößern, um für die Höhlung einen gewissen Spielraum zu behalten.

Da Formel Nr. 521 a) bei relativ kleinen Werten der Spannung im Innern für die Wandstärke Werte liefert, welche mit Rücksicht auf Herstellung, Fortschaffung und Aufstellung der Cylinder ungenügend sind, so schreibt man den Konstruktionen außerdem erfahrungsmäßig eine Mindeststärke von $\frac{1}{50} d_2 + 1$ cm bis $\frac{1}{40} d_2 + 1{,}2$ cm vor, falls d_2 den inneren Durchmesser in Centimetern bedeutet.

Dabei beträgt k_1 für Gußeisen etwa 200 Atm.

Für gußeiserne Pumpencylinder, welche ausgebohrt werden sollen, schlägt man zur Wandstärke noch etwa 0,5 cm bis 1 cm zu, um nach der Abnutzung ein wiederholtes Ausbohren für weiteren Betrieb zu ermöglichen.

Dabei ist k_1 für Stahlguß etwa 500 Atm., während die Wandstärke mindestens 1,5 cm beträgt.

Für Preßcylinder gilt Entsprechendes, wobei für Gußeisen und Bronze $k_1 = 300$ Atm. bis 600 Atm., für Schweißeisen 900 bis 1800 Atm., für Stahlguß 1000 Atm. bis 1200 Atm. zu nehmen ist.

Für Dampfcylinder setzt man erfahrungsmäßig die Wandstärke als $\frac{1}{50} d_2 + 1{,}3$ cm bis $\frac{1}{40} d_2 + 1{,}5$ cm an, wenn d_2 den inneren Durchmesser in Centimetern bedeutet.

Für Leitungsrohre aus Gußeisen, Schmiedeeisen, Stahl u. s. w. gilt Entsprechendes, wozu die gebräuchlichen Tabellen zu vergleichen sind.

23. Gerade Biegungsfedern. Als gerade Biegungsfeder kann zunächst ein prismatischer Freiträger mit rechteckigem Querschnitt (b, h) dienen, für welchen bei Endbelastung (P) die Durchbiegung zunächst (vergl. S. 945)

$$d = \tfrac{1}{3} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}\mathrm{r}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{T}\mathrm{r} = \tfrac{1}{12} b h^3$$

ist.

Da nach der Festigkeitsgleichung $Pl = k_b \cdot \frac{bh^2}{6}$ ist, so hat man auch

$$d = \tfrac{2}{3} \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E}.$$

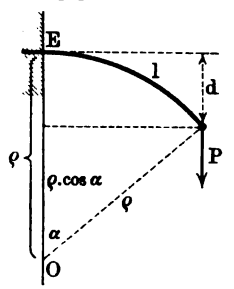
Die Formänderungsarbeit, welche hier als **Federungsarbeit** bezeichnet wird, ist (vergl. S. 1072) für ein Volumen V gegeben als

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} Pd = \tfrac{1}{18} \frac{k_b^2}{E} \cdot V.$$

Um das Material auszunutzen, kann man die **Rechteckfeder** bei Erhaltung ihrer Höhe in eine Form gleicher Spannung überführen, wobei man zu der sogenannten **Dreiecksfeder** (vergl. Fig. 692) gelangt.

Da sich diese nach dem **Kreisbogen** (vergl. S. 975) durchbiegt, so gilt gemäß Fig. 1063

Fig. 1063.



$$d = \varrho - \varrho \cos\alpha = 2\varrho \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

während anderseits $l = \varrho \cdot arc\,\alpha$ ist.

Bei den geringen Formänderungen, welche in der Technik zulässig sind, ist

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sim arc \frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2} \frac{l}{\varrho}$$

und demnach hat man, da $\varrho = \frac{E\mathfrak{T}r}{Mo}$ ist,

$$d = \tfrac{1}{2} \frac{l^2}{\varrho} = \tfrac{1}{2} \frac{l^2 . Mo}{E\mathfrak{T}r}\ ^{1}).$$

Mit Rücksicht auf die Festigkeitsgleichung $Mo = k_b \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ gilt auch

$$d = \tfrac{1}{2} \frac{l^2 k_b}{Ew} = \frac{l^2}{h} \cdot \frac{k_b}{E}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt unmittelbar $2w = h = \frac{l^2 k_b}{Ed}$, so daß h gegeben ist.

Aus der Gleichung $d = \frac{1}{2} \frac{l^2 Mo}{E\mathfrak{T}r}$ folgt für die Ansatzstelle, deren Breite b_0 sein mag, mit $Mo = Pl$ zunächst

$$d = \tfrac{1}{2} \frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}r_0}$$

und, da $\mathfrak{T}r_0 = \frac{1}{12} b_0 h^3$ ist,

$$b_0 = \frac{6\,Pl^3}{Edh^3} = \frac{6\,Pl}{k_b h^2}.$$

Außerdem ist $h_0 = h$.

Die **Federungsarbeit** beträgt für ein Volumen V

[1]) Die Formel folgt auch gemäß S. 945 aus $E\mathfrak{T}r\,d = \frac{1}{2}(Pp)l^2$ in Verbindung mit $\varrho Mo = E\mathfrak{T}r$ und $Mo = Pp$.

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} Pd = \tfrac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} \cdot V.$$

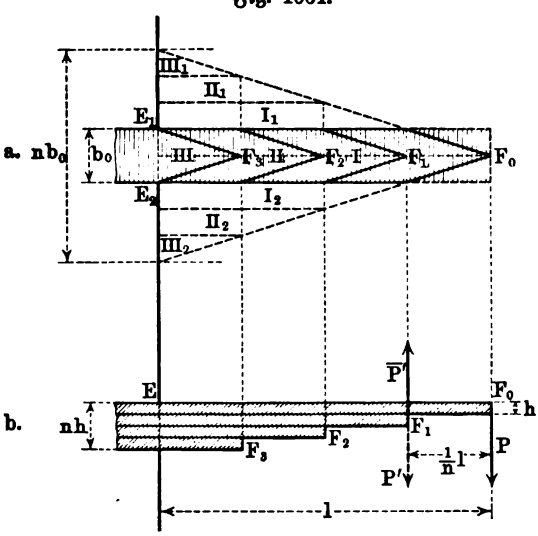
Legt man n unter sich kongruente Rechtecksfedern oder Dreiecksfedern aufeinander, so entstehen zusammengesetzte Biegungsfedern von der Höhe nh und der Breite b bezw. b_0.

Ist die Tragkraft für eine Rechtecksfeder P, wobei $Pl = k_b \cdot \frac{bh^2}{6}$ ist, so ist sie für n solche Federn

$$nP = \tfrac{1}{6} \frac{k_b (nb) h^2}{l},$$

d. h. die zusammengesetzte Feder von der Höhe nh und der Breite b verhält sich wie eine Feder von der Höhe h und der n-fachen Breite (nb).

Fig. 1064.



Entsprechendes gilt bei Dreiecksfedern für die Breite (b_0) der Ansatzstelle. Man kann also umgekehrt Federn von allzu großer Breite durch n aufeinander gelagerte Federn ersetzen.

Dabei hat die Dreiecksfeder vor der Rechtecksfeder den Vorzug, eine Form gleicher Spannung zu sein und sich nach dem Kreisbogen durchzubiegen; durch letzteres wird ein Klaffen zwischen den einzelnen Blättern einer zusammengesetzten Feder vermieden.

Statt dessen kann man eine Dreiecksfeder von der Breite nb_0 auch auf andere Weise in n einfache Federn von der Breite b_0 für die Bildung einer zusammengesetzten Biegungsfeder zerlegen. Bildet man gemäß Fig. 1064 a aus den Teilen I_1 und I_2 den aus einem Stück bestehenden Teil I, aus den Teilen II_1 und II_2 den aus einem Stück bestehenden Teil II u. s. w., so bilden die Blätter $E_1F_0E_2$, $E_1F_1E_2$, $E_1F_2E_2$ u. s. w. eine zusammengesetzte Biegungsfeder, für welche $F_0F_1 = F_1F_2 = \cdots = \frac{1}{4} l$ ist.

Der Teil zwischen F_0 und F_1 stellt eine Dreiecksfeder von der Basisbreite b_0 und der Länge $\frac{1}{n} l$ dar, für welche

$$P \cdot \frac{1}{n} l = k_b \cdot \frac{b_0 h^2}{6}$$

ist, während $\varrho = \frac{E \mathfrak{T}r}{Mo}$ den Wert

$$\varrho = n \cdot \frac{E b_0 h^3}{12 Pl}$$

hat. Das Rechteck zwischen F_1 und E_1E_2, welches mit dem Dreieck zwischen F_0 und F_1 das oberste Blatt bildet, erhält gemäß Fig. 1064 b von dem darunter gelegenen Blatte den Reaktionsdruck $[\overline{P}']$, so daß es durch ein Kräftepaar vom Werte $\frac{Pl}{n}$ gefaßt und demnach auch nach einem Kreisbogen durchgebogen wird, für dessen Radius die Gleichung $\varrho = \frac{E\mathfrak{T}r}{Mo}$ wieder den Wert

$$\varrho = n \cdot \frac{Eb_0h^3}{12Pl}$$

liefert.

Demnach ist die Biegungslinie für das ganze obere Blatt ein Kreisbogen vom Radius $n \cdot \frac{Eb_0h^3}{12Pl}$.

Auf das zweite Blatt wirkt $[P']$ vom Werte P ebenso wie $[P]$ auf das erste Blatt u. s. w., und demnach sind die Biegungslinien für alle Blätter Kreisbogen von dem oben bezeichneten Radius.

Bei Ausführungen pflegt man das obere Blatt, wie in Fig. 1064 a punktiert angedeutet ist, ohne Abschrägung auszuführen, um dessen Verbindung mit anderen Konstruktionsteilen besser bewirken zu können; infolgedessen biegt sich der vordere (nunmehr rechteckige) Teil dieses Blattes nicht nach einem Kreisbogen durch, was aber von keinem Nachteil ist, da dieser Teil sich ja an keinen anderen Teil anzuschmiegen hat.

Für gewisse Zwecke vereinigt man zwei Dreiecksfedern mit ihren Breitseiten (b_0) zu einer zweischenkligen Feder, welche in der Mitte durch $2P$ belastet wird. Dabei giebt man der Feder meist eine gewisse Sprengung, d. h. man krümmt ihre Mittellinie im unbelasteten Zustande ein wenig, und zwar so, daß diese Krümmung durch die Belastung verringert wird; infolgedessen handelt es sich dann, streng genommen, um eine Feder mit gekrümmter Mittellinie, doch ist die Verwendung der Theorie des geraden Stabes mit Rücksicht auf die geringe Krümmung durchaus zulässig.

Entsprechendes gilt auch für zusammengesetzte Federn, welche gemäß Fig. 1064 gebildet sind. So stellt z. B. Fig. 1065 (a. f. S.) eine Tragfeder für Eisenbahnfahrzeuge dar, welche als zweischenklige zusammengesetzte Feder gemäß Fig. 1064 gebildet ist. Hier zerlegt sich $[Q]$ in die Komponenten vom Werte $P = Q\cos\alpha$ und $Q\sin\alpha = P\,tng\,\alpha$.

Ist p_0 der Pfeil für die Sprengung und d die Durchbiegung der Feder durch $[2P]$, so ist der Pfeil p der belasteten Feder bestimmt als $p = p_0 - d$.

Man hat für die Mitte der Feder in Bezug auf die linke oder rechte Seite $Mo = Pl + p\,.\,P\,tng\,\alpha = P(l + p\,tng\,\alpha)$ und demnach gemäß der Festigkeitsgleichung zur Bestimmung der Tragkraft

$$P(l + p\,tng\,\alpha) = n\,.\,k_b\frac{b_0h^2}{6}.$$

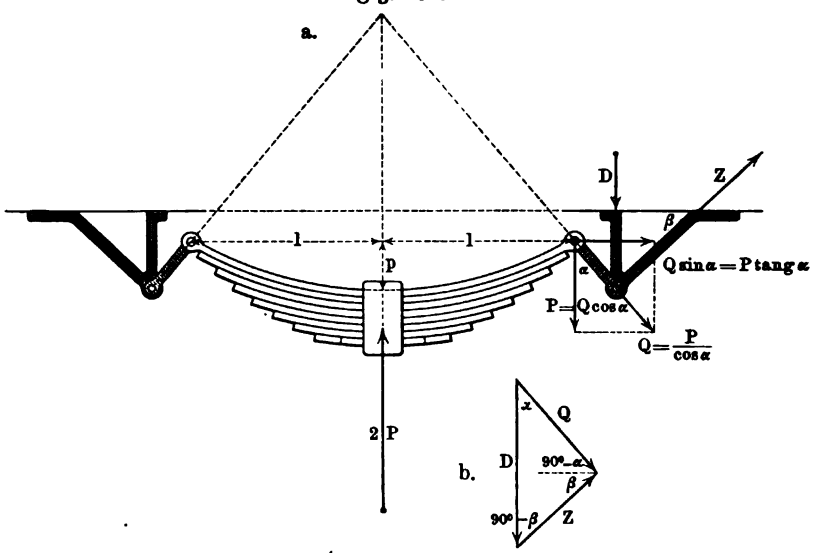
Es ist ferner die Durchbiegung

$$d = \tfrac{1}{2}\frac{l^2\,Mo}{E\mathfrak{T}r} = \frac{6\,l^2(l + p\,tng\,\alpha)\,P}{nEb_0h^3} = \frac{l^2}{h}\cdot\frac{k_b}{E}.$$

Im allgemeinen ist $p = p_0 - d \sim p_0$.

Streng genommen ist für die oberste Federlage noch, der Zugkraft $[P\,tng\,\alpha]$ entsprechend, eine Normalspannung $\frac{P\,tng\,\alpha}{b\,h}$ und, der Vertikalkraft $[P]$ entsprechend, eine Schubspannung $\frac{3}{2}\frac{P}{b\,h}$ zu berücksichtigen; statt dessen pflegt man in der Praxis meist, auch mit Rücksicht auf die bei der Fahrt auftretenden Schwingungen der Feder den Wert von k_b relativ niedrig anzusetzen, bei bestem Material (Federflußstahl) statt mit 6000 bis 8000 Atm. nur mit 5800 bis 6500 Atm.

Fig. 1065.



Für die Berechnung des Federbockes ist gemäß Fig. 1065 b

$$D = \frac{Q\,sin\,(90^0 - \alpha + \beta)}{cos\,\beta} = P\,(1 + tng\,\alpha\,tng\,\beta)$$

und

$$Z = \frac{Q\,sin\,\alpha}{cos\,\beta} = \frac{P\,tng\,\alpha}{cos\,\beta}.$$

Legt man bei der Rechtecksfeder die Verjüngung in die Höhe und zwar so, daß sie sich nach einem Kreisbogen durchbiegt, so folgt aus

$$\varrho = \frac{E\,\mathfrak{T}r}{Mo} = \text{Konstante}$$

auch

$$\frac{\mathfrak{T}r}{Mo} = \frac{b_0\,h^3}{12\,P\,z} = \text{Konstante},$$

d. h. man hat

$$h_0^3 : h^3 = l : z.$$

Der Aufriß der Feder, welche keine Form gleicher Spannung ist, ist demnach durch eine kubische Parabel gegeben, während ihr Volumen $\frac{3}{4} b_0 h_0 l$ ist.

Für die Ansatzstelle gilt $Pl = \frac{1}{6} k_b b_0 h_0^2$, während man für die Durchbiegung erhält

$$d = \tfrac{1}{3} \frac{Pl^3}{E \mathfrak{T}r} = \frac{l^2}{h_0} \cdot \frac{k_b}{E}.$$

Die Formänderungsarbeit beträgt für das Volumen V

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} Pd = \tfrac{1}{12} \frac{k_b^2}{E} h_0 b_0 l = \tfrac{1}{9} \frac{k_b^2}{E} \cdot V.$$

Dabei ist $b = b_0$.

Gemäß dieser Entwickelung konstruiert man auch zusammengesetzte Federn, deren Blätter gleiche Breite haben und, abgesehen von dem obersten, nach einer kubischen Parabel zugeschärft sind (vergl. Fig. 1066).

Außerdem konstruiert man auch zusammengesetzte Federn aus trapezförmigen Blättern, für deren Zuschärfung auch eine bestimmte Kurve genommen werden muß, wenn Durchbiegung nach dem Kreisbogen (kein Klaffen) erfolgen soll.

Von diesen Federn ist nur die Dreiecksfeder zugleich eine Form gleicher Spannung.

Fig. 1066.

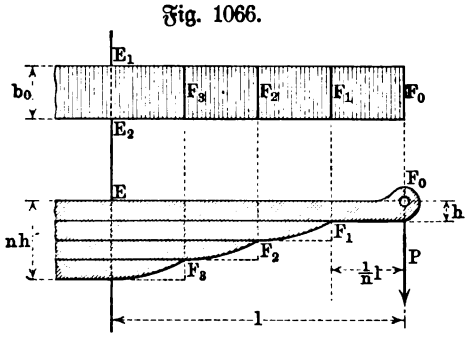
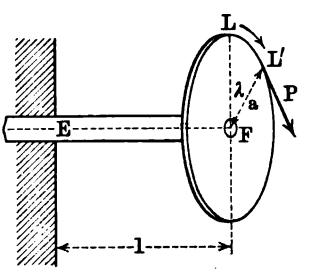


Fig. 1067.



24. **Gerade Drehungsfedern.** Wird ein gerader Stab (vergl. Fig. 1067) bei E eingespannt und bei F durch ein auf Torsion wirkendes Moment $[Pa]$ gefaßt, so bildet der Stab eine gerade Drehungsfeder.

Für einen Stab EF von kreisförmigem Querschnitt (d) gilt nach § 169

$$Mo = k_d \cdot \frac{\mathfrak{T}r_0}{\frac{1}{2} d} = k_d \cdot \frac{\pi}{16} d^3$$

und demnach hat man für $Mo = Pa$

$$P = k_d \cdot \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{a} \sim 0{,}2\, k_d \cdot \frac{d^3}{a}.$$

Geht dabei L in die Lage L' über, so ist die Federung

$$a \,.\, arc\, \lambda = a \cdot \frac{Mol}{G \,.\, \mathfrak{T}r_0} = \frac{32}{\pi} \frac{a^2 l}{d^4} \frac{P}{G}$$

oder, falls P noch aus der Festigkeitsgleichung bestimmt wird,

$$a \,.\, arc\,\lambda = 2\,\frac{al}{d}\cdot\frac{k_d}{G}.$$

Die Formänderungsarbeit beträgt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\,Mo \,.\, arc\,\lambda = \tfrac{1}{2}\,\frac{Mo^2 l}{G\mathfrak{T}r_0} = 16\,\frac{a^2 l}{\pi d^4}\cdot\frac{P^2}{G}$$

oder, falls P aus der Festigkeitsgleichung eingeführt wird,

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4}\,\frac{k_d^2}{G}\cdot V$$

für V als Volumen des geraden Stabes.

Für einen Stab EF von rechteckigem Querschnitt $(b,\ h)$ gilt nach § 171

$$k_d = \tfrac{9}{2}\,\frac{Mo}{b^2 h} \text{ für } h > b$$

und demnach ist für $h > b$

$$P = \tfrac{2}{9}\,k_d\cdot\frac{b^2 h}{a}.$$

Die Federung beträgt

$$a \,.\, arc\,\lambda = 3{,}6\,a^2 l\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\cdot\frac{P}{G}$$

oder, falls nun noch P aus der Festigkeitsgleichung eingeführt wird,

$$a \,.\, arc\,\lambda = 0{,}8\,al\,\frac{b^2+h^2}{bh^2}\cdot\frac{k_d}{G}.$$

Die Formänderungsarbeit beträgt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\,Mo \,.\, arc\,\lambda = \tfrac{4}{45}\,\frac{b^2+h^2}{h^2}\cdot\frac{k_d^2}{G}\cdot V$$

für V als Volumen des geraden Stabes.

Stellt man den Faktor $\frac{b^2+h^2}{h^2}$ in $\mathfrak{A}$ dar als $\left(\frac{b}{h}\right)^2+1$, so sieht man, daß er sein Maximum 2 für $b=h$ erreicht, d. h. $\mathfrak{A}$ ist für den quadratischen Querschnitt ein Maximum.

25. Federschwingungen. Gemäß den Betrachtungen des § 130 gewinnt man für Schwingungen von Federn unter Einfluß der Kraft $[P]$ bei Vernachlässigung ihres Gewichtes ganz allgemein die Gleichung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}},$$

falls f die Federdurchbiegung in Metern bedeutet, welche $[P]$ entspricht.

26. Stöße innerhalb einer Maschine. Kommen Maschinenteile zum Stoß, so ist deren Beanspruchung im allgemeinen einerseits nach § 258 bis § 262 zu beurteilen, während anderseits die zulässigen Spannungen relativ niedrig zu halten sind. Die Schwierigkeit einer genaueren Behandlung solcher Fälle ist vor allem dadurch bedingt, daß der Grad (q) der Elasticität für

den Stoß zweier bestimmter Körper meist nicht genau festgestellt werden kann und daher nur schätzungsweise gegeben ist.

Ist der Teil der gesamten Energie, welcher auf Formänderung wirkt, bekannt, so läßt sich auch gemäß den Ausdrücken für die Formänderungsarbeit von Fall zu Fall die auftretende Spannung beurteilen.

Auch das plötzliche Aufbringen einer Last ist als Stoß anzusehen und zwar wirkt eine Last dabei im allgemeinen bei Gültigkeit des Gesetzes von Hooke doppelt so stark, als wenn sie als ruhende Last angesehen wird (vergl. S. 871). Geschieht das Aufbringen der Last in der Art, wie bei der Belastung einer Brücke durch einen Zug, so pflegt man nach dem Vorgange von Gerber (vergl. Anwendung Nr. 12) die Belastung anderthalbfach zu rechnen.

Überhaupt vergleicht man in der Praxis, ebenso wie man die kinetischen Aufgaben durch das Princip von d'Alembert auf statische Aufgaben zurückführt, kinetische Belastungsweisen, wie sie einem Stoße oder dem plötzlichen Aufbringen von Lasten entsprechen, gern mit statischen Belastungsweisen, indem man nach der ruhenden Belastung fragt, welche dieselbe Spannung hervorrufen würde, welche einer bestimmten kinetischen Belastung entspricht.

Man vergleicht zu diesem Zweck bei Gültigkeit des Gesetzes von Hooke die verschiedenen Vorgänge etwa mit dem Beispiel des § 130 gemäß Fig. 608, in welchem die bewegliche Belastung P bei einer Fallhöhe h, einer Geschwindigkeit $\frac{v^2}{2g}$ entsprechend, bei Erzeugung der Verlängerung $\bar{\lambda}$ die Arbeit $P(h + \bar{\lambda})$ bestimmt, während die Erzeugung derselben Verlängerung $\bar{\lambda}$ durch eine ruhende Belastung Q die Arbeit $\frac{1}{2} Q\bar{\lambda}$ erfordern würde. Setzt man dem Vergleiche gemäß

$$P(h + \bar{\lambda}) = \tfrac{1}{2} Q\bar{\lambda},$$

so folgt der Wert der statischen Belastung Q als

$$Q = 2P\frac{h + \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}},$$

wobei $h = \frac{v^2}{2g}$ ist.

Ersetzt man λ durch irgend eine Formänderung d, welche mit der Verlängerung $\bar{\lambda}$ vergleichbar ist, so gilt ebenso

$$Q = 2P\frac{h + d}{d}.$$

Für $h = 0$ ist wieder $Q = 2P$.

Da für kinetische Belastungen von Anfang an ein Verlust an Energie in Rechnung zu stellen ist, so wird thatsächlich die Gleichung

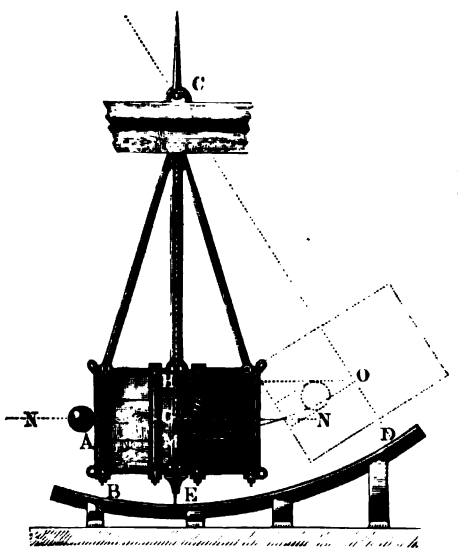
$$Q = \eta \,.\, 2P\frac{h + d}{d}$$

in Geltung sein, in welcher $\eta < 1$ ist.

27. Das ballistische Pendel[1]. Zur Bestimmung der Aufschlagsgeschwindigkeit von Geschossen bediente man sich früher eines schweren Pendels (vergl. Fig. 1068), das an der Seite des Aufschlages mit weichem Holz oder Thon ausgefüttert ist, um das Geschoß bei möglichst unelastischem Stoße aufzunehmen.

Ist m_1 die Masse des Geschosses und c_1 seine Geschwindigkeit und μ_2 die auf den Stoßpunkt reduzierte Masse des anfangs ruhenden Pendels, so gilt für dessen Winkelgeschwindigkeit γ nach dem Stoße

Fig. 1068.



$$r_2\gamma = \frac{m_1}{m_1 + \mu_2} c_1,$$

falls der Stoßpunkt von der Drehungsachse den Abstand r_2 hat und falls man die Breitenausdehnung des Pendels vernachlässigt. Der Winkelgeschwindigkeit γ entspricht eine Energie

$$\tfrac{1}{2}\gamma^2(\mathfrak{T}r_2 + \mathfrak{T}r_1'),$$

falls $\mathfrak{T}r_2$ und $\mathfrak{T}r_1'$ bezw. die Trägheitsmomente des Pendels und des Geschosses für die Drehungsachse bezeichnen, wobei $\mathfrak{T}r_2 = \mu_2 r_2^2$ ist. Diese Energie läßt sich durch die, dem Ausschlage α des Pendels entsprechende Arbeit messen. Ist s der Abstand des Schwerpunktes des Pendels, einschließlich des Geschosses, von der Drehungsachse, so ist diese Arbeit

$$(m_1 + m_2)\, g\,(s - s\,.\,\cos\alpha),$$

falls m_2 die Masse des Pendels bezeichnet.

Demnach gilt die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}r_2 + \mathfrak{T}r_1')\frac{m_1^2}{(m_1 + \mu_2)^2}\frac{c_1^2}{r_2^2} = (m_1 + m_2)\, gs\,(1 - \cos\alpha).$$

Da die Masse des Pendels der Masse des Geschosses gegenüber sehr groß genommen wird, so ist

$$\mathfrak{T}r_2 + \mathfrak{T}r_1' \sim \mathfrak{T}r_2 \quad \text{und} \quad m_1 + \mu_2 \sim \mu_2 \quad \text{und} \quad m_1 + m_2 \sim m_2$$

und man hat demnach

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}r_2 \frac{m_1^2}{\mu_2^2}\frac{c_1^2}{r_2^2} \sim m_2 gs\,(1 - \cos\alpha).$$

Da $\mathfrak{T}r_2 = \mu_2 r_2^2$ und $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist demnach

[1]) Diese Vorrichtung wird in den Lehrbüchern, obwohl sie als veraltet gelten muß, mit Recht weiter besprochen, weil sie eine gute Erläuterung des unelastischen Stoßes bietet.

$$c_1^2 = 4\,\frac{m_2 \mathfrak{T}r_2}{m_1^2 r_2^2}\, g s \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Um $\mathfrak{T}r_2$ zu bestimmen, bestimmt man die Dauer T einer Doppelschwingung für das Pendel gemäß S. 737, woraus

$$\mathfrak{T}r_2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot m_2 g s$$

folgt. Führt man diesen Wert von $\mathfrak{T}r_2$ in die Gleichung für c_1^2 ein, so ist

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{s}{r_2} \cdot gT \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

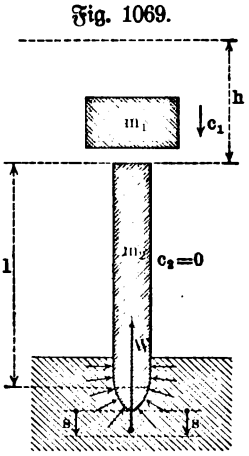
Für diese Formel ist bei der Vernachlässigung von m_1 gegen m_2 in $m_1 + m_2$ u. s. w. der Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der Drehungsachse s ein für allemal gemäß S. 738 für das Pendel, ausschließlich des Geschosses, festzustellen.

Der Zeiger des Pendels (vergl. Fig. 1068) bewegt sich längs eines eingeteilten Bogens, der vor dem Versuch mit Talg bestrichen wird, um den Ausschlag α für dessen Messung zu fixieren.

Bestimmt man die Anzahl n der Doppelschwingungen für eine Minute ($= 60''$), so ist $T = \frac{60}{n}$ zu setzen.

28. Das Einrammen von Pfählen. Wenn ein Pfahl (vergl. Fig. 1069) in den mehr oder minder elastischen Erdboden eingeschlagen ist, so drückt die zur Seite gedrängte Erde auf ihn, der Hauptsache nach senkrecht zur Achse des Pfahles, so daß bei seinem weiteren Eintreiben ebenso wie bei seinem Ausziehen ein bestimmter Reibungswiderstand W in Richtung der Achse auftritt. Dieser wächst im allgemeinen mit der Tiefe der Einsenkung des Pfahles, einerseits weil der Druck der Erde mit der Größe der gedrückten Fläche zunimmt, und anderseits, weil die tieferen Erdschichten schwerer seitlich verdrängt werden können, als die oberen.

Fig. 1069.



Erhält der eingeschlagene Pfahl durch den Rammbär einen neuen Stoß, so dringt er bei einer gewissen Hubhöhe h_0 desselben nicht weiter ein, so daß dann die ganze Energie des Stoßes Formänderungen entspricht, welche teils an dem Rammklotze, teils an dem Pfahle, teils an dem umgebenden Erdreiche beobachtet werden können — Pfahl und Erdboden verhalten sich hier etwa wie ein Stift in einer Kautschukplatte.

Der größten Pressung des von oben durch den Stoß und von unten durch den Widerstand W des Erdreiches gedrückten Stabes entspricht die Spannung

$$\sigma = \frac{W}{f},$$

wenn f den Querschnitt des Pfahles bezeichnet. Zur Erzeugung dieser Spannung σ ist die Formänderungsarbeit

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}\cdot V = \tfrac{1}{2}\frac{W^2}{fE}\cdot l$$

erforderlich, falls $V = fl$ das Volumen des Pfahles bezeichnet.

Wird von der Energie $(m_1 g)h_0$ des fallenden Rammbäres der Bruchteil $\eta(m_1 g)h_0$ auf diese Formänderung verwandt, so ist

$$\eta(m_1 g)h_0 = \tfrac{1}{2}\frac{W^2}{fE}l.$$

Wird nun die Hubhöhe so vergrößert, daß ein weiteres Eindringen des Pfahles um s erfolgt, so ist zunächst die Arbeit $\frac{1}{2}\frac{W^2}{fE}l$ geleistet worden, und ferner die Arbeit $W\,.\,s$, und demnach gilt jetzt bei einer Hubhöhe h

$$\eta'(m_1 g)h = \tfrac{1}{2}\frac{W^2}{fE}l + Ws.$$

Im ersten Falle (h_0) ist im Augenblick der größten Pressung des Pfahles eine gewisse Senkung der Schwerpunkte des Rammbärs und des Pfahles zu beachten, welche der Verkürzung des Systems entspricht, im zweiten Falle sind beide Schwerpunkte zunächst um s gesunken, während darauf ein mehr oder minder starkes Zurückprallen des Rammbäres erfolgt. Sieht man die Arbeit der Senkung in beiden Fällen als nahezu gleich an, so kann man $\eta = \eta'$ setzen und erhält dann

$$\eta(m_1 g)(h - h_0) = Ws.$$

Nimmt man nun ferner an, daß der Stoß zwischen Rammbär und Pfahlkopf während der ersten Periode als Stoß zweier freier unelastischer Körper aufgefaßt werden darf, so ist

$$\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

und man hat dann

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)h_0 = \tfrac{1}{2}\frac{W^2}{fE}l$$

und

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)(h - h_0) = W\,.\,s.$$

Stellt man durch Versuche für bestimmte Verhältnisse die wirkungslose Fallhöhe h_0 des Rammbäres fest, so ist damit nach der ersten Gleichung W gegeben.

Giebt der Versuch z. B. bei $m_1 g = 1600\,\text{kg}$ und $m_2 g = 800\,\text{kg}$, $l = 5\,\text{m}$, $f = 500\,\text{qcm}$ und $E = 120000$ Atm. den Wert $h_0 = 25\,\text{cm}$, so ist

$$W = 80000\,\text{kg}.$$

Stellt man durch Versuche für bestimmte Verhältnisse die Verschiebungsstrecke s fest, so ist W durch die Verbindung beider Gleichungen gegeben, indem man den Wert von h_0 aus der ersten Gleichung in die zweite einführt.

Der Wirkungsgrad ist $\frac{m_1(h - h_0)}{(m_1 + m_2)h}$.

Je größer h ist, um so mehr darf $h - h_0 \sim h$ gesetzt werden, so daß dann

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)h \sim Ws$$

ist; in dieser viel gebrauchten Formel darf s nicht den Wert 0 haben, weil dann W den Wert ∞ haben müßte, was mit Rücksicht auf $h - h_0 \sim h$ erklärlich ist.

Berücksichtigt man hier noch die Senkung der Schwerpunkte vom Bär und Pfahl, so ist

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)h + (m_1 + m_2)g \,.\, s \sim Ws.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die ganze Betrachtung nur eine leidliche Annäherung darstellt, berechnet man die Tragkraft eines Pfahles aus dem bestimmten Werte von W stets mit einer hohen Sicherheit ($\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{10}$), zumal auch die häufige Veränderlichkeit des Verhaltens des Erdbodens zur Vorsicht mahnt.

Bei der Bestimmung von s nimmt man, nachdem der Pfahl bereits stark eingetrieben ist, das Mittel aus mehreren (n) Schlägen (Letzte Hitze), durch welche ein Eintreiben um s' stattfinden mag; es ist dann $s = \frac{1}{n} \cdot s'$.

Die Kosten, welche das Einrammen eines Pfahles fordert, entsprechen einerseits der jedesmaligen Hebung des Bärs und anderseits der Anzahl (n) der Schläge, welche nötig sind, um eine bestimmte Senkung s' und damit einen bestimmten Widerstand W zu erhalten.

Nach der Formel

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)h = Ws$$

sind diese Kosten für $s = \frac{1}{n}s'$ proportional zu

$$(m_1 g)hn = Ws' \frac{m_1 + m_2}{m_1} = Ws'\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Für einen bestimmten Wert m_2 hat man also m_1 möglichst groß zu machen, um die Kosten möglichst herabzudrücken; vielfach üblich ist das Verhältnis $m_2 : m_1 = 1 : 2$.

Legt man zwischen Bär und Pfahlkopf, um letzteren zu schonen, einen Block (Rammknecht), so braucht man natürlich dabei mehr Energie zur Erzielung einer bestimmten Tragfähigkeit.

29. Der Betrieb von Pochstempeln. Der von einer Daumenwelle getriebene Pochstempel (Stampfe) der Fig. 379 ist auf S. 542 in Bezug auf die auftretenden Reibungen untersucht worden. Nun sollen die Arbeitsverhältnisse dieser Vorrichtung bestimmt werden, wobei wir die Voraussetzung machen,

daß der Stoßpunkt zwischen Daumen und Hublatte mit der Achse der Daumenwelle in einer Horizontalen liegt.

Hat der Stoßpunkt von dieser Achse den Abstand r, so ist unter dieser Voraussetzung die reduzierte Masse der Welle $\mu_1 = \frac{\Theta_1}{r^2}$, falls Θ_1 ihr Trägheitsmoment für die Drehungsachse bedeutet. Demnach gilt bei einer Winkelgeschwindigkeit γ der Welle für die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper, falls der Pochstempel die Masse m_2 hat, gemäß § 256

$$c = \frac{\mu_1}{\mu_1 + m_2} \cdot r\gamma = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + m_2 r^2} \cdot r\gamma.$$

Demnach ist die Energie des Pochstempels

$$\tfrac{1}{2} m_2 c^2 = \tfrac{1}{2} m_2 (r\gamma)^2 \frac{\Theta_1^2}{(\Theta_1 + m_2 r^2)^2}.$$

Wird der Stempel auf die Höhe h gehoben, so ist außerdem die Arbeit $(m_2 g) h$ zu leisten, so daß die für einen Hub erforderliche Arbeit im ganzen

$$A' = \tfrac{1}{2} m_2 \left[(r\gamma)^2 \frac{\Theta_1^2}{(\Theta_1 + m_2 r^2)^2} + 2gh \right]$$

beträgt.

Da außerdem noch für jeden Hub der Arbeitsverlust des Stoßes zu berücksichtigen ist, so ist schließlich für jeden Hub, von den Reibungen abgesehen, an Arbeit erforderlich

$$A = \tfrac{1}{2} m_2 \left[(r\gamma)^2 \frac{(2\Theta_1 + m_2 r^2)\Theta_1}{(\Theta_1 + m_2 r^2)^2} + 2gh \right].$$

Soll der Stempel in der Minute u Hebungen und Senkungen vollführen, so ist die zum Betriebe erforderliche Arbeitsstärke, abgesehen von der Überwindung der Reibung, in Pferdestärken

$$\frac{A \,.\, u}{60 \,.\, 75}.$$

Macht die Welle n Umdrehungen in der Minute, so ist $\frac{n \,.\, 2r\pi}{60} = r\gamma$.

Da man der Konstruktion in Bezug auf die Hubhöhe h einen bestimmten Wert von $r\gamma$ zu Grunde zu legen pflegt, so ist damit n bei gegebenem r bestimmt und umgekehrt.

Man wählt häufig für $r\gamma$ den Ansatz $r\gamma = 1{,}12\sqrt{h}$, woraus als Zeit t_1 einer Hebung $t_1 = \frac{h}{r\gamma} = 0{,}89\sqrt{h}$ folgt, während die Zeit der Senkung im freien Falle durch $h = \frac{1}{2} g t^2$ als $t_2 = 0{,}45\sqrt{h}$ bestimmt ist; die Periode eines ganzen Hubes (Hebung und Senkung) ist demnach, falls man $\frac{1}{6}$ dieser Periode auf Ruhe des Stempels rechnet, durch

$$t = t_1 + t_2 + \tfrac{1}{6} t$$

gegeben, d. h. man hat $t = 1{,}6\sqrt{h}$.

Da $u \,.\, t = 60$ ist, so ist $u = \frac{37{,}5}{\sqrt{h}}$.

Hat die Welle p Daumen, so ist $p \,.\, n = u$.

Gewöhnlich läßt man durch eine Welle mehrere (m) parallel angeordnete Stempel treiben, so daß dann, abgesehen von der Reibung, die Arbeitsstärke

$$m \cdot \frac{A \,.\, u}{60 \,.\, 75}$$

erforderlich ist.

30. Hammerbetriebe. Größere Hämmer werden oft durch Daumenwellen getrieben, wie es Fig. 985 für einen sogenannten Schwanzhammer andeutet, bei dem der Stiel (Helm) über die Drehungsachse hinaus (als Schwanz) verlängert ist. Fehlt eine solche Verlängerung, so muß der Hammer entweder durch den Daumen am Kopf gefaßt werden oder zwischen Kopf und Drehungsachse; im ersten Falle, bei den sogenannten Stirnhämmern, liegt die Achse der Daumenwelle wie bei den Schwanzhämmern parallel zur Drehungsachse des Hammers, im zweiten Falle, bei den sogenannten Aufwurfhämmern, kreuzt sie diese senkrecht, damit der Daumen seitlich und von unten den Hub bewirkt. Die günstigste Anordnung würde fordern, daß die beiden vorhandenen Stoßpunkte, nämlich zwischen Daumen und Hammer und zwischen Hammer und Amboßfläche als Mittelpunkte des Stoßes konstruiert würden. Da dieses im allgemeinen nicht möglich ist, so nimmt man jedenfalls den gefährlicheren Stoßpunkt zwischen Hammer und Aufschlagsfläche zum Mittelpunkte des Stoßes.

Damit die Drehungsachse eine Hauptachse ist, wird der ganze Hammer symmetrisch zu einer auf der Drehungsachse senkrecht stehenden Ebene ausgebildet; außerdem legt man die beiden Stoßpunkte möglichst in die Horizontalebene, welche durch die Drehungsachse geht, damit beide Stoßrichtungen vertikal sind.

Ist $\mathfrak{T}r_1$ das Trägheitsmoment der Daumenwelle, und hat der Stoßpunkt am Daumen von der Achse dieser Welle den Abstand r_1, so hat die Welle für den Stoßpunkt die reduzierte Masse $\mu_1 = \frac{\mathfrak{T}r_1}{r_1^2}$, während für den Hammer ebenso bezw. $\mu_2 = \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}$ gilt. Für eine Winkelgeschwindigkeit γ ergiebt sich dann für den Augenblick der größten Pressung als Geschwindigkeit beider Körper

$$c = \frac{\mathfrak{T}r_1 r_2^2}{\mathfrak{T}r_1 r_2^2 + \mathfrak{T}r_2 r_1^2}(r_1\gamma).$$

Wird diese auf den Hammer übertragen, so ist dessen Energie

$$\tfrac{1}{2}\mu_2 c^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}c^2.$$

Wird der Stoßpunkt am Daumen für die Bewegung des Hammers um h gesenkt (bei Schwanzhämmern) oder gehoben (bei Stirnhämmern und Auf-

wurfhämmern), so wird der Schwerpunkt des Hammers dadurch um $h \cdot \frac{s}{r_2}$ gehoben, falls s den Abstand dieses Schwerpunktes von der Drehungsachse bezeichnet; bei einer Masse m_2 des Hammers ist dazu die Arbeit

$$(m_2 g)\frac{hs}{r_2}$$

erforderlich.

Abgesehen von dem Arbeitsverlust des Stoßes erfordert also jeder Hammerschlag die Energie

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}c^2 + (m_2 g)\frac{hs}{r_2}$$

und demnach ist die entsprechende Arbeitsstärke bei n Schlägen in der Minute in Pferdestärken, von den Reibungen abgesehen,

$$\frac{n}{60 \cdot 75}\left[\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}c^2 + m_2 g\frac{hs}{r_2}\right].$$

Bei Stirnhämmern bewegt sich, nachdem der Daumen sie verlassen, der Stoßpunkt noch um eine bestimmte Strecke h' aufwärts, so daß er im ganzen um $h + h'$ gehoben wird. Zur Hebung um h' ist die Arbeit $(m_2 g)\frac{h's}{r_2}$ erforderlich, welche der Energie des Hammers $\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_2}\right)^2 \mathfrak{T}r_2$ entspricht, dessen Winkelgeschwindigkeit ja $\frac{c}{r_2}$ ist. Demnach ist

$$h' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{r_2}\right)^2 \frac{\mathfrak{T}r_2}{m_2 g}\frac{r_2}{s}.$$

Der gesamten Hebung $h + h'$ des Stoßpunktes am Daumen entspricht eine Hebung des Schwerpunktes um $(h + h')\frac{s}{r_2}$, so daß der Hammer beim Sinken die Arbeit

$$m_2 g\,(h + h')\frac{s}{r_2} = (m_2 g)\frac{hs}{r_2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{r_2}\right)^2 \mathfrak{T}r_2$$

leisten kann.

Mißt man die Höhen nicht für den Stoßpunkt des Daumens (h und h'), sondern für den Stoßpunkt des Hammers in Bezug auf den Amboß (H und H'), der als Mittelpunkt des Stoßes konstruiert ist, so ist diese Arbeit

$$m_2 g\,(H + H')\frac{s}{r},$$

falls $r = \frac{\mathfrak{T}r_2}{m_2 s}$ den Abstand für den Mittelpunkt des Stoßes von der Drehungsachse bezeichnet.

Die Winkelgeschwindigkeit γ' des Aufschlagens entspricht angenähert der Gleichung

$$2g \cdot (H + H')\frac{s}{r} = (s\gamma')^2,$$

und demgemäß ist die Energie des Aufschlagens für den Hammer als

$$\tfrac{1}{2}(\gamma')^2 \mathfrak{T}r_2$$

zu bestimmen.

Bei Aufwurfhämmern läßt man den Kopf gegen einen Prellbalken (Reitel), bei Schwanzhämmern den Schwanz gegen einen Prellpfosten schlagen.

Entspricht dieser Hemmung ein Geschwindigkeitsverlust von 50 Proz., so ist der Wert von h' mit $\frac{1}{2}c$ zu berechnen, während die Formeln der Stirnhämmer sonst auch hier erhalten bleiben.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit im Teilriß des Daumens durch v, so ist für eine Hubhöhe h am Stoßpunkt des Daumens $h \sim v \,.\, t_1$, falls t_1 die Zeit des Hubes bezeichnet. Bei 50 Proz. Verlust an Geschwindigkeit geschieht die Rückkehr in die Ruhelage nur mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}v$, so daß für die Zeit t_2 diese Rückkehr

$$h \sim \tfrac{1}{2}v \,.\, t_2 + \frac{g}{2} \cdot t_2^2$$

gilt, woraus t_2 folgt.

Macht der Hammer u Schläge in der Minute, so ist die Zeit zwischen zwei Schlägen $\frac{60}{u}$ und es ist wieder, wie bei den Stampfen, ein Sechstel dieser Zeit auf Ruhe zu rechnen. Man hat also

$$\frac{60}{u} = t_1 + t_2 + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{60}{u}$$

oder

$$\frac{50}{u} = \frac{h}{v} + \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8hg}}{2g}.$$

Nach dieser Gleichung ist die Abhängigkeit von v, h und u zu beurteilen.

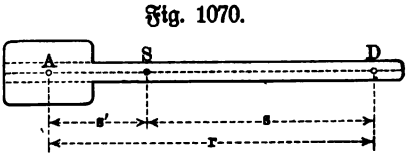
Für eine Tourenzahl n der Welle ist natürlich

$$\frac{2\pi r_1 \,.\, n}{60} = v,$$

während der Hammer bei einer Umdrehung $\frac{u}{n}$ Schläge vollführt.

Ist für einen Hammer von der Masse m_2 der Punkt des Aufschlagens bestimmt, so läßt sich für diesen Punkt als Mittelpunkt des Stoßes die Lage der Drehungsachse folgendermaßen bestimmen.

Fig. 1070.



Ist A in Fig. 1070 die Projektion des Aufschlagpunktes auf die Achse, so gilt für die Trägheitsmomente in Bezug auf Achsen durch A und S, parallel zur Drehungsachse

$$\mathfrak{Tr}_A = \mathfrak{Tr}_S + s'^2 \,.\, m_2$$
$$\mathfrak{Tr}_2 = \mathfrak{Tr}_S + s^2 \,.\, m_2 = \mathfrak{Tr}_S + (r - s')^2 \,.\, m_2,$$

während außerdem

$$\mathfrak{Tr}_2 = m_2 r s = m_2 r (r - s')$$

sein muß.

Es ist also

$$\mathfrak{Tr}_2 = m_2 r (r - s') = \mathfrak{Tr}_A + m_2 (r^2 - 2rs')$$

oder

$$m_2 r s' = \mathfrak{T} r_A,$$

woraus

$$r = \frac{\mathfrak{T} r_A}{m_2 s'}$$

folgt. Vergl. dazu S. 1335.

Um das Schwungrad für eine Daumenwelle zu bestimmen, welches hier zugleich die Daumen trägt, hat man von der allgemeinen Arbeitsgleichung für eine Maschine (vergl. S. 1415) auszugehen.

Die Nutzarbeit, welche der Hebung des Hammers entspricht, erfordert einen Druck P' im Teilkreise des Daumens, dessen Moment $P' r_2$ ist, wenn der Stoßpunkt wieder den Abstand r_2 von der Drehungsachse des Hammers hat. Dieses Moment hat das Moment des Hammergewichtes Gs und das Reibungsmoment zu überwinden, welches für einen Zapfen ϱ der Hammerachse bei einem Reibungskoeffizienten f den Wert $(P' + G) f \varrho$ hat, da der Zapfendruck $P' + G$ ist. Demnach gilt die Gleichung

$$P' r_2 = Gs + (P' + G) f \varrho,$$

aus welcher

$$P' = G \frac{s + f\varrho}{r_2 - f\varrho}$$

folgt.

Ist w der Weg, den der Daumen unter Berührung mit dem Hammer in Richtung von $[P']$ zurücklegt, so ist die $[P']$ entsprechende Arbeit $P' w$, d. h. die gesuchte Nutzarbeit beträgt

$$\mathfrak{A}_1 = P' w = G \frac{s + f\varrho}{r_2 - f\varrho} \cdot w.$$

Die Arbeitsgröße $\mathfrak{A}_2'$ der passiven Widerstände ist hier bedingt durch die Reibung zwischen Daumen und Hammer und durch den entsprechenden Verlust beim Stoße.

Bezeichnet w' die Länge der Daumenkurve, in welcher Berührung zwischen Daumen und Hammer stattfindet, und f' den zugehörigen Reibungskoeffizienten, so ist die Arbeit der Reibung angenähert

$$(P' f') w' = G f' \frac{s + f\varrho}{r_2 - f\varrho} \cdot w'.$$

Beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Welle vor dem Stoße φ und nach dem Stoße $\bar{\varphi}$, während sie für den Augenblick der größten Pressung φ_0 ist, so ist der Arbeitsverlust bei dem Stoße gemäß S. 1340 angenähert

$$\tfrac{1}{2} r_1^2 (\varphi - \varphi_0)^2 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

wenn r_1 der Abstand des Stoßpunktes von der Wellenachse und $\mu_1 = \frac{\mathfrak{T} r_1}{r_1^2}$ und $\mu_2 = \frac{\mathfrak{T} r_2}{r_2^2}$ bezw. die auf den Stoßpunkt reduzierten Massen von Welle (φ) und Hammer (φ_0) sind. Dabei ist bei Voraussetzung eines unelastischen Stoßes

$$\varphi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \varphi$$

und demnach hat der berechnete Verlust den Wert

$$\tfrac{1}{2} r_1^2 \varphi^2 \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^3} \mu_2^2.$$

Demnach ist

$$\mathfrak{A}_2' = Gf' \frac{s + f\varrho}{r_2 - f\varrho} w' + \tfrac{1}{2} r_1^2 \varphi^2 \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^3} \mu_2^2.$$

Der Teil $\mathfrak{A}_2''$ der Nebenarbeit, welche der abwechselnden Hebung und Senkung von Teilen der Maschine entspricht, ist hier durch keine regulierenden Vorrichtungen ausgeglichen. Um dem Hammer die endliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{r_1}{r_2} \overline{\varphi}$ zu erteilen, ist die Arbeitsgröße $\frac{1}{2} (r_1 \overline{\varphi})^2 \mu_2$ erforderlich, so daß

$$\mathfrak{A}_2'' = \tfrac{1}{2} r_1^2 \overline{\varphi}^2 \mu_2$$

ist.

Die Änderung der Energie $\overline{E}_2 - \overline{E}_1$ beträgt für den Übergang von φ in $\overline{\varphi}$

$$\tfrac{1}{2} (\overline{\varphi}^2 - \varphi^2) \mathfrak{T} r_1.$$

Demnach ist der Arbeitswert $\mathfrak{A}$ der in der betrachteten Zeit, in welcher der Hammer gehoben wird, verwendeten Energie bestimmt als

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2'' + \tfrac{1}{2} (\overline{\varphi}^2 - \varphi^2) \mathfrak{T} r_1.$$

Hat der Daumen den Hammer verlassen, so muß die Winkelgeschwindigkeit der Welle wieder vom Werte $\overline{\varphi}$ auf den Wert φ gebracht werden, wozu der Arbeitswert

$$\tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1$$

erforderlich ist.

Für die Periode, die zwischen dem Beginn zweier Hammerschläge liegt, hat also die im ganzen zugeführte Energie den Wert

$$\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2''.$$

Bei einer gleichmäßigen Zufuhr von Energie verteilt sich diese auf die beiden betrachteten Teile der Periode angenähert im Verhältnis der ihnen entsprechenden Wege des Daumens. Kommen bei einer Umdrehung m Daumen zur Wirkung, so ist der Teil von dem Umfange des Teilkreises der Daumenwelle, der auf eine solche Periode fällt, $\frac{2\pi r_1}{m}$, und zwar entspricht ein bestimmter Teil davon, etwa $\frac{2\pi r_1}{m} \cdot \frac{1}{\alpha}$, dem Hube des Hammers und der andere Teil $\frac{2\pi r_1}{m} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ dem Leergange der Welle. Man hat also

$$\mathfrak{A} : \tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1 = \frac{1}{\alpha} : \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1 \cdot \frac{1}{\alpha - 1}$$

und

$$\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1 = \tfrac{1}{2} (\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) \mathfrak{T} r_1 \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Demnach gilt also

$$\tfrac{1}{2}(\varphi^2 - \overline{\varphi}^2)\mathfrak{T}r_1 \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2''$$

$$= G(w + f'w')\frac{s + f\varrho}{r_2 - f\varrho} + \tfrac{1}{4}r_1^2\varphi^2 \cdot \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^3} \cdot \mu_2^2 + \tfrac{1}{2}(r_1\overline{\varphi})^2\mu_2.$$

Ist γ die normale Winkelgeschwindigkeit der Welle, so ist gemäß S. 762 bei einem Ungleichförmigkeitsgrade δ

$$\varphi \sim \gamma(1 + \tfrac{1}{2}\delta) \quad \text{und} \quad \overline{\varphi} \sim \gamma(1 - \tfrac{1}{2}\delta)$$

und demnach $\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \overline{\varphi}^2) = \delta \,.\, \gamma^2$.

Da es sich bei der Bestimmung von μ_1 nur um einen Überschlag handelt, so kann man die Reibungen gegen die Massenwiderstände unberücksichtigt ($f = f' = 0$) lassen. Außerdem darf man die Hammermasse μ_2 gegen die Masse der Welle μ_1 in $\mu_1 + \mu_2$ vernachlässigen, und endlich ist $\varphi \sim \gamma$ und $\overline{\varphi} \sim \gamma$.

Unter diesen Voraussetzungen hat man, wenn man noch $\mathfrak{T}r_1 = \mu_1 r_1^2$ setzt,

$$\delta\gamma^2\mu_1 r_1^2 \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{Gws}{r_2} + \tfrac{1}{2}r_1^2\gamma^2\frac{\mu_2^3}{\mu_1^2} + \tfrac{1}{2}r_1^2\gamma^2\mu_2$$

$$= \frac{Gws}{r_2} + \tfrac{1}{2}r_1^2\gamma^2\left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} + \mu_2\right)$$

$$= \frac{Gws}{r_2} + \tfrac{1}{2}r_1^2\gamma^2\mu_2\left[1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2\right].$$

Da $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ ein verhältnismäßig kleiner Bruch ist, so hat die eckige Klammer der rechten Seite angenähert den Wert 1, und man hat schließlich, da $w = \frac{2\pi r_1}{m} \cdot \frac{1}{\alpha}$ ist,

$$\mu_1 \sim \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi r_1 \,.\, s \,.\, G}{r_2(r_1\gamma)^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \mu_2.$$

Bringt man die Masse der Welle von μ_1 in Abzug, so erhält man die gesuchte Masse des Schwungrings bezw. der Schwungringe, falls die Welle mehrere Hämmer treibt. Die weitere Rechnung erfolgt dann gemäß S. 792.

* *
*

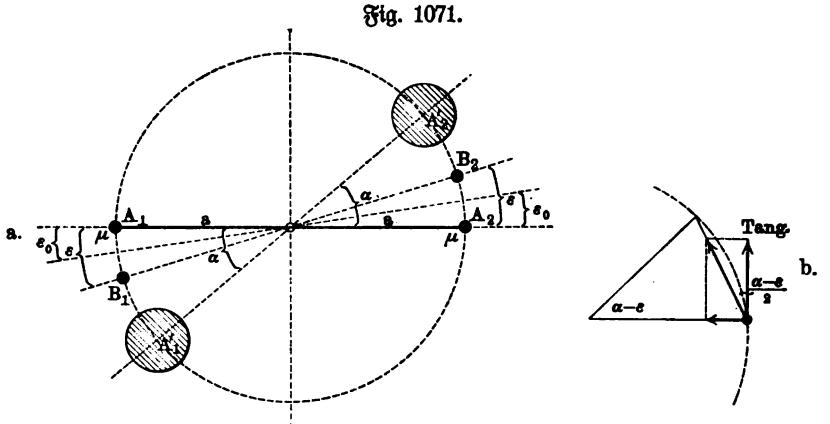
31. Bestimmung der Dichtigkeit der Erde bezw. der Gravitationskonstante k durch Drehungsschwingungen. Die Dichtigkeit der Erde, durch welche der Zahlenwert k für die gegenseitige Anziehung zweier Massen (vergl. S. 279) bestimmt ist, kann auf verschiedene Weisen durch Versuche festgestellt werden.

Die älteste derartige Methode stammt von Maskelyne (und Hutton). Nach ihr bestimmt man die Polhöhen für zwei Punkte desselben Parallelkreises, von denen der eine nahe an einem isolierten Gebirgsstocke (Shehallien in Portshire) liegt, während der andere frei gelegen ist.

Der Unterschied dieser Polhöhen stimmt mit der Ablenkung überein, welche ein Fadenpendel in der Nähe des Gebirgsstockes durch diesen erfährt, und zwar stimmt die Fadenrichtung überein mit der Richtung der Resultante aus der Anziehung des Gebirgsstockes und der des Erdcentrums; demnach läßt sich aus der Masse des Gebirgsstockes und der Lage des anziehenden Centrums in ihm (Bestimmung von Hutton) die Masse der Erde (Maskelyne) zahlenmäßig darstellen und damit ihre Dichtigkeit.

Später benutzte Airy zu dem gleichen Zwecke die Veränderung der Fallbeschleunigung, indem er diese einmal am oberen Rande (g) und einmal auf dem Boden (g') eines Schachtes feststellte. Ist h die Tiefe des Schachtes, so ist g' durch eine Kugel vom Radius $R' = R - h$ bestimmt, falls R den Radius der Erde bezeichnet, und demnach entspricht g' am Rande des Schachtes der Wert $g' \frac{R'^2}{R^2}$, so daß $g - g' \frac{R'^2}{R^2}$ auf Rechnung der Schale von der Dicke h kommt. Stellt man die mittlere Dichtigkeit der Schale auf Grund

Fig. 1071.



der Kenntnis von den Gebirgsmassen an der Oberfläche der Erde fest, so kann man nunmehr auf die mittlere Dichtigkeit des Kerns und damit auf die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde schließen.

Im Gegensatz zu diesen Methoden benutzt Cavendish die in § 174 behandelten Drehungsschwingungen, um unmittelbar k und damit mittelbar auch die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Bringt man bei dem Horizontalpendel der Fig. 811 zwei gleiche Kugeln von der Masse m bezw. an die Stellen A_1' und A_2', so ziehen diese die Kugeln A_1 und A_2, von denen jede die Masse μ haben mag, an, und zwar ist die entsprechende Kraft bei einer Entfernung r der Centren der Kugelpaare (m und μ) für jedes derselben gemäß S. 279

$$k \cdot \frac{m\mu}{r^2}.$$

Bildet [(vergl. Fig. 1071) die Achse $A_1'A_2'$ des Kugelsystems von der Masse m mit der Ruhelage A_1A_2 des Kugelsystems von der Masse μ den

Winkel α, so ist die ursprüngliche Entfernung A_1A_1' bezw. A_2A_2' der Centren der Kugelpaare $2a\sin\frac{1}{2}\alpha$, während sie für eine, der Anziehung entsprechende Verringerung von α um ε den Wert $2a\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$ annimmt. Da die Richtung der anziehenden Kraft für die Stellung ε durch $A_1'B_1$ bezw. $A_2'B_2$ gegeben ist, so ist deren tangentiale Komponente (vergl. Fig. 1071 b a. v. S.)

$$k\frac{m\mu}{[2a\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)]^2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon).$$

Bei den geringen Abständen von m und μ, welche in den Versuchen verwendet werden, darf man sich mit einer ersten Annäherung begnügen, wonach $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\sim 1$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\sim arc\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$ ist. Unter dieser Voraussetzung wird die tangentiale Komponente der Anziehung

$$k\frac{m\mu}{a^2\,.\,arc^2(\alpha-\varepsilon)}.$$

Da

$$\frac{1}{\alpha-\varepsilon}=\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)}=\frac{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}{\alpha\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)}$$

ist, so ist diese tangentiale Komponente auch darstellbar als

$$k\frac{m\mu\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2}{a^2\,.\,arc^2\alpha\,.\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)^2}$$

und geht also in erster Annäherung über in

$$k\frac{m\mu\left(1+\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right)}{a^2\,arc^2\alpha}.$$

Da die Torsion des Cylinders MN der Anziehung mit dem Momente

$$\frac{G\,.\,\mathfrak{T}r_0\,.\,arc\,\varepsilon}{l}$$

entgegenwirkt (vergl. S. 1109), so entspricht dieser Verdrehung für den Kreis der Fig. 1071 eine Tangentialkraft

$$\frac{G\,.\,\mathfrak{T}r_0\,.\,arc\,\varepsilon}{l\,.\,a}.$$

Für die Stellung ε ist also eine Tangentialkraft

$$\frac{km\mu\left(1+\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right)}{a^2arc^2\alpha}-\frac{G\mathfrak{T}r_0\,arc\,\varepsilon}{l\,.\,a}=k\frac{m\mu}{a^2arc^2\alpha}-arc\,\varepsilon\left[\frac{G\mathfrak{T}r_0}{l\,.\,a}-\frac{2km\mu}{a^2arc^3\alpha}\right]$$

anzusetzen, welche also die Form $p-q\,.\,arc\,\varepsilon$ hat.

Die Ruhelage (ε_0) der Vorrichtung wird durch den Nullwert dieser Tangentialkraft bestimmt, d. h. es ist

$$arc\,\varepsilon_0 = \frac{p}{q}$$

für

$$p = k\frac{m\mu}{a^2\,arc^2\,\alpha} \quad \text{und} \quad q = \frac{G\mathfrak{T}r_0}{l\,.\,a} - \frac{2\,km\mu}{a^3\,arc^3\,\alpha}.$$

Bestimmt man also durch Versuche ε_0, so ist damit k gegeben. Bei Ausführung der Versuche zeigt es sich, daß ε_0 wegen der stets vorhandenen kleinen Schwingungen des Horizontalpendels schwer zu bestimmen ist, und infolgedessen beobachtet man, anstatt ε_0 zu messen, überhaupt die Schwingungen des Pendels um seine Ruhelage (ε_0).

Der oben aufgestellte Ausdruck für die Tangentialkraft der Pendelbewegung $p - q\,.\,arc\,\varepsilon$ geht durch Einführung von $p = q\,.\,arc\,\varepsilon_0$ über in

$$-q\,(arc\,\varepsilon - arc\,\varepsilon_0) = -q\,.\,arc\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

und demnach läßt sich die Tangentialbeschleunigung für die Bewegung von μ gegen m darstellen als

$$-\frac{q}{\mu}\cdot arc\,(\varepsilon - \varepsilon_0) = -\frac{q}{a\mu}\cdot a\,.\,arc\,(\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Da diese Beschleunigung proportional ist zu der auf dem Kreise gemessenen Entfernung $a\,.\,arc\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$ der Kugel von der Masse μ aus ihrer Ruhelage, so ist deren Schwingung eine harmonische Schwingung mit der Konstante $\frac{q}{a\mu}$ und demnach beträgt die Dauer einer Doppelschwingung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\mu}{q}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{G\mathfrak{T}r_0}{\mu l a^2} - \frac{2km}{a^3\,arc^3\,\alpha}}}.$$

Beobachtet man T, so ist damit k gegeben.

Bei der Vorrichtung von Cavendish war A_1A_2 in Fig. 811 ein Stab aus Tannenholz, der am Ende kleine Kugeln trug, während MN durch einen Draht gebildet wurde, die Massen m waren Bleikugeln von je 158 kg Gewicht; die Schwingungsdauer betrug mehrere Minuten.

Aus k folgt gemäß S. 279 die Dichtigkeit d der Erde, auf Wasser bezogen, gemäß

$$d = \frac{3\,g^2}{4\,R\pi\,.\,1000}\cdot\frac{1}{k},$$

falls R der Radius der Erde und g die Beschleunigung des freien Falles für die Oberfläche in Metern bezeichnet.

In neuerer Zeit hat v. Jolly die Veränderung von g und zugleich die unmittelbare Massenanziehung benutzt, um die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, indem er eine Hebelwage mit zwei im Abstande von etwa 20 m übereinander angebrachten Schalenpaaren benutzte und außerdem in der

einen der unteren Schalen eine große Bleikugel als anziehendes Centrum anbrachte.

Nach den neuesten Bestimmungen von Richarz und Krigan-Menzel u. a. ist im gewöhnlichen Maßsystem der Physik (Gramm, Centimeter, Sekunde)

$$k = [6{,}685 \pm 0{,}011] \cdot 10^{-8}$$

und demgemäß die relative Dichtigkeit der Erde, auf Wasser bezogen,

$$d = 5{,}505 \pm 0{,}009,$$

wobei $\pm 0{,}011$ bezw. 0,009 den etwa bei der Bestimmung zu erwartenden Fehler angiebt. Man hat also die Werte

$$k = 6{,}69 \cdot 10^{-8} \quad \text{und} \quad d = 5{,}51$$

zu benutzen.

Übungen zur Lehre von der Elasticität und Festigkeit.

Erste Gruppe.

Grundanschauungen und Grundbegriffe.

1. Ein gerader prismatischer Stab aus Schmiedeeisen mit dem Querschnitt $f = 5\,\text{qcm}$ wird durch $P = 5000\,\text{kg}$ in seiner Achse gezogen oder gedrückt. Wie groß ist die Spannung? Vergl. Fig. 573.

$$\sigma = \frac{P}{f} = \frac{5000}{5} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{qcm}} = 1000\ \text{Atm.}$$

2. Welche Belastung muß der Stab der Nr. 1 erhalten, wenn die Spannung zulässig sein soll bei $k_1 = k_2 = k = 750$ Atm.?

$$k = \frac{P}{f} \text{ giebt } P \leqq 3750\,\text{kg}.$$

3. Welchen Querschnitt f müßte der Stab der Nr. 1 erhalten, wenn die Spannung bei 5000 kg Belastung zulässig sein sollte?

$$k = \frac{P}{f} \text{ giebt } f \geqq 6{,}67\,\text{qcm}.$$

4. Der Stab der Nr. 1 zeigt bei einer Länge von $l = 2\,\text{m}$ eine Verlängerung $\lambda = 1\,\text{mm}$, wenn er mit 5000 kg belastet wird. Wie groß ist die Dehnung? Wie groß ist der Elasticitätsmodul? Wie groß der Dehnungskoeffizient? Vergl. S. 841 u. f.

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}1\,\text{cm}}{200\,\text{cm}} = 0{,}0005,$$

$$E = \sigma : \varepsilon = 1000\ \text{Atm.} : 0{,}0005 = 2\,000\,000\ \text{Atm.}$$

$$\alpha = \frac{1}{E} = 0{,}000\,000\,5.$$

5. Wie groß sind σ, E und α für Nr. 4 bei Millimeterrechnung?

$$\sigma = 10\,\frac{\text{kg}}{\text{qmm}},\quad E = 20\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{qmm}},\quad \alpha = 0{,}000\,05.$$

6. Welche Verlängerung zeigt ein Stab aus dem betrachteten Schmiedeeisen, dessen Querschnitt ein Rechteck von den Seiten 10 mm und 40 mm ist, bei einer Länge von 2 m, falls er durch 3000 kg axial belastet wird?

$f = 400\,\text{qmm} = 4\,\text{qcm}$, $\sigma = \frac{P}{f} = \frac{3000}{4}$ Atm., $\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda}{200}$,

$E = \sigma : \varepsilon$ giebt $2000000 = \frac{3000}{4} : \frac{\lambda}{200}$, d. h. $\lambda = \frac{3}{40}\,\text{cm} = 0{,}75\,\text{mm}$.

7. Versuche mit dem betrachteten Schmiedeeisen zeigen, daß die Proportionalität für Spannung und Dehnung bei $f = 5\,\text{qcm}$ für eine Belastung von 7500 kg aufhört. Wie groß ist die Grenzspannung? Vergl. Fig. 592.

$$\sigma_p = \frac{7500}{5} = 1500 \text{ Atm.}$$

8. Durch welche Belastung wird in dem Stabe der Nr. 6 die Grenzspannung erzeugt?

$$1500 = \frac{P}{4} \text{ giebt } P = 6000\,\text{kg}.$$

9. Versuche mit dem betrachteten Schmiedeeisen zeigen, daß deutliche Zerstörung des Materials eintritt bei $f = 5\,\text{qcm}$ für einen Zug von 20 000 kg. Wie groß ist die Bruchspannung (Festigkeit)? Vergl. § 123.

$$K_1 = \frac{20000}{5} = 4000 \text{ Atm.}$$

10. Durch welche Belastung wird in dem Stabe der Nr. 6 die Bruchspannung erreicht?

$$4000 = \frac{P}{f} \text{ giebt } P = 16\,000\,\text{kg}.$$

11. Bei dem Stab der Nr. 4, dessen Querschnitt ein Rechteck von den Seiten 5 cm und 1 cm ist, zeigt die längere Rechteckseite eine Verkürzung um 0,0075 mm. Wie groß ist der Koeffizient m der Querdehnung? Vergl. S. 830.

$$\varepsilon_q = \frac{0{,}000\,75}{5} = 0{,}000\,15.$$

Da $\varepsilon = 0{,}0005$ ist, so folgt aus $\varepsilon_q = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon$ der Wert $\frac{1}{m} = 0{,}3$ oder $m = \frac{10}{3}$.

12. Graphische Darstellung für ε und ε_q gemäß Fig. 585.

13. Wie groß ist für das betrachtete Schmiedeeisen der Elasticitätsmodul G des Schubes? Vergl. S. 842.

$$G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E = \tfrac{5}{13} E \sim 770\,000 \text{ Atm.}$$

14. Wie groß ist das Maximum der Schiebung für den Stab der Nr. 1? Vergl. S. 824 und S. 839, sowie S. 854.

$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma = 500$ Atm. tritt ein für Ebenen, welche die Stabachse unter 45° schneiden. Aus $G = \tau : \vartheta$ folgt für τ_{max} der Wert $\vartheta_{max} = 0{,}000\,65$. Dieser Arcus entspricht in Graden dem Werte $\frac{0{,}000\,65}{2\pi} \cdot 360^0 = 0^0\,2'\,15''$. Daraus ist die Zulässigkeit der Vertauschung von $arc\,\vartheta$ mit $tng\,\vartheta$ oder $sin\,\vartheta$ ersichtlich.

15. Eine Kraft von 1000 kg wirkt im Schwerpunkt einer ebenen Fläche von 5 qcm unter einem Winkel von 60° gegen diese. Wie groß sind Normalspannung und Tangentialspannung unter Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung über die Fläche? Vergl. Fig. 575.

$$\sigma = \frac{1000 \,.\, \sin 60^0}{5} = 173{,}2 \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{1000 \,.\, \cos 60^0}{5} = 100 \text{ Atm.}$$

16. Sind die Spannungen der Nr. 15 bei dem betrachteten Schmiedeeisen zulässig? Vergl. S. 855.

Da $k = 750$ Atm. und $t = k_s = \frac{m}{m+1} \cdot k$ für $m = \frac{10}{3}$ den Wert 577 Atm. hat, so sind beide Spannungen zulässig.

17. Ein einfacher Spannungszustand für Schub ist durch die Spannung $\tau = 250$ Atm. bestimmt. Welches ist die zugehörige Spannungsellipse?

Gemäß S. 827 ein Kreis mit dem Radius 250 Atm.

18. Ein Bleicylinder wird innerhalb eines, ihn eng umschließenden stählernen Hohlcylinders in Richtung der Achse mit 100 Atm. gepreßt. Wie groß ist die Spannung senkrecht zum Mantel für $m = \frac{10}{3}$, falls die Formänderungen des Hohlcylinders vernachlässigt werden dürfen? Vergl. Formel Nr. 268).

Fällt $[\sigma_1]$ in die Richtung der Achse, so ist $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, und man hat

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 = 0 = \frac{1}{E}\left(\sigma - \frac{\sigma + \sigma_1}{m}\right),$$

d. h.

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{m-1} = \frac{300}{7} \text{ Atm.} \sim 43 \text{ Atm.}$$

Es liegt also ein räumlicher Spannungszustand vor mit den Druckspannungen 100 Atm., 43 Atm., 43 Atm.

19. Wie groß ist die Längsdehnung für den Bleicylinder der Nr. 18 bei $E = 50\,000$ Atm.?

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{50\,000}\left(100 - \frac{600}{7 \,.\, 3^1/_3}\right) = -0{,}001\,49.$$

20. Wie groß sind die reduzierten Spannungen für den Bleicylinder der Nr. 18? Vergl. § 121.

Senkrecht zur Achse hat die Anstrengung den Wert Null, während die reduzierte Spannung für die Richtung der Achse ist

$$E \,.\, \bar{\varepsilon}_1 = 74{,}3 \text{ Atm.}$$

Die Spannung für die Achsenrichtung beträgt also 100 Atm., die Anstrengung nur 74,3 Atm.

21. Unter welcher Bedingung würde das Spannungsellipsoid des Bleicylinders der Nr. 18 in eine Kugel übergehen?

Für $\sigma_1 = \sigma$, d. h. für $m - 1 = 1$ oder $m = 2$.

22. Wie groß ist die (größte) Anstrengung für ein Material ($m = \frac{10}{3}$),

in welchem sich eine Zugspannung von 200 Atm. und eine Zugspannung von 300 Atm. senkrecht durchkreuzen? Vergl. § 121.

$$300 - \frac{200}{3^1/_3} = 240 \text{ Atm.}$$

23. Fig. 592 ist für Schmiedeeisen zu entwerfen bei $E = 2000000$ Atm. und $\sigma_p = 1500$ Atm.

24. Fig. 593 ist für Gußeisen zu entwerfen gemäß den Beziehungen zwischen ε und σ auf S. 844 und 845.

Zweite Gruppe.

Beanspruchung durch Zug und Druck.

25. Welche axiale Belastung bringt bei einem geraden quadratischen Stahlstabe ($E = 2250000$ Atm.) von 2,6 cm Seite und 3,14 m Länge eine Verlängerung von 2 mm hervor?

9688 kg.

26. Welche Verlängerung erleidet ein Eisendraht ($E = 2100000$ Atm.) von 2 qcm Querschnitt und 6,3 m Länge durch eine (axiale) Belastung von 1000 kg?

$$\lambda = 1{,}5 \text{ mm.}$$

27. Wie groß ist der Durchmesser einer cylindrischen Stange aus Schmiedeeisen ($E = 2000000$ Atm.) für eine axiale Belastung von 15000 kg zu nehmen, wenn eine Dehnung $\varepsilon = \frac{1}{3000}$ als zulässig gilt?

$$\sigma = \frac{15000}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \tfrac{1}{3000} \text{ giebt gemäß } \sigma : \varepsilon = E$$

$$\frac{\pi}{4} d^2 = 22{,}5 \text{ qcm, d. h. } d = 5{,}35 \text{ cm.}$$

28. Ist die Spannung einer schmiedeeisernen Stange ($E = 2000000$ Atm.) von 3,2 cm Durchmesser bei einem axialen Zuge von 5300 kg zulässig? $k_1 = 750$ Atm.

$$\sigma = \frac{5300}{8{,}04} \sim 660 \text{ Atm. ist zulässig, weil } 660 < 750 \text{ ist.}$$

29. Ein Dachstuhl übt an seinem Fußende einen Horizontalschub von 10000 kg aus, der durch eine horizontale schmiedeeiserne cylindrische Stange aufgenommen wird. Wie groß ist der Durchmesser zu nehmen für $k_1 = 500$? Welche Verlängerung erleidet sie bei 10 m Länge für $E = 2000000$?

$$d \sim 5 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \lambda = 2{,}5 \text{ mm.}$$

30. Die Hauptstrebe eines Binders, welche in ihrer Achse durch eine Kraft von 10000 kg gedrückt wird, hat gegen das Auflager eine Neigung von 45°, während die Zugstange, welche an der Hauptstrebe des Binders angebracht

ist, gegen dieses die Neigung von 15° hat. Welchen Querschnitt muß die Zugstange erhalten für $k_1 = 700$ Atm.?

$$P = 10\,000 \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin 75^0} = 7321\,\text{kg} \quad \text{und} \quad f = \frac{P}{700} = 10{,}5\,\text{qcm}.$$

31. Die senkrechte Auflagerreaktion eines Trägers, dessen Auflagerfläche ein Rechteck von der Breite 30 cm ist, beträgt 6000 kg. Wie weit (x) muß der Träger aufliegen, falls die Auflagerung auf gutem Mauerwerk ($k_2 = 10$ Atm.) ohne Platte erfolgen soll?

$$\frac{6000}{x \,.\, 30} = 10, \text{ d. h. } x = 20\,\text{cm}.$$

32. Um einen Brückenträger mit einer senkrechten Auflagerreaktion von 20 000 kg aufzunehmen, wird auf das Ziegelwerk des Pfeilers ein Sandsteinquader und auf diesen eine Platte aus Gußeisen gelegt. Welche Abmessungen sind erforderlich, wenn für Ziegelwerk $k_2 = 10$ Atm., für Sandstein $k_2 = 20$ Atm. ist? Vergl. S. 1429.

Die Platte muß auf den Quader die für diesen zulässige Spannung $k_2 = 20$ Atm. übertragen, d. h. für die Fläche f_1 der Platte gilt

$$\frac{20\,000}{f_1} = 20, \text{ d. h. } f_1 = 1000\,\text{qcm}.$$

Der Quader muß auf das Ziegelwerk die für dieses zulässige Spannung $k_2 = 10$ Atm. übertragen, d. h. für die Fläche f_2 des Quaders gilt

$$\frac{20\,000}{f_2} = 10, \text{ d. h. } f_2 = 2000\,\text{qcm}.$$

Für eine rechteckige Platte wären also z. B. 25 cm und 40 cm, für einen rechteckigen Quader 50 cm und 40 cm als Seitenlängen zu wählen.

33. Das normale Ziegelformat wird durch ein Rechtkant von den Seiten 25 cm, 12 cm, 6,5 cm gegeben, und zwar gilt dabei die Abmessung 25 cm als Maß für die sogenannten Steinstärken. Unter Berücksichtigung der Mörtelfüllung gilt folgende Tabelle:

1 Steinstärke	. . .	25 cm
$1^1/_2$ „	. . .	25 + 12,5 + 0,5 = 38 cm
2 „	. . .	50 + 1,0 = 51 cm
$2^1/_2$ „	. . .	50 + 12,5 + 1,5 = 64 cm.

Welche Tragfähigkeit haben demnach quadratische Pfeiler von 1, $1^1/_2$, 2,... Steinstärken bei gutem Material ($k_2 = 10$ Atm.)?

$$10 \,.\, \overline{25}^2,\ 10 \,.\, \overline{38}^2,\ 10 \,.\, \overline{51}^2,\ \ldots\ \text{kg}.$$

34. Welche Druckbelastung P ist für eine Säule aus Eichenholz von 15 qcm ($E = 120\,000$) zulässig, wenn die Verkürzung $\frac{1}{1200}$ der Länge betragen darf?

Aus $\sigma = \frac{P}{15}$ und $\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2000}$ folgt mit $\sigma : \varepsilon = E$

$$P = 1500\,\text{kg}.$$

35. Welche Druckbelastung P ist für einen Würfel aus Granit von 1,1 m Seite erlaubt? $k_2 = 37$ Atm.

$$P = 447\,700 \text{ kg}.$$

36. Welche Druckbelastung P ist für eine cylindrische Säule aus Sandstein bei einem Durchmesser von 31,4 cm erlaubt? $k_2 = 29$ Atm.

$$P = 22\,457 \text{ kg}.$$

37. Welche Durchmesser d_1 und d_2 muß eine gußeiserne Hohlsäule bei 10 000 kg Druckbelastung für $d_1 : d_2 = 5 : 3$ erhalten? $k_2 = 750$ Atm.

$$10000 = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) \,.\, 750.$$

$$d_1 = 5{,}21 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d_2 = 3{,}13 \text{ cm}.$$

38. Welchen Durchmesser erhält ein Hanfseil bei einer Belastung P für $k_1 = 102$ kg bezw. $k_1 = 37$ kg?

$$d = \sqrt{\frac{P}{80}} \text{ bezw. } d = \sqrt{\frac{P}{29}}.$$

39. Welchen Durchmesser muß das Rundeisen einer gewöhnlichen Kette haben, falls sie die Belastung P tragen soll für $k_1 = 700$ kg?

Wegen der Zerstörung in zwei Querschnitte ist $\frac{1}{2}P = \frac{\pi}{4}d^2 \,.\, 700$, d. h. $d = \sqrt{\frac{P}{1100}}$.

40. Eine Schraube vom Spindeldurchmesser d soll bei $k_1 = 100$ Atm. die Zugbelastung P tragen. Welchen Wert erhält man für d bei einem ersten Überschlage?

$$P = \frac{\pi}{4}d^2 \,.\, 100, \text{ d. h. } d = \sqrt{\frac{P}{79}}.$$

41. Welche Breite b erhält ein Riemen aus Kuhleder von der Stärke 4 mm, der bei halbem Umschluß einen Druck P übertragen soll? $f = 0{,}28$ und $k_1 = 54$.

Die Spannung des ziehenden Endes ist $\frac{P \,.\, e^{f \,.\, \text{arc}\,\alpha}}{e^{f \,.\, \text{arc}\,\alpha} - 1} = 1{,}7\,P$.

Rechnet man der Sicherheit wegen $2P$ statt $1{,}7\,P$, so ist demnach

$$\frac{2\,P}{b \,.\, 0{,}4} = 54, \text{ d. h. man hat } b \sim \tfrac{1}{11}P.$$

42. Für eine bestimmte Holzsorte ist $k_1 = 80$ Atm. und $K_1 = 800$ Atm. Welche axiale Belastungen entsprechen diesen Spannungen bei einem geraden Stabe von rechteckigem Querschnitt mit den Abmessungen 13,7 cm und 19,6 cm?

$$21\,482 \text{ kg} \quad \text{und} \quad 214\,816 \text{ kg}.$$

43. Welche Änderung zeigen die Ergebnisse von Nr. 4 bei Berücksichtigung des Eigengewichtes G, falls das specifische Gewicht des Eisens 7,8 ist?

In Grammen ist $G = 200 \,.\, 5 \,.\, 7{,}8$ und demnach ist

$$G = \frac{200 \cdot 5 \cdot 7{,}8}{1000} = 7{,}8\,\text{kg}.$$

Für den unteren Querschnitt bleibt σ unverändert, während für den oberen

$$\sigma_{max} = \frac{5007{,}8}{5} = 1001{,}56 \text{ Atm. ist.}$$

Für die Verlängerung gilt gemäß Formel 276)

$$\lambda = \frac{(5000 + 3{,}9)\,200}{5 \cdot 2000000} = 1 + 0{,}00078\,\text{mm}.$$

44. Welche Änderungen zeigen die Ergebnisse von Nr. 42 für eine Stablänge von 15,7 m bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, falls das specifische Gewicht des Holzes 0,62 ist?

21221 kg und 214555 kg.

45. Bei welcher Länge zerreißt eine senkrecht aufgehängte Bleistange vom specifischen Gewicht 11,4 durch ihr eigenes Gewicht? $K_1 = 130$ Atm.

Für l in Centimetern und f in Quadratcentimetern ist $G = l \cdot f \cdot 11{,}4$ in Grammen, so daß der obere Querschnitt in Atmosphären die Spannung $\frac{l \cdot f \cdot 11{,}4}{1000} : f = \frac{l \cdot 11{,}4}{1000}$ hat.

Aus $K_1 = \frac{l \cdot 11{,}4}{1000}$ folgt $l \sim 11400\,\text{cm} = 114\,\text{m}$.

46. Welches ist die größte zulässige Höhe einer Säule aus Basalt vom specifischen Gewicht 2,8? $K_2 = 197$ kg.

Aus $K_2 = \frac{l \cdot 2{,}8}{1000}$ folgt $l \sim 70360\,\text{cm} = 703{,}6\,\text{m}$.

47. Welche Stärke erhält jede der vier Säulen einer hydraulischen Presse, deren Preßstempel 30 cm Durchmesser hat, wenn der größte Druck im Preßcylinder 270 Atm. im Sinne der Physik beträgt? $k_1 = 700$ Atm.

In der Physik entspricht 1 Atm. dem Barometerstande von 760 mm bei Quecksilberfüllung, so daß der Druck auf 1 qcm bei einem specifischen Gewicht 13,6 des Quecksilbers $1 \cdot 76 \cdot 13{,}6 = 1{,}0336\,\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$ beträgt, während in der Technik 1 Atm. $= 1\,\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$ gesetzt wird.

$$d \sim 9{,}5\,\text{cm}.$$

48. Bei einer Schachtpumpe von 30 cm Kolbendurchmesser und 140 m Förderhöhe beträgt die Länge des Gestänges 1,12 der Förderhöhe. Wie stark ist ein schmiedeeisernes Gestänge bei quadratischem Querschnitt zu konstruieren, wenn die Widerstände ein Sechstel des Wassergewichts betragen? $k_1 = 650$ Atm.

Die Belastung P und das Gewicht G des Gestänges, dessen Länge $140 \cdot 1{,}12 = 156{,}8$ m beträgt, sind bezw.

$$P = (1 + \tfrac{1}{6})\,15^2\pi \cdot 14000 \cdot \tfrac{1}{1000} = 11545\,\text{kg}$$

und

$$G = \frac{f \,.\, 15680 \,.\, 7{,}8}{1000}\,\text{kg}.$$

Aus $\frac{P+G}{f} = 650$ folgt $f = 21{,}88\,\text{qcm}$, so daß die Seite des Quadrats zu 4,7 cm zu nehmen ist; außerdem ist $G = 2676\,\text{kg}$.

Die Belastung bewirkt eine gleichmäßige Spannung von 527,65 Atm., während das Gewicht am oberen Querschnitt eine Spannung von 122,35 Atm. hervorruft, welche bis zum unteren Querschnitt stetig auf Null abnimmt, so daß der obere Querschnitt die Spannung 650 Atm. und der untere die Spannung 527,65 Atm. hat, wobei das Material natürlich nicht ausgenutzt wird.

Bei der Vernachlässigung des Eigengewichtes beträgt die Verlängerung 4,137 cm, während außerdem dem Eigengewicht noch eine Verlängerung von 0,479 cm entspricht bei $E = 2\,000\,000$ Atm.

49. Setzt man das Gestänge der Nr. 46 aus 14 Stücken von je 10 m Länge zusammen, so ist gemäß § 128 für $l = 140\,\text{m}$ und $n = 14$ bei Centimetern und Kilogrammen als Einheiten einzuführen

$$\frac{l}{n} \cdot \delta = \frac{14000}{14} \cdot 7{,}8 \cdot \frac{1}{1000} = 7{,}8.$$

Demgemäß ist

$$\frac{P}{k} = \frac{11545}{650} = 17{,}76 \quad \text{und} \quad \frac{k}{k - \frac{l}{n}\delta} = \frac{650}{650 - 7{,}8} \sim \frac{650}{642},$$

d. h. man hat

$$f_n = 17{,}76 \,.\, \left(\tfrac{650}{642}\right)^n.$$

Es ergiebt sich $f_1 = 17{,}98\,\text{qcm}$, $f_2 = 18{,}21\,\text{qcm}$, $\ldots\ f_{14} = 21{,}12\,\text{qcm}$.

50. Man konstruiere im Anschluß an Nr. 49 die Form gleicher Spannung gemäß § 128 und vergleiche sie mit dem Profile in Nr. 49.

51. Ein Pfeiler von rechteckigem Querschnitt aus Ziegelwerk soll aus vier Teilen von je 3 m Höhe zusammengesetzt werden. Welche Größen erhalten die einzelnen Flächen bei einer Druckbelastung von 200 000 kg?

Man hat für $\delta = 1{,}6$ hier $\frac{l}{n} \cdot \delta = 300 \,.\, 1{,}6 \,.\, \frac{1}{1000} = 0{,}48$ und für $k_2 = 10\,\text{kg}$ ferner $\frac{P}{k} = 20000$ und $\frac{k}{k - \frac{l}{n}\delta} = \frac{10}{10 - 0{,}48} = 1{,}05$.

Demgemäß ist $f_1 = 20000 \,.\, 1{,}05\,\text{qcm} = 2 \,.\, 1{,}05\,\text{qm}$, $f_2 = 2 \,.\, \overline{1{,}05}^2\,\text{qm}$ u. s. w.

52. Man konstruiere im Anschluß an Nr. 51 die Form gleicher Spannung gemäß § 128 und vergleiche sie mit dem Profile in Nr. 51.

53. Man berechne die Querschnitte der gezogenen Stangen für den Dachbinder der Fig. 227 auf S. 405 bei Ausführung in Schmiedeeisen ($k_1 = 750$ Atm.).

Die gedrückten Stangen müssen auf Knickung untersucht werden.

54. Man behandele den parabolischen Träger der Fig. 228 auf S. 406 entsprechend Nr. 53.

55. Man behandele die Bogenbrücke der Fig. 229 auf S. 406 entsprechend Nr. 53.

56. Welche Formänderungsarbeit entspricht der Dehnung des Gestänges der Nr. 48 bei $E = 2\,000\,000$ Atm.?

Der Spannung 527,65 Atm. durch die Belastung entspricht für $V = 15\,680 \,.\, 21{,}88$ ccm gemäß Gleichung Nr. 282) die Arbeit 238,8 mkg, während der Spannung 122,35 Atm. durch das Gewicht gemäß Gleichung Nr. 284) die Arbeit 4,41 mkg entspricht, woraus sich die gesamte Arbeit zu 243,21 mkg + 0,479 . 11 545 cmkg = 298,5 mkg ergiebt.

Dieselben Werte ergeben sich auch bei Berechnung der Arbeit aus den erhaltenen Verlängerungen.

Hätte man für gleichmäßige Beanspruchung mit $\sigma = 650$ Atm. gemäß Gleichung Nr. 282) gerechnet, so ergäben sich 362,38 mkg Arbeit, ein Wert, der viel zu hoch ist.

57. Wieviel Doppelschwingungen in der Sekunde macht ein axial belasteter Stab aus Schmiedeeisen gemäß S. 870 für $l = 2$ m, $P = 1000$ kg, $f = 5$ qcm und $E = 2\,000\,000$ Atm.?

35,25.

58. Ein Stab aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 2 m Länge, der einen quadratischen Querschnitt von 4 qcm hat, wird senkrecht zur Achse um 0,5 cm eingesägt und zwar so, daß die Schnittlinie im Querschnitt einer Quadratseite parallel läuft. Die Untersuchung des § 131 ist für diesen Fall bei einer Belastung von 1200 kg durchzuführen.

Es ist $f_1 = 4$ qcm und $f_2 = 3$ qcm, also $n = \frac{4}{3}$ und $\sigma_1 = 300$ Atm. und $\sigma_2 = 400$ Atm. Man hat ferner bei $V = 4 \,.\, 200$ ccm

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{400^2}{E} \cdot V \cdot \tfrac{9}{16}.$$

Für den unverletzten Stab wäre bei einer Spannung von 400 Atm.

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{400^2}{E} \cdot V.$$

Für den Stab, dessen Querschnitt überall auf 3 qcm verringert ist, wäre ebenso

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \frac{400^2}{E} \cdot V \cdot \tfrac{3}{4}.$$

Die drei Arbeiten verhalten sich also wie $\frac{9}{16} : 1 : \frac{3}{4}$.

59. Gemäß Fig. 608 soll die größte Spannung berechnet werden für eine Belastung von 100 kg bei einem Querschnitte von 5 qcm und einer Länge von 4 m, wenn die Fallhöhe 15 cm beträgt.

Es ist $\sigma = \frac{P}{f} = \frac{100}{5} = 20$ Atm. und demnach

$$\bar{\sigma} = 20 + 1732{,}1 \sim 1752 \text{ Atm.}$$

60. Eine Last P, welche auf dem Erdboden ruht, soll durch das Seil einer Winde senkrecht emporgezogen werden. Welche Spannung $\bar{\sigma}$ erfährt das Seil vom Querschnitt f, wenn es die Last bei einer gespannten Länge l mit einer Geschwindigkeit von $c\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in Bewegung setzt?

Die Last erhält unter Dehnung des Seiles die Energie $\frac{1}{2}\frac{P}{g}c^2$, deren Übertragung eine bestimmte Formänderungsarbeit $\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}\cdot(fl)$ entspricht, so daß $\sigma_0 = c\sqrt{\frac{PE}{gfl}}$ ist, während außerdem die Spannung $\frac{P}{f} = \sigma$ in Ansatz zu bringen ist. Man hat also [1])

$$\bar{\sigma} = \sigma + c\sqrt{\frac{\sigma E}{gl}}.$$

Hat das Seil einen Durchmesser von 30 mm, so ist bei $E = 700000$ Atm. für $P = 6000$ kg und $c = 10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $l = 10$ m

$$\sigma = 848{,}8 \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} = 25458{,}8 \text{ Atm.}$$

61. Ein Rechtkant aus Schmiedeeisen ($E = 2000000$) von den Kanten 2 cm, 3 cm, 4 cm wird senkrecht zu seinen Flächen durch je 4800 kg gezogen. Welche Anstrengungen sind bei gleichmäßiger Verteilung der Spannungen anzusetzen für $m = \frac{10}{3}$? Vergl. S. 874 u. f.

Auf die Flächen von 6 qcm, 12 qcm, 8 qcm kommen bezw. die Spannungen 800 Atm., 400 Atm., 600 Atm., und demnach sind die entsprechenden Anstrengungen

$$800 - \frac{400 + 600}{m} = +500 \text{ Atm.},$$

$$400 - \frac{600 + 800}{m} = -20 \text{ Atm.},$$

$$600 - \frac{800 + 400}{m} = +240 \text{ Atm.}$$

Die entsprechenden Dehnungen sind $+\frac{500}{2000000}, -\frac{20}{2000000}, +\frac{240}{2000000}$.

62. Welche Formänderungsarbeit entspricht dem Ansatz der Aufgabe 61? Nach Formel Nr. 289) gilt für $V = 2 \cdot 3 \cdot 4$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{E}\cdot 268000 \cdot V.$$

63. Welche Flächendehnungen treten bei Aufgabe 61 auf? Nach Formel Nr. 291) gilt

$$\frac{+500 - 20}{E}, \quad \frac{-20 + 240}{E}, \quad \frac{+240 + 500}{E}.$$

[1]) Vergl. dazu die damit übereinstimmende Formel Grashofs für einen seigeren Schacht in dessen Festigkeitslehre (Arbeit der Zug- oder Druckelasticität).

64. Welche Volumendehnung tritt bei Aufgabe 61 auf?

Nach Formel Nr. 292) gilt

$$\frac{+500 - 20 + 240}{E} = \frac{720}{E}.$$

Dritte Gruppe.

Beanspruchung durch Schub.

65. Eine einschnittige Nietung von drei Nieten soll für eine Scherkraft von 5100 kg hergestellt werden. Welchen Durchmesser erhalten die Niete, wenn für 1 qcm des Nietquerschnittes 450 kg als zulässige Beanspruchung gelten?

$$d = 2{,}2 \text{ cm}.$$

66. Eine zweischnittige Nietung von vier Nieten soll für eine Scherkraft von 12000 kg hergestellt werden. Welchen Durchmesser erhalten die Niete, wenn für 1 qcm des Nietquerschnittes 400 kg als zulässige Beanspruchung gelten?

$$d = 2{,}2 \text{ cm}.$$

67. Welche Kraft P ist erforderlich zum Lochen eines Bleches von 1 cm Stärke, wenn der Lochdurchmesser 2 cm beträgt? $T = K_s = 3500$ kg.

Die Scherfläche ist ein Cylindermantel von 2 cm Durchmesser und 1 cm Höhe und demnach ist

$$P = K_s \,.\, (2 \,.\, 1 \,.\, \pi) \,.\, 1 = 22000 \text{ kg}.$$

68. Welchen Durchmesser erhält der Bolzen[1]) eines Gelenkes, welches als zweischnittige Nietung aufgefaßt werden kann, für eine Scherkraft von 10050 kg, falls für 1 qcm des Querschnittes 400 kg als zulässige Beanspruchung gelten?

$$d = 4 \text{ cm}.$$

69. An den Enden eines Balkens sind rechtkantige Löcher eingestemmt, um geeignete Streben aufzunehmen. Welche Entfernung müssen die äußeren Wandungen der Löcher von den Balkenenden haben, falls die Streben einen Horizontalschub $[P]$ übertragen bei einer Lochbreite b und einer Lochtiefe h?

Für die Entfernung x haben die drei Flächen, in welcher Abscherung stattfinden kann, die Größen xh, xh und xb und demnach ist

$$P \sim x(2h + b) \,.\, t.$$

Für $b = 4$ cm, $h = 8$ cm und $t = 40$ Atm. ist bei $P = 800$ kg demnach $x = 1$ cm; bei Ausführung wird x aus konstruktiven Gründen stets größer gehalten.

70. Welche Werte von t und G entsprechen für $m = \frac{10}{3}$ der Angabe $k_1 = 750$ Atm. und $k_2 = 500$ Atm. bei $E = 1000000$?

[1]) Vergl. hierzu Anwendung Nr. 3 auf S. 1439.

Für die Bildung von t iſt der kleinere der Werte k_1 oder k_2 zu wählen.

Es iſt nach Formel Nr. 270) oder Nr. 294) bezw. Nr. 266) oder gemäß S. 885

$$t = \tfrac{10}{18} \cdot 500 \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad G = \tfrac{5}{18} \cdot 1\,000\,000 \text{ Atm.}$$

Welche Formänderungsarbeit iſt anzuſetzen?

Nach Formel Nr. 296) gilt

$$\mathfrak{A} = \tfrac{5}{26} \cdot V.$$

71. Wenn in Fig. 617 die Zugſpannungen $\sigma_1 = 500$ Atm. und $\sigma_2 = 300$ Atm. auftreten, welche Beanſpruchung entſpricht dann dem Schnitt $\delta = 30^0$?

Nach Formel Nr. 297 a) iſt

$$\sigma' = 400 - 100 \cdot \cos 60^0 = 350 \text{ Atm.}$$
$$\tau' = 100 \cdot \sin 60^0 = 86{,}603 \text{ Atm.}$$

72. Welche Hauptſpannungen u. ſ. w. treten auf, wenn in Fig. 618 die Zugſpannungen $\sigma_1' = 300$ Atm. und $\sigma_2' = 0$ und die Schubſpannung $\tau = 200$ Atm. vorhanden iſt?

Nach Formel Nr. 298) und Nr. 299) gilt

$$\sigma_1 \text{ und } \sigma_2 = 150 \pm 250 = +400 \text{ Atm. und } -100 \text{ Atm.},$$
$$\tau_{max} = 250,$$
$$tng\, 2\delta = -\tfrac{4}{3}.$$

73. Für den Fall der Nr. 72 iſt die Spannungsellipſe zu zeichnen.

74. Welche Formänderungsarbeit entſpricht den Spannungen $\tau_1 = 100$, $\tau_2 = 150$, $\tau_3 = 200$ Atm. für die Fläche eines Rechtkants?

Nach Formel 300) gilt

$$\frac{1}{2G} \cdot 72500 \cdot V.$$

Vierte Gruppe.

Beanſpruchung durch Biegung.

a) **Balkenquerſchnitte.** **75.** Wie groß ſind $\mathfrak{T}r$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für einen Kreis, bei dem $d = 20$ cm iſt?

Nach S. 904, Nr. 14 gilt

$$\mathfrak{T}r \sim 7857 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim 786 \text{ cm}^3.$$

76. Wie groß ſind $\mathfrak{T}r$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für ein Rechteck, bei dem $b = 2$ cm und $h = 3$ cm iſt?

Nach S. 904, Nr. 1 gilt

$$\mathfrak{T}r = 4{,}5 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w} = 3{,}0 \text{ cm}^3.$$

77. Wie groß ſind $\mathfrak{T}r$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w_1}$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w_2}$ für ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Baſis 18 cm und deſſen Höhe 16 cm iſt?

Nach S. 910, Nr. 11 gilt

$$\mathfrak{T}r = 2048\,\text{cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w_1} = 384\,\text{cm}^3 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w_2} = 192\,\text{cm}^3.$$

78. Für einzelne der Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. sind die Zahlenwerte der gebräuchlichen Normalprofiltabellen durch Rechnung herzustellen und zu vergleichen.

79. Für den Träger der Fig. 1072, in welcher die eingeschriebenen Maße Centimeter bedeuten, ist $\mathfrak{T}r$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w_1}$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w_2}$ zu berechnen, falls auch die oberen Winkeleisen die Stärke von 1 cm haben.

Man hat zunächst für den Schwerpunkt

$$x = \frac{33.2.99 + 18.1.97{,}5 + 8.2.93 + 98.1.49 + 16.4.8}{33.2 + 18.1 + 8.2 + 98.1 + 16.4} = 57{,}66\,\text{cm}$$

und

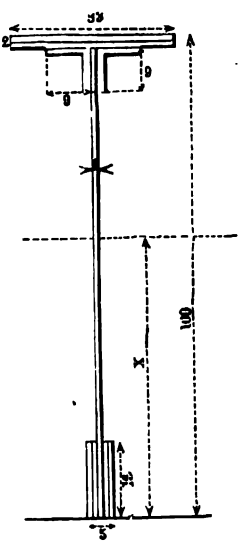
$$100 - x = 42{,}33\,\text{cm}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}r &= \tfrac{1}{8}[33.42{,}33^3 - (33-19)\,40{,}33^3 - (19-3)\,39{,}33^3 \\ &\quad - (3-1).31{,}33^3 + 5.57{,}66^3 - (5-1).41{,}66^3] \\ &= \tfrac{1}{81}[33.127^3 + 5.173^3 - 14.121^3 - 16.118^3 - 2.94^3 - 4.125^3] \\ &= \frac{93485224 - 60564034}{81} = \frac{32921190}{81} \sim 406434\,\text{cm}^4.\end{aligned}$$

Liegt die Zugseite oben, so ist $w_1 = 42{,}33$ cm und $w_2 = 57{,}66$ cm, womit $\frac{\mathfrak{T}r}{w_1}$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w_2}$ gegeben sind.

Fig. 1072.



80. Für den Querschnitt der Fig. 270 liegt der Schwerpunkt angenähert auf der Mitte der Höhe (vergl. S. 450). Wie groß ist für ihn $\mathfrak{T}r$ und die Querschnittszahl?

$$\mathfrak{T}r = 7\,743\,706\,\text{mm}^4 = 774{,}371\,\text{cm}^4$$

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{774{,}371}{6} = 129{,}1\,\text{cm}^3.$$

Das Rechteck $ABCD$ liefert für eine wagerechte Achse durch seinen Schwerpunkt $\frac{93 \cdot 14^3}{12}$ als Trägheitsmoment; da diese Achse von der Neutralen um 53 absteht, so ist hier das Trägheitsmoment für diese

$$\frac{93 \cdot 14^3}{12} + (93 \cdot 14) \cdot 53^2$$

gemäß Gleichung Nr. 198) u. s. w.

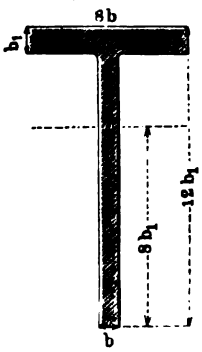
Da $w_1 = w_2$ ist, so fordern die Gleichungen $Mo = k_1 \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für die Zugseite und $Mo = k_2 \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für die Druckseite bei Ausnutzung des Materials $k_1^* : k_2 = 1 : 1$. Vergl. S. 903.

Für Schmiedeeisen und Stahl und auch für Holz ist $k_1 = k_2$ und infolgedessen sind für diese Stoffe Querschnitte zu wählen, bei denen dann $w_1 : w_2 = 1 : 1$ ist, falls man das Material ausnutzen will.

Nennt man solche Querschnitte kurz Querschnitte gleicher Festigkeit für die betreffenden Stoffe, so ist der Querschnitt der Fig. 270 demnach für Schmiedeeisen, Stahl und auch für Holz ein Querschnitt gleicher Festigkeit.

81. Für den Querschnitt der Fig. 1073, bei dem die Abmessungen b und b_1 willkürlich sind, sind die Lage des Schwerpunktes und die beiden Querschnittszahlen zu bestimmen.

Fig. 1073.



Der Abstand x des Schwerpunktes von der unteren Grundlinie folgt nach dem Momentensatze als

$$x = \tfrac{305}{38} b_1 \sim 8 b_1.$$

Hier ist also, falls die Zugseite oben und die Druckseite unten liegt, $w_1 : w_2 = 4 b_1 : 8 b_1 = 1 : 2$.

Man findet ferner $\mathfrak{T}r = 278 b b_1^3$ und

$$\frac{\mathfrak{T}r}{w_1} = 69{,}5\, b b_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{T}r}{w_2} = 34{,}8\, b b_1^2.$$

Für die Zugseite ist also $Mo = k_1 \cdot 69{,}5\, b b_1^2$ und für die Druckseite ist $Mo = k_2 \cdot 34{,}8\, b b_1^2$, so daß bei Ausnutzung des Materials $k_1 : k_2 = 1 : 2$ sein muß. Vergl. S. 903.

Da für Gußeisen die zulässige Druckspannung etwa doppelt so groß ist als die zulässige Zugspannung, so ist der Querschnitt der Fig. 1073 für Gußeisen ein Querschnitt gleicher Festigkeit, falls die Zugseite oben und die Druckseite unten liegt [1]).

Dabei ist natürlich angenommen, daß die Befestigung und die Belastung des Trägers so beschaffen ist, daß die obere Seite des Balkens in ihrem ganzen Verlauf Zugseite und daß die untere Seite des Balkens in ihrem ganzen Verlauf Druckseite ist. Wechselte die Lage der Zugseite und der Druckseite durch Vermittelung eines spannungslosen Querschnittes, so würde eine Ausnutzung nur möglich sein, wenn sich auch zugleich das Profil des Trägers in spannungslosem Querschnitt umkehrte.

Für die Freiträger der Fig. 673 und 674 und für die Zweistützenträger der Fig. 680 und 681 ist eine Ausnutzung möglich, und zwar muß für die Freiträger die Zugseite nach oben, für die Zweistützenträger die Zugseite nach unten kommen. Für die Träger der Fig. 683 und 684, welche einen spannungslosen Querschnitt (N) haben, und für die Träger der Fig. 686 und 687, welche zwei spannungslose Querschnitte (N_1 und N_2) haben, ist eine Ausnutzung des Materials nicht möglich; für Fig. 686 müßte z. B. für die Strecke $E_1 N_1$ und $E_2 N_2$ die Zugseite nach oben und für die Strecke $N_1 N_2$ die Zugseite nach unten kommen.

---

[1]) Natürlich unter der Voraussetzung, daß die Festigkeitsgleichung für isotrope Materialien, welche dem Gesetz von Hooke folgen, auch für Gußeisen wenigstens angenähert angewandt werden darf.

82. Welche Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. sind für Schmiedeeisen u. s. w. Querschnitte gleicher Festigkeit?

Nr. 1 bis 6, 10, 13 bis 15, 18 bis 22.

83. Welche Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. können für Gußeisen unter der in Aufgabe 81 gemachten Voraussetzung Querschnitte gleicher Festigkeit sein? Welche Bedingung muß dabei erfüllt sein?

Nr. 7 bis 9 und 11.

Die Bedingung $w_1 : w_2 = 1 : 2$ ist bei 11 stets erfüllt, bei den andern Profilen giebt der Ansatz $w_1 : w_2 = 1 : 2$ eine Bedingung für die Abmessungen. Ist z. B. bei 7 gegeben b_1, b_2, h_1, so muß h_2 bestimmt werden gemäß dem Ansatz

$$(b_1 h_1)(\tfrac{1}{2} h_1 + h_2) + (b_2 h_2)\tfrac{1}{2} h_2 = (b_1 h_1 + b_2 h_2)\tfrac{2}{3}(h_1 + h_2).$$

84. Für welche Materialien kann Profil 12 ein Querschnitt gleicher Festigkeit sein?

Aus $w_1 : w_2 = (3 b_2 + b_1) : (3 b_2 + 2 b_1)$ folgt für $m = \frac{b_1}{b_2}$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{3 + m}{3 + 2m}.$$

Da m in den Grenzen $0 \ldots \infty$ liegt, so liegt $\frac{w_1}{w_2}$ in den Grenzen $1 \ldots \frac{1}{2}$, d. h. für Materialien, bei denen $k_1 : k_2$ in den Grenzen $1 \ldots \frac{1}{2}$ liegt, kann Profil 12 ein Querschnitt gleicher Festigkeit sein.

85. Für welche Materialien ist Profil 16 ein Querschnitt gleicher Festigkeit?

$$w_1 : w_2 = 0{,}42 : 0{,}58 = 21 : 29.$$

Es muß hier $k_1 : k_2 \sim 21 : 29$ sein.

86. Für einzelne der Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. sind die angegebenen Formeln gemäß den Entwickelungen auf S. 673 u. f. zu beweisen.

87. Für einzelne der Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. ist Tr auf graphostatischem Wege gemäß Fig. 651 oder gemäß Fig. 652 zu bestimmen und ist das Ergebnis mit dem Ergebnis der Rechnung zu vergleichen.

88. Für einzelne der Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. sind die Trägheitsellipsen zu zeichnen gemäß S. 649 u. f.

89. Für einzelne der Profile der Tabelle auf S. 904 u. f. ist statt der Einführung der Trägheitsellipsen die entsprechende Betrachtung gemäß Fig. 654 bis 656 durchzuführen.

90. Entsprechend Aufgabe Nr. 88 und Nr. 89 ist das Profil eines gleichschenkligen Winkeleisens zu behandeln, gemäß Fig. 634 b für $b_1 = h$ und $h_1 = b_2$.

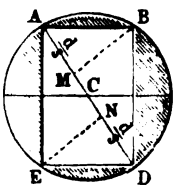
91. Entsprechend Aufgabe Nr. 88 und Nr. 89 ist das Profil eines Z-Eisens zu behandeln.

92. Entsprechend Aufgabe Nr. 88 und Nr. 89 ist das Schienenprofil der Fig. 270 zu behandeln.

93. Aus einem cylindrischen Baumstamm soll ein Balken von rechteckigem Querschnitt (b, h) hergestellt werden, dessen Querschnittszahl $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ ein Maximum ist.

Für d als Durchmesser des Cylinders ist $b^2 + h^2 = d^2$ und demnach muß $bh^2 = b(d^2 - b^2) = bd^2 - b^3$ zu einem Maximum werden. Durch Ableitung folgt $d^2 = 3b^2$, d. h. $b = d\sqrt{\frac{1}{3}}$ und demnach ist $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. Die entsprechende Konstruktion stellt Fig. 1074 dar, in welcher d in drei gleiche Teile zerlegt ist.

Fig. 1074.



b) Freiträger (Fall I). 94. Ein Balken aus Tannenholz vom spezifischen Gewicht 0,62 ist bei rechteckigem Querschnitt ($b = 13$ cm und $h = 20$ cm) als wagerechter Freiträger verwendet mit einer freien Länge von 4 m (= 400 cm). Wie groß ist dessen Tragkraft bei Vernachlässigung des Eigengewichtes a) für Endbelastung, b) für gleichmäßig verteilte Belastung, wenn $k = 73$ Atm. ist? Wie ändern sich die Zahlenwerte bei Berücksichtigung des Eigengewichtes?

Da $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1}{6}bh^2 = 866{,}67\ \overline{\text{cm}}^3$ ist, so gilt für a)

$$P \,.\, 400 = 73 \,.\, 866{,}67, \text{ d. h. } P = 158{,}25\ \text{kg}$$

und für b)

$$\tfrac{1}{2}Q \,.\, 400 = 73 \,.\, 866{,}67, \text{ d. h. } Q = 316{,}50\ \text{kg}.$$

Das Eigengewicht des Balkens ist $400 \,.\, 13 \,.\, 20 \,.\, 0{,}62\ \text{kg} = 64{,}5\ \text{kg}$. Berücksichtigt man das Eigengewicht G, so ist für a)

$$(P + \tfrac{1}{2}G)\,400 = 73 \,.\, 866{,}67, \text{ d. h. } P = 126\ \text{kg}$$

und für b)

$$\tfrac{1}{2}(Q + G)\,400 = 73 \,.\, 866{,}67, \text{ d. h. } Q = 252\ \text{kg}.$$

In beiden Fällen ist $Q = 2P$.

95. Ein schmiedeeiserner Freiträger hat eine freie Länge von 2 m und ist am Ende durch 2000 kg belastet. Welches I-Profil ist für $k = 750$ Atm. zu wählen? Wie groß ist die maximale Durchbiegung für $E = 2\,000\,000$?

$\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{Pl}{k} = 533{,}3\ \overline{\text{cm}}^3$ fordert Normalprofil 28 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 547\ \overline{\text{cm}}^3$ und $\mathfrak{T}r = 7658\ \overline{\text{cm}}^4$.

Die maximale Durchbiegung liegt am Ende und beträgt $\frac{1}{8}\frac{Pl^3}{E\,\mathfrak{T}r} = 0{,}348$ cm.

96. Ein Balken aus Eichenholz vom spezifischen Gewicht 0,69 ist bei rechteckigem Querschnitt ($b = 15{,}5$ cm) als wagerechter Freiträger verwendet mit einer freien Länge von 2 m. Welche Höhe muß der Balken erhalten a) für eine Endbelastung von 250 kg und b) für eine gleichmäßig verteilte Belastung von 250 kg, falls $k = 60$ Atm. ist?

Für a) gilt $250 \,.\, 200 = 60 \,.\, \frac{1}{6}bh^2$, d. h. $h = 18{,}0$ cm und für b) gilt $\frac{1}{2} \,.\, 250 \,.\, 200 = 60 \,.\, \frac{1}{6}bh^2$, d. h. $h = 12{,}7$ cm. Will man das Eigengewicht

G berücksichtigen, so hat man $G = bhl$ für a) in $(P + \frac{1}{2}G)l = k \cdot \frac{1}{6}bh^2$ und für b) in $\frac{1}{2}(P + G) = k \cdot \frac{1}{6}bh^2$ einzuführen, wobei demnach quadratische Gleichungen für h entstehen.

Man rechnet in der Praxis meist für a) so, daß man $G = bhl$ mit $h = 18{,}0$ cm berechnet, wobei $G \sim 39$ kg ist und nun h aus der Gleichung $(P + \frac{1}{2}G)l = k \cdot \frac{1}{6}bh^2$ berechnet, wobei sich $h = 18{,}7$ cm ergiebt; berechnet man mit diesem Werte von h von neuem G und dann wieder h u. s. f., so läßt sich der ursprünglich gefundene Wert von h beliebig verbessern.

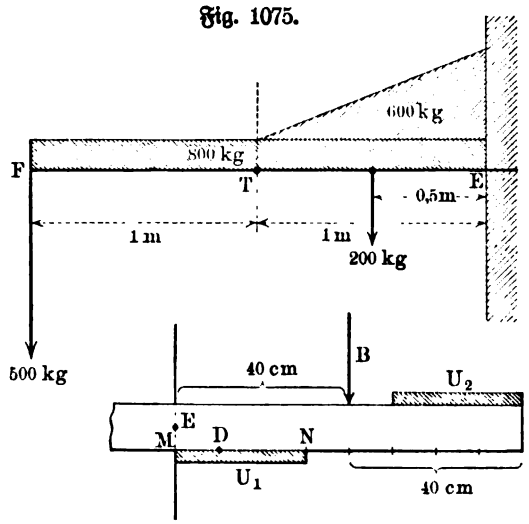
Für b) ergiebt sich ebenso $h = 13{,}7$ cm.

97. Vier Balken aus Eichenholz bilden als wagerechte Freiträger die Unterlage eines Balkons, dessen Boden aus Granitplatten (vom specifischen Gewicht 2,8) von 13 cm Dicke gebildet ist. Welche Abmessungen müssen die Balken für $k = 60$ Atm. erhalten bei $b : h = 1 : 3$, wenn die Balken 2 m freie Länge haben und wenn, senkrecht zu ihnen, die Länge des Balkons 3 m beträgt und wenn ferner für jeden Balken eine Endbelastung von 350 kg in Ansatz gebracht wird?

Die Platten bilden ein Rechtkant vom Gewicht $\frac{200 \cdot 300 \cdot 13 \cdot 2{,}8}{1000} = 2184$ kg, so daß der einzelne Balken 546 kg an gleichmäßiger Belastung und 350 kg als Endbelastung trägt. Demnach ist $(350 + \frac{1}{2} \cdot 546)200 = 60 \cdot \frac{1}{6}bh^2$ bei $b : h = 1 : 3$, woraus $h = 33$ cm und $b = 11$ cm folgt.

98. Welche Abmessungen muß das I-Profil des Freiträgers in Fig. 1075 erhalten für $E = 2000000$ Atm. und $k_b = 1000$ Atm.?

Fig. 1075.



a.

Für die Stelle T gilt

$$Mo = 500 \cdot 1 + 400 \cdot 0{,}5 = 700 \text{ mkg} = 70000 \text{ cmkg},$$

so daß $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 70$ ist, was Profil 14 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 81{,}7$ oder allenfalls Profil 13 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 67$ erfordert.

b.

Für die Stelle E gilt

$$Mo = 500 \cdot 2 + 800 \cdot 1 + 200 \cdot 0{,}5 + 600 \cdot \tfrac{1}{3} = 2100 \text{ mkg} = 210000 \text{ cmkg},$$

so daß $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 210$ ist, was einen Balken vom Profil 20 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 214$ oder zwei Balken vom Profil 16 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 117$ erfordert.

Stützt man gemäß Fig. 1075 b (a. v. S.) das eingemauerte Balkenende von 80 cm durch zwei Platten U_1 und U_2 und wählt man den Drehpunkt für die Berechnung der Gegenbelastung B in D, wobei $MD = \frac{1}{3} MN$ gemäß S. 1138 f., so ist $Mo = 210\,000$ mkg für E und man hat demnach für D als Moment $210\,000 + 2100 \,.\, 10 = 231\,000$ cmkg. Demnach ist

$$B \,.\, 30 = 231\,000 \quad \text{und} \quad B = 7700 \text{ kg}.$$

Haben U_1 und U_2 die Maße 30 cm und 35 cm, so verteilt sich die Belastung $2100 + 7700 = 9800$ kg auf $30 \,.\, 35 = 1050$ qcm Mauerwerk und demnach ist für dieses

$$k = \frac{9800}{1050} \sim 10 \text{ Atm.}$$

c) **Zweistützenträger** (Fall II). **99.** Welche Länge darf ein Zweistützenträger vom rechteckigen Querschnitt ($b = 21$ cm und $h = 27{,}5$ cm) aus Tannenholz ($k = 73$ Atm.) haben, wenn er auf den laufenden Meter mit 630 kg gleichmäßig belastet ist?

Es ist $\gamma = 6{,}3$ kg für Centimeterrechnung und $Q = l\gamma = 6{,}3\,l$, so daß

$$\tfrac{1}{8}(6{,}3\,l)\,l = 73 \,.\, \tfrac{1}{6} b h^2$$

ist, woraus $l = 495$ cm $= 4{,}95$ m folgt.

100. Ein Balken ist dadurch gebildet, daß zwei Schienen vom Profil der Fig. 270 mit den Grundflächen aufeinandergelegt und vernietet worden sind. Welche Länge darf der Balken als Zweistützenträger bei einer Mittelbelastung von 5000 kg haben für $k = 600$ Atm.?

Das Trägheitsmoment einer Schiene für ihre neutrale Achse hat den Wert $774{,}4\ \overline{\text{cm}}^2$. Da die neue Neutrale in der Schienenbasis liegt und zwar parallel zur früheren Neutrale im Abstande 6 cm, so hat für $f = 42$ qcm das Trägheitsmoment einer Schiene den Wert $774{,}4 + 6^2 \,.\, 42 = 2286{,}4\ \overline{\text{cm}}^4$ für die neue Neutrale und es ist also $\mathfrak{T}r = 2 \,.\, 2286{,}4 = 4572{,}8\ \overline{\text{cm}}^4$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{4572{,}8}{12} \sim 381\ \overline{\text{cm}}^3$.

Aus $\frac{1}{4} Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ folgt nun $l = 183$ cm $= 1{,}83$ m.

101. Eine schmiedeeiserne Achse von 5 m Länge trägt in den Entfernungen 0,6 m, 2 m und 3 m von dem einen Ende (1) bezw. die Lasten 600 kg, 1500 kg und 2000 kg. Welche Abmessungen sind bei quadratischem Querschnitt zu wählen für $k = 750$ Atm.?

Es ist $R_1 = 2228$ kg und $R_2 = 1872$ kg.

Die Biegungsmomente für die drei Lastpunkte sind bezw. 1336,8 mkg, 3616,0 mkg und 3744 mkg.

Da Mo_{max} in einem Lastpunkt liegt und da für den letzten Lastpunkt der größte Zahlenwert eintritt, so ist $Mo_{max} = 3744$ mkg $= 374\,400$ cmkg, und man hat also

$$374\,400 = 750 \,.\, \tfrac{1}{6} x^3$$

für x als Seite des quadratischen Querschnittes, woraus $x = 14{,}4$ cm folgt.

Die Vertikalkraft ist zunächst 2228 kg, springt dann auf 2228 — 600 = 1628 kg, dann auf 2228 — 600 — 1500 = 128 kg, dann auf 2228 — 600 — 1500 — 2000 = — 1872 kg, wodurch wiederum gezeigt ist, daß Mo_{max} im Angriffspunkte der Last von 2000 kg liegt.

102. Ein schmiedeeiserner Unterzug von 6 m Länge nimmt fünf Einzellasten von je 4000 kg in gleichen Abständen (1 m) auf. Welches I-Profil ist bei $k = 750$ Atm. zu wählen?

$R_1 = R_2 = 10000$ kg.

Die Vertikalkraft ist zunächst 10000 kg, springt dann auf 10000 — 4000 = 6000 kg, dann auf 10000 — 4000 — 4000 = 2000 kg, dann auf 10000 — 4000 — 4000 — 4000 = — 2000 kg u. s. w., d. h. Mo_{max} liegt unter der mittleren Last.

Für die Mitte ist

$$Mo_{max} = -10000 \cdot 3 + 4000 \cdot 2 + 4000 \cdot 1 = -18000 \text{ mkg}$$
$$= -1800000 \text{ cmkg}$$

und also $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{1800000}{750} = 2400\,\text{cm}^3$, so daß Nr. 47½ mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 2396\,\text{cm}^3$ als ausreichend gelten darf.

103. Welche Last kann eine Röhre aus Gußeisen als Zweistützenträger von 7 m Länge unter der bekannten Voraussetzung [1]) tragen, wenn der Querschnitt 31 cm äußeren Durchmesser und 3 cm Wandstärke hat bei $k_1 = 440$ Atm.?

Es ist $\frac{1}{4} Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{31^4 - 25^4}{31} \cdot \frac{\pi}{32}$, woraus $P = 4243$ kg folgt.

104. Welche gleichmäßige Belastung kann ein Balken aus Gußeisen von 3 m Länge vom Querschnitt der Fig. 1073 unter der bekannten Voraussetzung [1]) als Zweistützenträger tragen, falls $b_1 = b = 3$ cm ist, bei $k_1 = 440$ Atm.?

Es ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w_1} = 69{,}5\, b^3 = 69{,}5 \cdot 27$ und demnach $G = 22018$ kg.

105. Welchen Durchmesser x erhält eine gußeiserne Achse von 6 m Länge bei wagerechter Lagerung unter der bekannten Voraussetzung [1]), falls sie in der Entfernung 2 m von dem einen Ende ein Rad von 600 kg Gewicht trägt für $k_1 = 440$ Atm.?

Es ist $P \frac{l_1 l_2}{l} = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ bei $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = x^3 \cdot \frac{\pi}{32}$ und $l_1 = 200$ cm, $l_2 = 400$ cm und $l = 600$ cm, woraus $x = 12{,}3$ cm folgt.

106. Ein Zweistützenträger ist belastet gemäß Fig. 1076 (a. f. S.). Welche Abmessung ist zu wählen?

Man hat $R_1 = 8500$ kg und $R_2 = 5500$ kg und demgemäß Fig. 1076 b als Darstellung der Vertikalkräfte. Der Punkt N ist demnach bestimmt durch

---

[1]) Vergl. Anmerkung auf S. 1558.

$\frac{2500}{1500} = \frac{z}{1-z}$, d. h. es ist $z = 0{,}625\,\text{m} = 62{,}5\,\text{cm}$ und also $z_1 = 162{,}5\,\text{cm}$ und $z_2 = 237{,}5\,\text{cm}$.

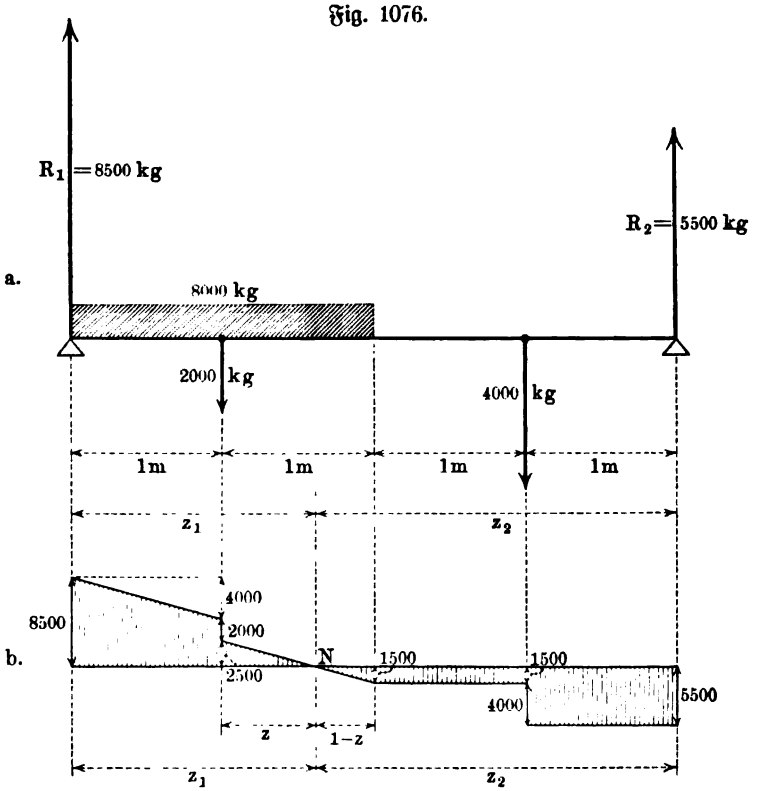
Dem Punkte N entspricht eine Zerlegung der gleichmäßigen Belastung in die Teile $\frac{8000}{200} \cdot 162{,}5 = 6500\,\text{kg}$ und $\frac{8000}{200} \cdot 37{,}5 = 1500\,\text{kg}$.

Für N tritt Mo_{max} ein, d. h. man hat für das linke Trägerstück

$$Mo_{max} = -8500 \cdot 162{,}5 + 2000 \cdot 62{,}5 + 6500 \cdot 31{,}25 = -352400\,\text{cmkg}.$$

Es ist also z. B. als I-Profil zu wählen bei $k = 1000$ Atm. gemäß $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 352{,}4$ die Nr. 24 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 353$.

Fig. 1076.



107. Welche größte Durchbiegung zeigt ein Zweistützenträger von 4 m Länge bei einer Mittelbelastung von 5000 kg und einer gleichmäßigen Belastung von 8000 kg?

Nach Formel Nr. 334) gilt

$$y_{max} = \tfrac{1}{48}(5000 + \tfrac{5}{8} \cdot 8000)\,\frac{400^3}{E\,\mathfrak{T}r}.$$

108. Welche Abmessung muß ein Zweistützenträger aus Schmiedeeisen von der Länge 4 m erhalten, wenn die zulässige Formänderung durch $l = 1000\,d$ bestimmt ist, für $P = 5000$ kg und $Q = 8000$ kg bei $k = 750$?

Gemäß S. 971 gilt

$$\mathfrak{Tr}' \geqq 100 \,.\, \tfrac{25}{8}\, \frac{5000 + \frac{5}{8}8000}{4 \,.\, 750} \,.\, 4^2.$$

d) Einseitig eingespannter Träger (Fall III). **109.** Ein schmiedeeiserner Träger von 4 m Länge, welcher gemäß Fall III befestigt ist, ist

a) im Abstande 1 m von dem eingespannten Ende,

b) im Abstande 1 m von der Stütze

durch 4000 kg belastet.

Welches I-Profil ist zu wählen bei $k = 750$ Atm.?

a) Gemäß S. 955 und 957 ist $l_1 = \frac{3}{4}l$ und $R_1 = \frac{11}{128}P$; gefährlich ist die Einspannungsstelle mit $Mo_E = \frac{21}{128}Pl = 2625$ mkg.

Demnach ist $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{262500}{750} = 346$ und dem entspricht $N \,.\, P$ 24 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 353$.

b) Gemäß S. 955 und S. 957 ist $l_1 = \frac{1}{4}l$ und $R_1 = \frac{81}{128}P$; gefährlich ist der Belastungspunkt mit $Mo_B = -\frac{81}{512}Pl = -2531$ mkg.

Demnach ist $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{253100}{750} \sim 338$ und dem entspricht $N \,.\, P \,.\, 24$ mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 353$.

110. Ein schmiedeeiserner Träger von 3 m Länge, welcher gemäß Fall III befestigt ist, trägt in den Abständen 1 m und 2 m von der Stütze bezw. 2700 kg und 5400 kg und ist außerdem mit 16000 kg gleichmäßig belastet. Welches I-Profil ist zu wählen bei $k = 1000$ Atm.?

Nach S. 957 und 960 setzt sich R_1 zusammen aus $\frac{14}{27} \,.\, 2700 = 1400$, $\frac{4}{27} \,.\, 5400 = 800$ und $\frac{3}{8} \,.\, 16000 = 6000$, d. h. man hat $R_1 = 8200$ kg.

Von der Stütze aus gerechnet beträgt die Vertikalkraft an der ersten Belastungsstelle $8200 - \frac{1}{3} \,.\, 16000 - 2700 = 166^2/_3$, und demnach ändert die gleichmäßige Belastung ($5333^1/_3$) des Mittelstückes die Vertikalkraft von $+ 166^2/_3$ auf $- 5166^2/_3$.

Hat der Nullpunkt der Vertikalkraft von dem ersten Belastungspunkte (von der Stütze aus gerechnet) den Abstand z, so ist also $z : (1 - z) = 166^2/_3 : 5166^2/_3$, d. h. man hat $z = 3{,}125$ cm, und demnach hat die Stelle für Mo_{max} die Entfernung 103,125 cm von der Stütze.

Da 100 cm von der gleichmäßigen Belastung $\frac{16000}{3}$ kg tragen, so kommen $166^2/_3$ kg von dieser auf 3,125 cm und 5500 kg auf 103,125 cm.

Demgemäß ist

$$Mo_{max} = -8200 \,.\, 103{,}125 + 2700 \,.\, 3{,}125 + \tfrac{1}{2} \,.\, 5500 \,.\, 103{,}125$$
$$\sim -553\,594 \text{ cmkg}$$

und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} \sim 553{,}6$.

Anderseits gilt für die Einspannung

$$Mo_E = -8200 \cdot 300 + 2700 \cdot 200 + 5400 \cdot 100 + 16000 \cdot 150$$
$$= +1020000 \text{ cmkg}$$

und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 1020$.

Demnach ist Mo_E gefährlicher als Mo_{max}, und man hat Normalprofil Nr. 36 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 1088$ zu verwenden.

111. Welche größte Durchbiegung zeigt der Träger der Nr. 110, falls die Einzellasten fortfallen, für $E = 2000000$?

Nach Formel Nr. 341) ist zunächst

$$k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 600000 \text{ cmkg} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 600.$$

Demnach ist Profil Nr. 29 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 594$ zu benutzen, für welches $\mathfrak{Tr} = 8619$ ist. Nun ist nach Formel Nr. 342)

$$y_{max} = \frac{0{,}0054 \cdot 16000 \cdot 300^3}{2000000 \cdot 8619} \text{ cm}.$$

e) **Beiderseits eingespannter Träger** (Fall IV). **112.** Ein Balken aus Tannenholz von 4 m Länge und quadratischem Querschnitt ist beiderseits wagerecht eingemauert. Wie groß ist die Seite x des Querschnittes, falls der Balken eine gleichmäßige Belastung von 7500 kg tragen soll und wenn $k = 73$ Atm. ist?

Es ist $\frac{1}{12} Gl = k \cdot \frac{x^3}{6}$, d. h. $x = 27{,}4$ cm.

113. Ein Kornboden ruht auf beiderseits eingespannten Balken aus Eichenholz von 6 m Länge, deren Mitten je 1 m Abstand haben. Welche Höhe x darf eine gleichmäßige Aufschüttung des Korns, von der 1 cbm das Gewicht 800 kg hat, annehmen, falls die Balken ein Rechteck mit $b = 25$ cm und $h = 31$ cm als Querschnitt haben, bei $k = 60$ Atm.?

Ein Balken trägt eine rechtkantige Schicht Korn von den Kanten 6 m, 1 m, x m, so daß $G = 6 \cdot 1 \cdot x \cdot 800$ ist. Man hat nun

$$\tfrac{1}{12} Gl = k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w} \text{ für } \frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \tfrac{1}{6} 25 \cdot 31^2$$

und demnach $x = 1$ m.

114. Ein hohler Balken aus Gußeisen von 20 m Länge ist beiderseits eingespannt und trägt eine Mittelbelastung von 20000 kg. Welche Stärke x muß man dem Querschnitt geben unter der bekannten Voraussetzung [1]), wenn außen $b = 31$ cm und $h = 50$ cm ist, für $k = 440$ Atm.?

Es ist $\frac{1}{8} Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = \frac{1}{6} \frac{31 \cdot 50^3 - (31 - 2x)(50 - 2x)^3}{50}$

und demnach $(31 - 2x)(50 - 2x)^3 \sim 465000$, woraus $x = 8{,}7$ cm folgt.

[1]) Vergl. Anmerkung auf S. 1558.

115. Welche Länge x darf das Stück einer Eisenbahnschiene vom Profil der Fig. 270 haben, welches sich zwischen zwei Querschwellen befindet, falls man dieses Stück als einen beiderseits eingespannten Träger auffaßt, der ein Viertel des Gewichtes G eines Eisenbahnwagens zu tragen hat? $k = 600$ Atm.

Vergl. Übung Nr. 80.

Es ist für Mittelbelastung $\frac{1}{8}(\frac{1}{4} G \,.\, x) = k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}$ und $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} \sim 129$.

Für $G = 28000$ kg ist $x = 88{,}5$ cm.

Dabei bedeutet x den zulässigen Abstand der Querschwellen, falls zwischen je zwei Querschwellen immer nur ein Rad stehen soll.

116. Ein Träger aus Schmiedeeisen von 4 m Länge, der nach Fall IV befestigt ist, trägt in der Entfernung von 3 m vom linken Ende eine Last von 4000 kg und außerdem eine gleichmäßige Belastung von 8000 kg. Welche Abmessung ist zu wählen für $k = 1000$ Atm.?

Für das linke Ende ist $R_1 = 626 + 4000 = 4626$ kg, und demnach geht die Vertikalkraft vom linken Auflager bis zur Belastungsstelle durch die gleichmäßige Belastung von 6000 kg von $+4626$ kg in -1374 kg über; für den Abstand z des Nullpunktes der Vertikalkraft vom linken Ende gilt demnach $z : (3 - z) = 4626 : 1374$, d. h. es ist $z = 2{,}313$ m $= 231{,}3$ cm. Es ist ferner für das linke Ende $D_1 = \frac{3}{16} . 4000 + 2666\frac{2}{3} = 341667$ cmkg und ebenso für das rechte Ende $D_2 = 491667$ cmkg.

Man hat demnach für Mo_{max} bei Benutzung des linken Trägerstücks

$$Mo_{max} = -4626 . 231{,}3 \text{ cm} + \tfrac{1}{2} . 4626 . 231{,}3 + 341667 = -213330 \text{ cmkg}.$$

Es ist demnach D_2 gefährlich und also zu rechnen mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} \sim 492$, so daß mindestens Profil Nr. 27 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 491$ zu wählen ist.

117. Welche größte Durchbiegung entspricht dem Träger der Aufgabe 116, falls die Einzellast beseitigt ist, für $E = 2000000$?

Nach Formel Nr. 356) ist zunächst

$$k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 266667 \text{ cmkg}$$

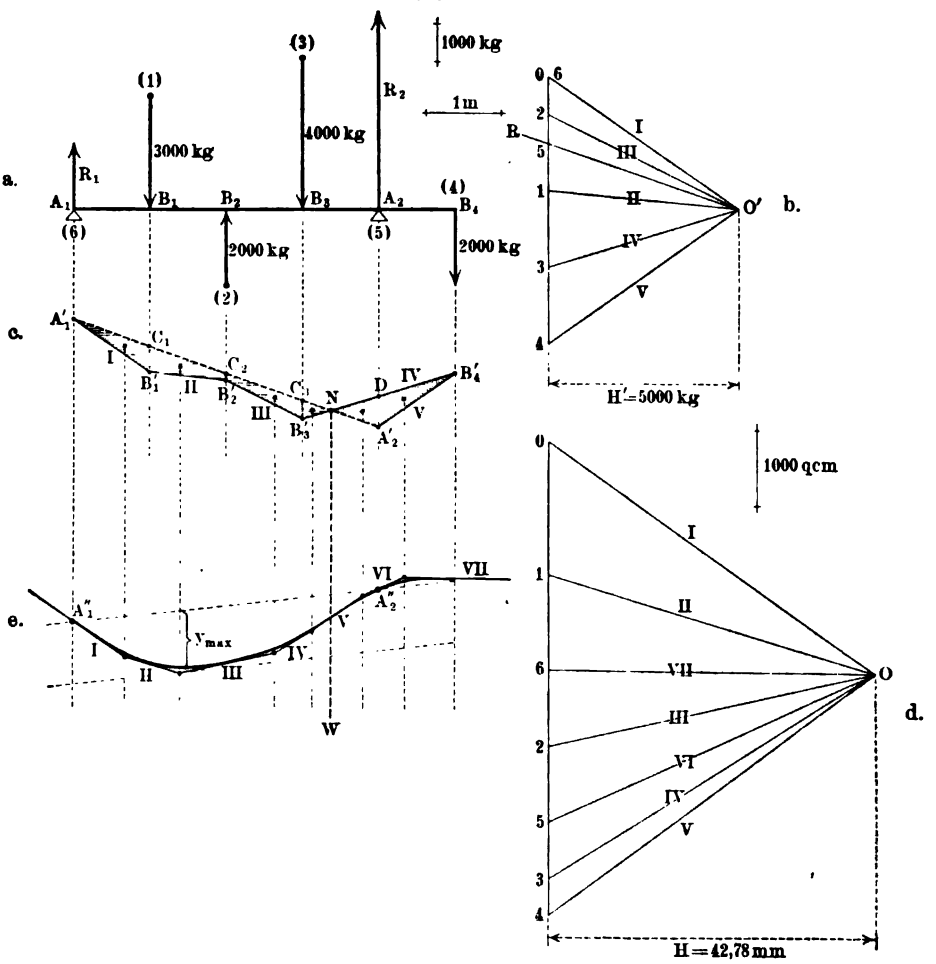
und also $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} \sim 267$, so daß Profil Nr. 22 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 278$ zu wählen ist. Da für dieses Profil $\mathfrak{Tr} = 3055$ ist, so gilt ferner nach Formel Nr. 357)

$$y_{max} = \tfrac{1}{384} \frac{8000 \,.\, 400^3}{2000000 \,.\, 3055} \text{ cm}.$$

f) Graphostatische Behandlung gemäß § 155. 118. Der I-Träger der Fig. 1077a (a. f. S.) ist für $k = 1000$ Atm. und $E = 2000000$ zu behandeln; er ist so gezeichnet, daß 1 m durch 1 cm und 1000 kg durch 5 mm dargestellt sind. Für das erste Seileck wählen wir das Maß der Fig. 1077a und geben der Polentfernung H' die Größe von 25 mm, welche demnach 5000 kg entspricht (vergl. Fig. 1077b). Die offenen Enden des Seilecks (vergl. Fig. 1077c) schneiden die Vertikalen von A_1 und A_2 in A_1' und A_2', so daß damit $A_1'A_2'$ als Schlußlinie bestimmt wird, deren Parallele $O'R$ in

Fig. 1077 b die Reaktion $R_2 = \overline{45}$ und $R_1 = \overline{56}$ abgrenzt; die Ordinaten $C_1 B_1'$, $C_2 B_2'$, ... der Momentenfläche, welche links von N negativ und rechts von N poſitiv iſt, haben bezw. die Längen 0,35 cm, 0,10 cm, 0,25 cm, 0,40 cm und ſtellen alſo 0,35 m u. ſ. w. dar, entſprechen alſo für $H = 5000$ kg den Momenten $-0{,}35 \cdot 5000 = -1750$ mkg, $-0{,}10 \cdot 5000 = -500$ mkg, $-0{,}25 \cdot 5000 = -1250$ mkg, $+0{,}40 \cdot 5000 = +2000$ mkg.

Fig. 1077.



Die Ordinate DA_2', welche $+2000$ mkg entſpricht, ſtellt Mo_{max} dar, d. h. man hat $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 200$, und demnach iſt Profil Nr. 20 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 214$ cm³ und $\mathfrak{T}r = 2139$ cm⁴ zu wählen.

Um die Biegungslinie darzuſtellen, hat man die Momentenfläche der Fig. 1077 c als Belaſtungsfläche anzuſehen. Da 1 m durch 1 cm dargeſtellt

ist, so stellt 1 qmm der Momentenfläche 10000 qmm = 100 cm² dar. Der Einteilung der Momentenfläche, welche durch die Vertikalen der Kräfte und durch N gegeben wird, entsprechen die folgenden Werte. Für $\triangle A_1'C_1B_1'$ hat man $A_1B_1 = 10$ mm als Grundlinie und $C_1B_1' = 3{,}5$ mm als Höhe zu nehmen, so daß dessen Fläche 17,5 qmm beträgt und also 1750 cm² darstellt; für das Trapez $C_1B_1'B_2'C_2$ sind $C_1B_1' = 3{,}5$ mm und $C_2B_2' = 1$ mm als Parallelseiten und $B_1B_2 = 10$ mm als Höhe zu nehmen, so daß dessen Fläche 22,5 qmm beträgt und also 2250 cm² darstellt. Das folgende Trapez hat 17,5 qmm an Fläche und stellt also 1750 cm² dar; da N die Strecke B_3A_2 im Verhältnis 25 : 40 teilt, so hat N von C_3B_3' die Entfernung 3,846 mm und von DA_2' die Entfernung 6,154 mm, und demnach stellen die Dreiecksflächen C_3NB_3' und DNA_2' bezw. 480,7 cm² und 1230,8 cm² dar. Das Dreieck $DA_2'B_4'$ stellt 2000 cm² dar.

Für das Krafteck der Belastungen stellen wir 1000 cm² durch 10 mm dar, so daß also die Belastungen bezw. durch 17,5 mm, 22,5 mm, 17,5 mm, 4,81 mm, 12,31 mm und 20 mm darzustellen sind.

Dabei ist nach S. 989

$$H = \frac{E\mathfrak{T}r}{H'} = \frac{2000000 \,.\, 2139}{5000} = 855\,600 \text{ cm}^2.$$

Es wäre also H durch 8556 mm darzustellen, falls die Ordinaten der Biegungslinie im Maßstabe der Zeichnung erhalten werden sollten.

Für $H = 85{,}56$ mm erhält man die Ordinaten in hundertfacher Vergrößerung, d. h. in natürlicher Größe.

Fig. 1077 d ist mit $H = 42{,}78$ mm gezeichnet, so daß die Durchbiegungen in Fig. 1077 e in doppelter natürlicher Größe erscheinen; die Parallele zu $A_1''A_2''$ bestimmt $y_{max} \sim 8$ mm, d. h. man hat auf eine größte Durchbiegung von etwa 4 mm zu rechnen.

Durch weitergehende Zerlegungen der Fläche in Fig. 1077 c kann man die Biegungslinie der Fig. 1077 e in beliebiger Annäherung erhalten.

119. Ein Zweistützenträger von 4 m Länge hat neben einer gleichmäßigen Belastung von 8000 kg auf den mittleren beiden Metern noch eine gleichmäßige Belastung von 4000 kg zu tragen und wird deshalb auf dieser Mittelstrecke durch einen zweiten Träger verstärkt. Die Aufgabe ist gemäß § 155 zu behandeln, falls die zulässige Beanspruchung mindestens zu 1000 Atm. angenommen werden darf bei $E = 2100000$ und falls I-Profile gewählt werden sollen.

Man hat Profil Nr. 27 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 491$ und $\mathfrak{T}r = 6623$ zu wählen und zur Verstärkung Profil Nr. 20 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 214$ und $\mathfrak{T}r = 2139$ zu nehmen, so daß für die mittleren beiden Meter $\mathfrak{T}r = 8762$ und für die äußeren beiden Meter $\mathfrak{T}r = 6623$ ist.

Für die Konstruktion der Biegungslinie bildet man entweder die verzerrte Momentenfläche gemäß $\frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ als Belastungsfläche für den ganzen

Träger oder man behandelt die Stücke für sich mit Belastungsflächen gemäß *Mo* und verschiedenen Seilecken gemäß *E*Tr.

120 bis 123. Aus jedem der Abschnitte b), c), d), e) dieser Gruppe ist eine Aufgabe gemäß § 155 zu behandeln.

124 bis 127. Aus § 154 sind vier Beispiele gemäß § 155 zu behandeln.

g) Weitere Fälle der Belastung bei einfacher Befestigung. **128.** Ein Freiträger von 2 m Länge trägt $Q = 6000$ kg als Dreieckslast (vergl. Fig. 719). Wie ist für Schmiedeeisen bei einem I-Profil zu dimensionieren für $k = 1000$ Atm. und $E = 2100000$?

Gemäß § 156a ist $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 400$, d. h. man hat mindestens Profil Nr. 25 mit $\frac{\mathfrak{Tr}}{w} = 396$ und $\mathfrak{Tr} = 4954$ zu nehmen. Die Durchbiegung beträgt

$$\frac{1}{15}\,\frac{6000 \,.\, \overline{200}^3}{2100000 \,.\, 4954}.$$

129. Für einen Träger, der gemäß Fig. 720 belastet wird, ist $a_1 = 1$ m, $a_2 = 2$ m, $p = 0{,}5$ m, $P_1 = P_2 = \cdots = P_6 = 2000$ kg.

Der Träger ist rechnerisch und graphostatisch zu behandeln, unter der Voraussetzung, daß er auch noch eine gleichmäßig verteilte Last von 8000 kg trägt, für $k = 750$ Atm. und $E = 2000000$ bei I-Profil.

130. Für $L = 6$ m und $Q = 6000$ kg ist § 156c) bei dem Falle der günstigsten Stützenstellung durchzuführen, falls $k = 750$ Atm. und $E = 2000000$ Atm. ist bei I-Profil.

131. Gemäß Fig. 728 ist die Untersuchung für $l = 4$ m und $Q = 6000$ kg rechnerisch und graphostatisch durchzuführen, falls $k = 750$ und $E = 2000000$ Atm. ist bei I-Profil.

132. Gemäß Fig. 731 ist die Untersuchung für $a_1 = 2$ m, $p = 2$ m, $a_2 = 1$ m und $Q = 2000$ kg durchzuführen, falls $k = 750$ Atm. und $E = 2000000$ Atm. ist bei I-Profil.

133. Gemäß Fig. 732 ist die Untersuchung für $a_1 = 2$ m, $p = 1$ m, $a_2 = 1$ m und $Q_1 = 2000$ kg, $Q_2 = 1000$ kg durchzuführen, falls $k = 1000$ Atm. und $E = 2100000$ Atm. ist bei I-Profil.

134. Ein Balken von 6 m Länge nimmt seine Last durch Querträger (vergl. Fig. 740) auf, welche 0,5 m voneinander abstehen. Dieser Fall ist zu behandeln gemäß § 156h) unter der Voraussetzung, daß eine gleichmäßige Belastung $Q = 8000$ kg vorhanden ist und vier Einzellasten von je 2000 kg, welche von den Enden des Trägers und unter sich gleichen Abstand haben, für $k = 750$ Atm. und $E = 2000000$ Atm. bei I-Profil.

135. Der Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung ($Q = l\gamma$) ist zu behandeln für den Fall, daß eine Stütze um a eingerückt wird.

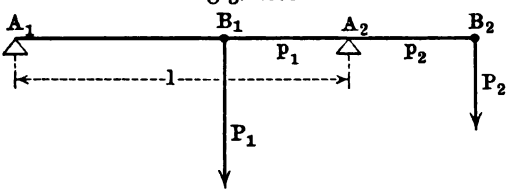
Die Reaktion über der eingerückten Stütze beträgt $\frac{1}{2}\,\frac{l}{l - a} \cdot Q$.

Die günstigste Stützenstellung tritt ein, wenn die eingerückte Stütze von ihrer ursprünglichen Stellung den Abstand $a = 0{,}293\,l$ hat.

136. Welche Eigenschaften zeigt der Zweistützenträger mit gleichmäßiger Belastung, wenn beide Stützen um $0{,}25\,l$ eingerückt werden?

137. Der Zweistützenträger der Fig. 1078 ist zu behandeln für verschiedene Verhältnisse $p_1 : p_2$ und $P_1 : P_2$. Wann wird die Reaktion von A_1 negativ?

Fig. 1078.



Für $p_2 P_2 > p_1 P_1$ muß A_1 eine von oben nach unten wirkende Reaktion entwickeln, falls Gleichgewicht vorhanden sein soll.

138. Gemäß Fig. 683 ist Fall III zu behandeln für $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} P$. Zunächst ist für $x = l_2$ gemäß Formel Nr. 335 die kubische Gleichung

$$x^2(3\,l - 2\,x) = l^3$$

aufzulösen.

h) Dreistützenträger und andere durchgehende Träger. 139. Eine Lage von fünf parallelen Balken wird an den Enden durch Mauerwerk, in der Mitte durch einen I-Träger (Unterzug) gehalten; die Balken von 6 m Länge haben Abstände von je 1 m und sollen 600 kg für 1 qm aufnehmen, der Unterzug hat 6 m Länge. Welche Abmessungen sind zu wählen, wenn die Balken aus Holz ($k = 75$ Atm.) und der Unterzug aus Schmiedeeisen ($k = 750$ Atm.) besteht?

Jede Balkenhälfte (l) trägt zwei halbe Felder von 3 . 1 qm Größe, also das gleichmäßig verteilte Gewicht $Q = l\gamma = 3 \,.\, 600 = 1800$ kg, während der ganze Balken als ein Dreistützenträger aufzufassen ist, von dem jede Hälfte gemäß Fall III zu behandeln ist.

Die Reaktionen für die Enden sind demnach $\frac{3}{8} Q = 675$ kg, die Reaktion für die Mitte $2 \,.\, \frac{5}{8} Q = 2250$ kg.

In der Mitte tritt Mo_{max} auf, und zwar ist $Mo_{max} = \frac{1}{8} Ql = 675$ mkg $= 67\,500$ cmkg und demnach $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{67\,500}{75} = 900$, so daß z. B. die Abmessungen 18/18 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 972$ genügen.

In der Praxis pflegt man gelegentlich noch die Balkenhälften in der Mitte als gestoßen (gemäß Fall II) anzusehen. Da hier auch $Mo_{max} = \frac{1}{8} Ql$ ist, so ändert sich dabei an der Dimensionierung nichts, während dabei die Reaktion der Enden $\frac{1}{2} Q = 900$ kg und die Reaktion der Mitte $2 \,.\, \frac{1}{2} Q = 1800$ kg wäre.

Der Unterzug ist in Entfernungen von 1 m durch je 2250 kg belastet. Der gefährliche Querschnitt liegt, wie die Betrachtung der Vertikalkraft zeigt, in der Mitte, und es ist also $Mo_{max} = -5625 \,.\, 3 + 2250 \,.\, 2 + 2250 \,.\, 1 = -10\,125$ mkg $= -1\,012\,500$ cmkg und demnach $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 1350$, so daß

$N.P$ 40 mit $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 1472$ jedenfalls genügt. Sieht man die Balken über dem Unterzug als gestoßen an, so wäre statt 2250 kg zu setzen 1800 kg, d. h. der Unterzug würde bei dieser Auffassung zu schwach.

Denkt man sich, wie es in der Praxis noch gelegentlich geschieht, den Unterzug gleichmäßig belastet, so wäre $Mo_{max} = -\frac{1}{8} . 11250 . 6 = -8437{,}5$ mkg $= -843750$ cmkg, d. h. $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ würde zu klein ausfallen.

140. Welche Senkung x ist für die Mittelstütze eines Dreistützenträgers $(2l)$ erforderlich, wenn alle drei Auflagerreaktionen denselben Wert erhalten sollen? Wie ist in diesem Falle zu dimensionieren?

$$x = \frac{7}{72} \frac{\gamma l^4}{E \mathfrak{T}r}.$$

Die Stellen für Mo_{max} liegen um $\frac{2}{3} l$ entfernt von den Endstützen, und es ist $Mo_{max} = -\frac{2}{9} \gamma l^2$; die Vertikalkraft ändert sich von $-\frac{2}{3} \gamma l$ bis $+\frac{1}{3} \gamma l$ von einem Ende an bis zur Mitte.

141. Aufgabe Nr. 140 ist graphostatisch zu behandeln.

142. Wenn in Aufgabe Nr. 139 der Unterzug gesenkt wird, so ist jeder Balken der Balkenlage als Dreistützenträger mit gesenkter Mittelstütze aufzufassen. Eine solche Senkung ist für den Fall der günstigsten Anordnung und für den Fall der Aufgabe Nr. 140 durchzuführen, wobei zu untersuchen ist, ob diese Senkungen für Holzbalken 18/18 auch überhaupt zulässig sind.

143. Rechnerische und graphostatische Behandlung eines Vierstützenträgers mit Stützen in gleicher Flucht bei gleichmäßiger Belastung, ebenso bei alleiniger Belastung der äußeren Felder oder bei alleiniger Belastung des inneren Feldes.

i) Bewegliche Belastungen. 144. Ein Wagen ruht auf vier Rädern, welche die Belastung des Wagens und dessen Eigengewicht, insgesamt 8000 kg, zu gleichen Teilen aufnehmen. Es ist die Beanspruchung eines Zweistützenträgers von 7 m Länge mit Hülfe der Einflußlinien (vergl. § 159) zu untersuchen, wenn sich der Wagen, dessen Achsen 3 m Abstand haben, über den Träger hin bewegt.

145. Aufgabe Nr. 144 ist durch das Fig. 756 entsprechende Verfahren zu behandeln.

146. Aufgabe Nr. 144 ist durch das Fig. 757 entsprechende Verfahren zu behandeln.

147. Wie ändert sich die Beanspruchung in Aufgabe Nr. 144, wenn die Last durch Querträger von 0,5 m Abstand übertragen wird.

148. Die Untersuchungen des § 159 sind auf einen gewöhnlichen Dreistützenträger mit ruhender gleichmäßiger Belastung auszudehnen, falls außerdem eine Einzellast über den Träger wandert.

149. Aufgabe Nr. 148 ist durchzuführen, falls eine gleichmäßige Belastung von der Länge eines halben Feldes über den Träger wandert.

k) Schubspannungen im gebogenen Balken. **150.** Die Untersuchungen des § 160 sind für den Querschnitt der Fig. 1079 durchzuführen, unter der Voraussetzung, daß dieser Querschnitt ein Profil gleicher Festigkeit für Gußeisen (1 : 2) ist.

Man hat zunächst $x = 9{,}89\,b \sim 10\,b$ und $F = 35{,}78\,b^2$ und $\mathfrak{T}r = 563{,}28\,b^4$.

Die Reduktion ist nach Maßgabe von Fig. 769 durchzuführen.

151. Die Untersuchungen des § 160 sind für einen wagerechten Balken von quadratischem Querschnitt durchzuführen, von dem eine Diagonale senkrecht gelagert ist.

Da die Trägheitsellipse hier ein Kreis ist, so liegt ein Fall gerader Belastung vor, wenn die Belastungsebene durch die Diagonale geht.

Das Maximum τ fällt nicht in die Neutrale, sondern liegt im Abstande $\frac{1}{4}\,w$ oberhalb und unterhalb dieser, es beträgt $\frac{9}{8}\frac{Mo'}{f}$, d. h. es übersteigt den Mittelwert um $12^1/_2$ Proz.; die graphische Darstellung für τ besteht aus zwei Parabeln.

Fig. 1079.

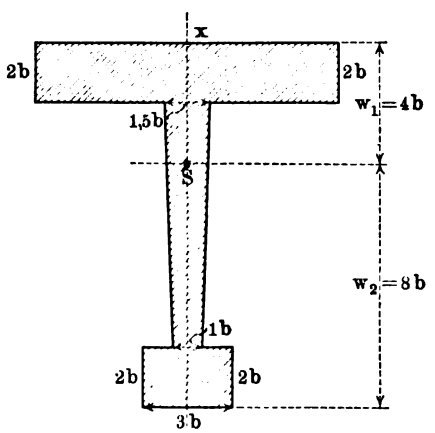
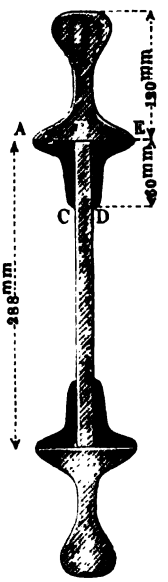


Fig. 1080.



152. Ein schmiedeeiserner Träger ist dadurch gebildet, daß zwei Schienen vom Profil der Fig. 270 durch eine Blechwand und durch gleichschenklige Winkeleisen verbunden sind, wie es Fig. 1080 zeigt, wobei die Stärke des Winkeleisens und die Stärke des Bleches je 6 mm beträgt. Wie groß darf die freie Länge sein, wenn drei solche Träger als Zweistützenträger gemeinsam als Brückenunterlage dienen, vorausgesetzt, daß der laufende Meter im ganzen mit 1600 kg belastet werden soll und $k = 600$ Atm. ist? Welche größte Schubspannung tritt dabei auf?

$$\mathfrak{T}r = 2\{774{,}4 + 42.20{,}4^2 + \tfrac{1}{3}.9{,}3.14{,}4^3 - \tfrac{1}{3}.7{,}5.13{,}8^3 - \tfrac{1}{3}.1{,}2.8{,}4^3\}$$
$$= 41\,405{,}2\ \text{cm}^4$$
$$\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{41\,405{,}2}{26{,}4} = 1568{,}4\ \text{cm}^3.$$

Man hat für einen Träger als Belaſtung für l in Centimetern gegeben $Q = \frac{1}{3}(l\ .\ 16)$ und findet gemäß $\frac{1}{8}Ql = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ demnach $l = 1188$ cm $= 11{,}88$ m ~ 12 m.

Die größte Schubſpannung tritt in der Neutralen auf, ſo daß gemäß Nr. 394)

$$\tau = \frac{Mo'}{x} \cdot \frac{s_0 \cdot f_0}{\mathfrak{T}r}$$

iſt, wobei natürlich das Maximum der Vertikalkraft $V = Mo'$ einzuführen iſt. Gemäß Fig. 681 liegt dieſes Maximum an den Enden des Trägers, es beträgt in unſerem Falle $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\ .\ 11{,}88\ .\ 1600) \sim 3168$ kg.

Ferner iſt

$$s_0 f_0 = 42.20{,}4 + (9{,}3.14{,}4)\,7{,}2 - (7{,}5.13{,}8)\,6{,}9 - (1{,}2.8{,}4).4{,}2$$

und

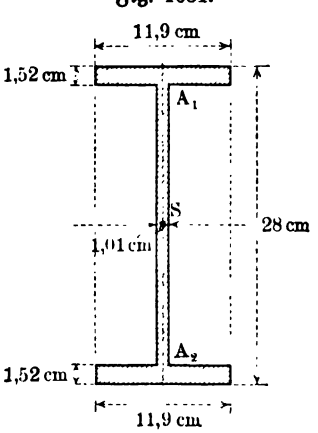
$$\frac{s_0 f_0}{\mathfrak{T}r} \sim \tfrac{1}{34}.$$

Man hat alſo, da $x = 0{,}6$ cm iſt, für die größte auftretende Schubſpannung

$$\tau_{max} = \frac{3168}{0{,}6\ .\ 34} \sim 155\ \text{kg}.$$

Da $t = \frac{3}{4}k$ bis $\frac{4}{5}k$ und $k = 600$ Atm. iſt, ſo iſt $\tau_{max} < t$, d. h. die Konſtruktion iſt durch Schub nicht gefährdet.

Fig. 1081.



153. Für eine oder die andere Balkenform des § 154 iſt die Grenze der zuläſſigen Verjüngung gemäß S. 1051 zu beſtimmen.

154. Da nach S. 1188 I-Profile angenähert ſo behandelt werden können, als wenn die Flantſchen allein die Normalkraft und der Steg allein die Schubkraft aufnähmen, ſo iſt die Anſatzſtelle für Steg und Flantſche (A_1 oder A_2 in Fig. 1081) in Bezug auf die Anſtrengung des Materials beſonders zu berückſichtigen.

Die entſprechende Unterſuchung iſt für das Normalprofil 28 der Fig. 1081 durchzuführen, falls es ſich dabei um einen Freiträger aus Schmiedeeiſen von der Länge von 1 m mit einer Endbelaſtung von 5000 kg handelt, bei einer Konſtruktionsſpannung $k = 1000$ Atm.

Da $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = 500\ \text{cm}^3$ ſein muß, während $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ für Fig. 1081 den Wert 541 cm³ hat, ſo iſt die Konſtruktion zunächſt als zuläſſig anzuſehen.

Da $A_1 A_2 = 280 - 30{,}4 = 249{,}6$ mm ist, so ist $SA_1 = 124{,}8$ mm, und man hat also für die Stelle A_1 oder A_2 die Spannung

$$\sigma_v = \frac{124{,}8}{140{,}0} \cdot \sigma_w,$$

während $\sigma_w = \frac{500\,000}{541} = 924{,}2$ Atm. ist, woraus $\sigma_v = 823{,}9$ Atm. folgt.

Anderseits ist $s_v f_v = 239{,}48\,\text{cm}^3$ für die Stelle A_1 oder A_2, so daß dort, da $\mathfrak{T}r = 7575\,\text{cm}^4$ ist,

$$\tau_v = \frac{5000 \,.\, 239{,}48}{1{,}01 \,.\, 7575} = 158{,}08 \text{ Atm.}$$

ist.

Nach Formel Nr. 396) sind demnach die Hauptspannungen für die Stelle A_1 oder A_2

$$411{,}95 \pm 441{,}20,$$

d. h. hier tritt selbst bei Berücksichtigung des Schubes nur eine größte Spannung von 853,15 Atm. auf, während $\sigma_w = 924{,}2$ Atm. war.

Nach Formel Nr. 399) sind die entsprechenden größten Anstrengungen für $m \sim \frac{10}{3}$ an der Stelle A_1 oder A_2

$$0{,}35 \,.\, 823{,}9 \pm 0{,}65 \,.\, 882{,}4,$$

d. h. hier tritt eine größte Anstrengung von 861,9 Atm. auf, welche also auch noch kleiner ist als $\sigma_w = 924{,}2$ Atm.

Aus dieser Betrachtung folgt, daß die übliche Dimensionierung nach $\sigma_w = Mo : \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ im allgemeinen völlig ausreichend ist.

155. Für den Fall der Aufgabe 154 ist die Beanspruchung gemäß Fig. 774 b und Fig. 775 darzustellen; ferner sind gemäß Fig. 776 die Zug- und Drucklinien und außerdem die Linien für den Schub darzustellen.

156. Ändert man in Aufgabe 154 die Länge des Trägers und die Belastung so, daß der Wert des Biegungsmomentes 500 000 cmkg ungeändert bleibt, so ändern sich auch die Werte von σ nicht, während sich τ proportional mit der Belastung ändert.

Es ist zu untersuchen, wann die größte Anstrengung in A_1 oder A_2 die Spannung σ_w erreicht bezw. übersteigt.

157. Eine Eisenbahnbrücke von 32 m Spannweite soll aus zwei Blechträgern von symmetrischem I-Profil konstruiert werden, und zwar soll die Höhe des Profils 3,2 m, die Breite der Flantschen 0,5 m sein, während für die Dicke δ der Mittelwand und die Höhe d der Flantschen der Ansatz $\delta : d = 1 : 6$ gelten soll. Es sind d und δ zu bestimmen für eine gleichmäßige dauernde Belastung von 1600 kg für den laufenden Meter und für eine gleichmäßige bewegliche Belastung von 3200 kg für den laufenden Meter eines Trägers bei $k = 600$ Atm.

Das Biegungsmoment erhält seinen größten Wert bei voller Belastung, und zwar in der Mitte des Trägers, d. h. man hat

$$Mo_{max} = 32\,(1600 + 3200) \cdot \frac{32}{8} = 614\,400 \text{ mkg}.$$

Die Vertikalkraft erhält bei voller Belastung (vergl. Fig. 754) ihren größten Wert für die Enden, und zwar ist dort

$$V_{max} = \tfrac{1}{2} \cdot 32\,(1600 + 3200) = 76\,800\,\text{kg}.$$

Für $t = \dfrac{m}{m+1}\,k$ ist bei $m = 3^1/_3$ anzusetzen $t = \frac{10}{13} \cdot 600$ Atm. Bei gleichmäßiger Verteilung von V_{max} über die Wand, deren Querschnitt $(320 - 12\,\delta)\,\delta$ in Centimetern ist, hätte man für die Enden des Trägers

$$\tau = \frac{76\,800}{(320 - 12\,\delta)\,\delta}.$$

Da beim Rechteck die Spannung τ nach der Neutralen zu um 50 Proz. steigt und da ferner bei Berechnung der Anstrengung für die Mitte (vergl. Fig. 754) hier V_{max} auch nicht auf Null sinkt, so rechnen wir nur mit $\frac{2}{3}\,t \sim 300$ Atm., so daß

$$(320 - 12\,\delta)\,\delta = \frac{76\,800}{300} = 256,$$

ist, woraus

$$\delta = 13{,}333 \pm 12{,}508$$

folgt, d. h. man hat

$$\delta = 25{,}841\,\text{cm} \quad \text{oder} \quad \delta = 0{,}825\,\text{cm}.$$

Da der letzte Wert den allgemeinen Konstruktionsbedingungen entspricht, so wählen wir $\delta = 0{,}825$ cm und demnach $d = 6\,\delta \sim 5$ cm. Wir stellen zunächst fest, ob diese Maße Mo_{max} entsprechen, indem wir $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ bilden. Die Flantschen geben $\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}r = \frac{50 \cdot 5^3}{12} + 50 \cdot 5 \cdot \overline{157{,}5^2} \sim 6\,202\,121$, und $\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim 77\,527$, die Wand giebt $\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}r = \frac{0{,}825 \cdot 155^3}{3} \sim 1\,024\,000$ und $\frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim 12\,800$. Demnach ist $k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}$ bei alleiniger Berücksichtigung der Flantschen 46 516 200 cmkg und bei Berücksichtigung von Flantschen und Wand 54 196 200 cmkg, während $Mo_{max} = 61\,440\,000$ cmkg beträgt.

Da die Konstruktion demnach zu schwach ist, wählen wir $\delta = 1$ cm und $d = 6$ cm, wobei sich für $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$ bezw. 92 449 und 15 807 ergiebt; bei Berücksichtigung von Flantschen und Wand ist jetzt $k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w} \sim 65\,000\,000$ cmkg.

Da die gewählten Maße nunmehr zunächst als zulässig erscheinen, so ist für deren weitere Prüfung die Anstrengung gemäß Formel Nr. 399) für verschiedene Stellen des Trägers zu bestimmen.

Gemäß Fig. 754 grenzt sich in dem Balken durch die Schnitte der Parabeln für V_{max} in diesem ein mittleres Gebiet ab, welches in diesem Fall etwa 12 m Abstand von den Enden hat. In diesem Gebiete ist einerseits an den Enden $V = 26\,400$ der größte Wert von V bei einseitiger Belastung und anderseits in der Mitte $Mo = Mo_{max}$ bei voller Belastung.

Für den Übergang der Wand in die Flantsche ist in der Mitte $\sigma_v = \sigma_w \cdot \frac{164}{160}$ bei $\sigma_w = \frac{61\,440\,000}{108\,256}$, d. h. man hat $\sigma_v = 568$ Atm., während für diese Stellen $\tau_v = V \cdot \frac{s_v f_v}{x} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}r} = V \,.\, 0{,}002731$ ist. Rechnet man mit dem Werte von V für die Enden der Mittelstrecke, so ist $\tau_v = 72$ Atm.

Den Werten $\sigma_v = 568$ Atm. und $\tau_v = 72$ Atm. entsprechen als größte Anstrengungen

$$0{,}35 \,.\, 568 \pm 0{,}65 \sqrt{\overline{568^2} + 4 \,.\, \overline{72^2}} = 0{,}35 \,.\, 568 + 0{,}65 \,.\, 586,$$

woraus als Maximum 580 Atm. folgen.

Da thatsächlich die Maxima für Mo und V nicht bei derselben Belastung auftreten und da ferner V in der Mitte und Mo an den Enden thatsächlich geringere Werte hat, so ist das thatsächliche Verhalten des Materials in doppelter Hinsicht günstiger als das der Rechnung zu Grunde gelegte, d. h. die Konstruktion ist in dem Mittelgebiete sicher, auch unter Berücksichtigung der Verschwächung durch die nötigen Nietlöcher.

Entsprechendes gilt für die anderen Teile des Trägers.

Da die Wand aus Stücken von etwa je 4 m Länge zusammengesetzt werden muß, so sind entsprechende (zweischnittige) Laschennietungen anzuwenden. Ist n die Anzahl der Niete vom Durchmesser d auf der einen Seite des Stoßes, so muß $2n \cdot \frac{d^2\pi}{4}$ gleich dem Querschnitt der Wand sein.

Die Niete, welche der Verbindung von Gurt und Wand dienen, nehmen die wagerechte Schubkraft zwischen Gurt und Wand auf. Diese beträgt für 1 cm Länge $\tau_v \,.\, (x \,.\, 1) = \frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}r} \cdot V$, wobei die Stelle v wieder dem Übergange zwischen Gurt und Wand entspricht.

Kommen auf 1 cm Länge n Niete, so ist für $t = 300$ Atm.

$$\frac{s_v f_v}{\mathfrak{T}r} \cdot V : 2n \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 300.$$

Rechnet man für das Mittelgebiet mit $V = 26\,400$ kg, so ist hier

$$n = \frac{72}{300} \cdot \frac{2}{d^2\pi} \sim \frac{0{,}16}{d^2}.$$

Für $d = 2$ ist z. B. $n = 1 : 25$, d. h. auf 25 cm Länge muß mindestens ein Niet kommen; thatsächlich werden die Niete viel dichter gesetzt.

158. Ein Stab aus Flußstahl mit $\sigma_p = 3500$ Atm., dessen Querschnitt ein Rechteck mit $b = 1$ cm und $h = 4$ cm ist, zeigt als Zweistützenträger mit Mittelbelastung bei einer Länge von 1 m und einer Belastung von 300 kg eine größte Durchbiegung von 5,32 mm und bei einer Länge von 0,5 m und einer Belastung von 600 kg eine größte Durchbiegung von 1,35 mm. Welche Werte von E und G bezw. m entsprechen gemäß der Entwickelung auf S. 1059 diesem Versuche?

Da $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{bh^2}{6} = \frac{8}{3}$ ist, so gilt $\frac{1}{4} Pl = \sigma \,.\, \frac{8}{3}$, und da in beiden Fällen

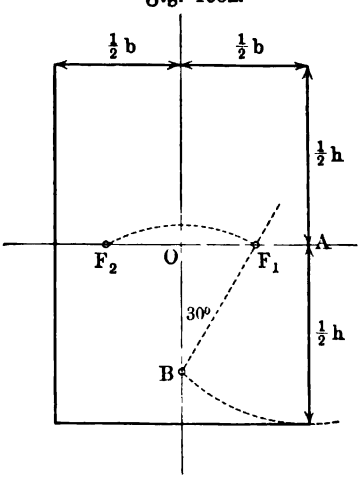
$Pl = 30000$ cmkg ist, so ist in beiden Fällen $\sigma \sim 3000$ Atm., d. h. die Belastung ist zulässig, da $\sigma < \sigma_p$ ist.

$$E = 2213870 \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad G = 843750 \text{ Atm.}$$

Daraus folgt ferner $m = 3{,}213$.

l) **Schiefe Belastung.** **159.** Welche gleichmäßige Belastung kann ein 2 m langer wagerechter Zweistützenträger aus Buchenholz ausschließlich seines Eigengewichtes tragen bei $k_1 = 100$ Atm. und $k_2 = 80$ Atm., falls Fig. 781 dessen Querschnitt darstellt bei $b = 20$ cm und $h = 30$ cm und $\alpha = 45$?

Fig. 1082.



Gemäß S. 1068 ergiebt sich für diese Pfette bei $Mo = \frac{1}{8} Ql$ und $\sigma = 80$

$$Q \sim 5400 \text{ kg, d. h. } \gamma = 2700 \text{ kg.}$$

160. Für Aufgabe 159 ist die Untersuchung gemäß Fig. 784 durchzuführen.

Man kann auch die Festpunkte (vergl. S. 658) benutzen, für welche gemäß Fig. 1082 gilt $AB = \frac{1}{2} h$ und Winkel $F_1BO = 30^0$ und $OF_1 = OF_2$.

161. Aufgabe 159 ist durchzuführen, wenn der Querschnitt des Balkens ein gleichschenkliges Winkeleisenprofil, z. B. Nr. 15, ist, dessen einer Schenkel wagerecht ist, für $k = 900$ Atm.

162. Für Aufgabe Nr. 161 ist die Untersuchung gemäß Fig. 784 durchzuführen.

163. Aufgabe Nr. 159 ist durchzuführen, wenn der Querschnitt des Balkens ein **Z**-Profil 20 ist, dessen Flanken wagerecht gelagert sind, für $k = 1000$ Atm.

164. Für Aufgabe Nr. 163 ist die Untersuchung gemäß Fig. 784 durchzuführen.

165. Eine der vorstehenden Aufgaben ist gemäß S. 1070 durch Konstruktion der Widerstandsfläche (vergl. S. 1143) zu behandeln.

166. Ein Freiträger von der Länge l ist aus zwei Balken von gleichschenkligem Winkeleisenprofil 16 gebildet, welche an den freien Enden, wie Fig. 1083 a zeigt, durch eine Spannstange von der Länge s verbunden sind. Es ist deren Horizontalschub zu bestimmen für die in Fig. 1083 a angedeutete Endbelastung. Bei Beseitigung der Spannstange entspricht (vergl. Fig. 1083 b) der Kraftebene SK der Vektor $[SV]$ vom Werte Pl, so daß mit Rücksicht auf Fig. 780 a gemäß S. 1063

$$tng\,\beta = \frac{\mathfrak{Tr}_x}{\mathfrak{Tr}_y} \cdot tng\,\alpha$$

ist, woraus sich hier für $\alpha = 45^0$ ergiebt

$$tng\,\beta = \frac{\mathfrak{Tr}_x}{\mathfrak{Tr}_y}.$$

Bei 17 mm Dicke vom Profil 16 ist $\mathfrak{Tr}_x = 506$ und $\mathfrak{Tr}_y = 1945$, woraus $\beta = 14^0\,35'$ folgt.

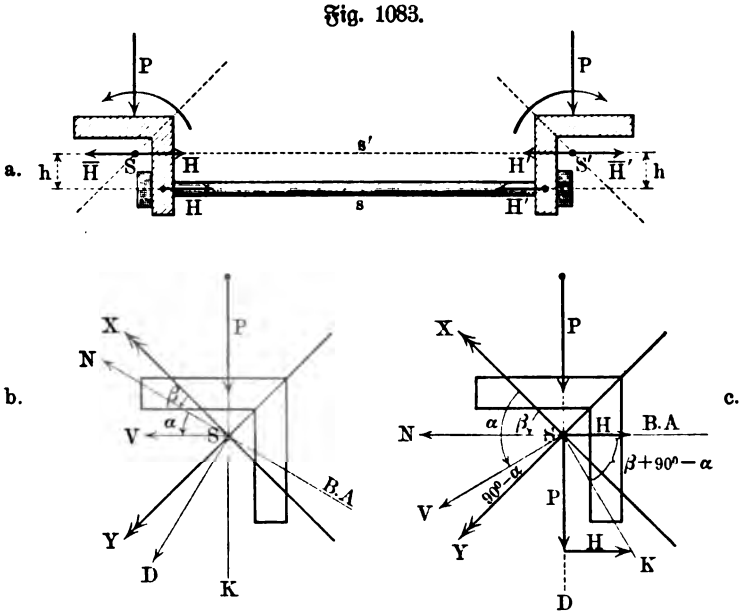
Senkrecht zur Biegungsachse SN, d. h. also in der Richtung SD, würde der Träger ausbiegen.

Durch die Spannstange wird die Durchbiegung in die Richtung SD der Fig. 1083 c gezwungen, welcher die Biegungsachse SN dieser Figur entspricht; da hier $\beta = 45^0$ ist, so hat man

$$tng\,45^0 = \frac{\mathfrak{Tr}_x}{\mathfrak{Tr}_y} \cdot tng\,\alpha \quad \text{oder} \quad tng\,\alpha = \frac{\mathfrak{Tr}_y}{\mathfrak{Tr}_x},$$

d. h. der Vektor SV des Momentes ist hier durch $\alpha = 75^0\,25'$ in seiner Lage bestimmt, womit auch die Lage SK der Kraftebene gegeben ist.

Fig. 1083.



Da die Resultante $[R]$ von $[P]$ und dem Zuge $[H]$ der Spannstange in die Richtung SK fallen muß, so ist also

$$\frac{H}{P} = cot\,(45^0\,0' + 14^0\,35') = cot\,(59^0\,35')$$

und demnach

$$H \sim 0{,}587\,P.$$

Dies alles gilt für die punktierte Lage (s') der Spannstange in Fig. 1082 a.

Hat die Spannstange in Fig. 1082 a die ausgeführte Lage, so wirken außerdem noch die Momente $[Hh]$ auf Verdrehung der Balken im Sinne der gezeichneten Pfeile.

167. Für die Aufgabe Nr. 166 ist die Biegungslinie gemäß S. 1066 und 1067 zu bestimmen.

m) Formänderungsarbeit bei Biegungen u. s. w. **168.** Ein prismatischer Zweistützenträger von rechteckigem Querschnitt ($b = 6$ cm, $h = 9$ cm) ist bei 2 m Länge im Abstande von 0,5 m von dem einen Ende durch 2000 kg belastet. Welche Formänderungsarbeit entspricht für $E = 2\,000\,000$ dieser Belastung?

Nach S. 1075 ist

$$\mathfrak{A} \sim 258 \text{ cmkg}.$$

169. Welchen Wert hat E für eine bestimmte Sorte Schmiedeeisen, wenn ein Zweistützenträger von rechteckigem Querschnitt ($b = 1$ cm, $h = 2$ cm) aus diesem Material bei einer Länge von 2 m und bei einer Mittelbelastung von 10 kg in der Sekunde $4^1/_4$ Doppelschwingungen macht?

Gemäß S. 1075 ist ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes

$$E \sim 1\,817\,000 \text{ Atm}.$$

Berücksichtigt man das Eigengewicht des Stabes bei einem spezifischen Gewicht 7,88, so ist $G = 3{,}152$ kg und $\frac{5}{8} G \sim 2$ kg. Dem entspricht

$$E \sim 2\,180\,000 \text{ Atm}.$$

170. Eine Dreiecksfeder (vergl. S. 1523) aus Stahl von 30 cm Länge soll bei 30 kg Endbelastung eine Durchbiegung von 2 cm zeigen. Welche Abmessungen muß sie erhalten für $E = 3\,000\,000$ Atm. und $k_b = 4000$ Atm.?

Man findet $h = 0{,}6$ cm $= 6$ mm und $b = 3{,}75$ cm $= 37{,}5$ mm.

171. Für das Federwerk der Fig. 1065 ist, Güterwagen entsprechend, $n = 8$ und $b_0 = 90$ mm und $h = 13$ mm, ferner $l = 50$ cm, $p_0 = 15$ cm und $\alpha = \beta = 45^0$. Wie groß ist die Tragkraft $2P$ und wie groß sind D und Z für $E = 2\,200\,000$ Atm. und $k_b = 6000$ Atm.?

Es ist zunächst $d = \dfrac{150}{28{,}6} \sim 5$ cm und demnach $p \sim 10$ cm; daraus folgt

$$P = 2028 \text{ kg} \quad \text{und} \quad D = 2P \quad \text{und} \quad Z = 2859{,}5 \text{ kg}.$$

172. Die Enddurchbiegung eines Freiträgers mit Endbelastung ist durch den Satz von Castigliano (vergl. Gleichung Nr. 407) zu bestimmen.

Für $Mo = Pz$ ist $\mathfrak{A}' = \frac{1}{2} \dfrac{P^2 z^2}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ und $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \dfrac{P^2}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}} \Sigma z^2 \zeta = \frac{1}{6} \dfrac{P^2 l^3}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$.

Die Ableitung von $\mathfrak{A}$ nach P liefert als Verschiebung von $[P]$ sofort den früheren Wert der Enddurchbiegung

$$\tfrac{1}{3} \frac{P l^3}{E \mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

173. Die Aufgabe Nr. 172 ist für einen anderen Fall aus dem § 149 durchzuführen.

174. Ein Träger erleidet bei einer Belastung der Stelle A durch 5000 kg an den Stellen B und C bezw. die Durchbiegungen von 2 mm und 3 mm. Welche Durchbiegung x erleidet die Stelle A, wenn die Stellen B und C bezw. durch 2000 kg und 4000 kg belastet sind?

Nach dem Satze von Maxwell (vergl. S. 1082) bewirkt eine Belastung von 5000 kg der Stelle B an der Stelle A die Durchbiegung von 2 mm und demnach die Belastung von 2000 kg die Durchbiegung $2 \cdot \frac{2}{5}$ mm u. s. w. Man hat also

$$x = 2 \cdot \tfrac{2}{5} + 3 \cdot \tfrac{4}{5} = 3{,}2 \text{ mm}.$$

175. Gemäß der Betrachtung auf S. 1083 u. f. ist ein gleichmäßig belasteter Vierstützenträger mit ungleichen Feldern zu behandeln.

176. Eine rechteckige Öffnung von der Länge l_1 und der Breite l_2 wird durch zwei Träger überdeckt, deren Achsen in die beiden Mittellinien der Öffnung fallen. Die Träger sind an der Kreuzungsstelle, welche die Last P trägt, miteinander verbunden. Welchen Anteil von P nimmt jeder Träger auf? Welche Änderung des Ergebnisses tritt ein, wenn der zweite Träger nicht die Öffnung überdeckt, sondern von zwei, parallel zum anderen Träger in gleichen Abständen a gelagerten Trägern abgefangen wird?

Gemäß S. 1447 sind für beide Träger die Durchbiegungen für die Kreuzungsstelle (Mitte) gleich anzusetzen, d. h. man hat bei den Längen l_1 und l_2 und den Belastungen P_1 und P_2 u. s. w.

$$\tfrac{1}{48} \frac{P_1 l_1^3}{E_1 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1} = \tfrac{1}{48} \frac{P_2 l_2^3}{E_2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}$$

neben $P_1 + P_2 = P$.

Im zweiten Falle ist der Querträger am meisten gefährdet, so daß durch das Biegungsmoment für dessen Mitte die zulässige Spannung bestimmt wird.

Fünfte Gruppe.

Beanspruchung auf Verdrehung.

177. Eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitt wird auf einer Länge von 2,6 m auf Verdrehung beansprucht, und zwar durch eine Kraft von 2000 kg an einem Arm von 50 cm.

Welchen Durchmesser erhält die Welle bei vierfacher Sicherheit (8000 kg) für $t = k_d = 480$ Atm.? Welche Verdrehung tritt für $G = 800000$ Atm. dabei auf?

Nach Formel Nr. 413 ist

$$d = \sqrt{\frac{16 \cdot (4 \cdot 2000 \cdot 50)}{\pi \cdot 480}} = 16{,}2 \text{ cm}.$$

Nach Formel Nr. 412 ist ferner, da $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0 = \frac{\pi}{32} d^4$ ist,

$$arc\,\lambda = \frac{4 \cdot 2000 \cdot 50 \cdot 260 \cdot 32}{\pi \cdot (16{,}2)^4 \cdot 800000}$$

und

$$\lambda = \frac{360^0 \cdot arc\,\lambda}{2\pi} = 1^0\,6'.$$

Welcher Durchmesser ist obiger Welle zu geben, wenn die zulässige Verdrehung für die ganze Länge höchstens $0{,}4^0 = 24'$ betragen soll?

Es ist $arc\,\lambda = \frac{0{,}4^0}{360^0} \cdot 2\pi$ und $arc\,\varepsilon = \frac{0{,}4^0 \,.\, 2\pi}{360^0} \cdot \frac{1}{260}$ und ferner gemäß Formel Nr. 414)

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \,.\, (4 \,.\, 2000 \,.\, 50) \,.\, 260 \,.\, 360}{\pi \,.\, 800\,000 \,.\, 0{,}4 \,.\, 2\pi}} = 20{,}9\text{ cm}.$$

178. Es ist der Durchmesser des cylindrischen Zapfens einer Kurbelwelle aus Schmiedeeisen zu bestimmen, an welcher zwei Arbeiter mit je 15 kg am Arme 42 cm wirksam sind, für $t = k_d = 480$ Atm.

Nach Formel Nr. 413) ist

$$2 \,.\, 15 \,.\, 42 = 480 \cdot \frac{\pi}{16} d^3$$

und demnach

$$d = 2{,}4\text{ cm}.$$

179. Auf einer wagerechten Welle aus Schmiedeeisen befinden sich drei Räder A, B, C, von denen das erste 32 P.S. aufnimmt, während das zweite 14 P.S. und das dritte 18 P.S. für Arbeit abgiebt. Welche Durchmesser erhalten die Wellenstücke AB und BC bei einer Tourenzahl $n = 90$ für $t = k_d = 230$ Atm.?

Für Mo in Meterkilogrammen gilt $Mo = 716\frac{N}{n}$, während für Mo in Centimeterkilogrammen $Mo = 71\,600\frac{N}{n}$ oder genauer $Mo = 71\,620\frac{N}{n}$ gilt. Für AB ist $N = 32$, während für BC, da in B 14 P.S. abgegeben werden, $N = 18$ ist.

Gemäß Formel Nr. 413 folgt

$$d = 8{,}3\text{ cm für } AB \quad \text{und} \quad d = 6{,}8\text{ cm für } BC.$$

180. An der schmiedeeisernen Welle einer Turbine von quadratischem Querschnitt wirkt im Umfange eines Zahnrades von 31 cm Halbmesser ein Druck von 1500 kg.

Wie groß ist die Seite a des Querschnittes, wenn bei $t = k_d = 480$ Atm. mit sechsfacher Sicherheit (6 . 1500 kg) gerechnet wird? Welche Verdrehung tritt für 1500 kg auf, falls bei $G = 800\,000$ Atm. eine Wellenlänge von 3 m in Frage kommt?

Nach Formel Nr. 423) ist für $b = h = a$

$$\tau_{max} = \frac{9\,Mo}{2\,a^3},$$

d. h. man hat

$$a^3 = \frac{9 \,.\, (6 \,.\, 1500 \,.\, 31)}{2 \,.\, 480} \quad \text{und} \quad a = 13{,}78\text{ cm}.$$

Gemäß Formel Nr. 424) ist für $b = h = a$

$$arc\,\varepsilon = 3{,}6 \cdot \frac{2}{a^4} \cdot \frac{Mo}{G} \quad \text{und} \quad arc\,\lambda = l \,.\, arc\,\varepsilon = 300 \,.\, arc\,\varepsilon$$

$$\lambda = \frac{360^0 \,.\, arc\,\lambda}{2\pi} = 0{,}18^0.$$

181. Eine schmiedeeiserne Achse von rechteckigem Querschnitte ($b = 15$ cm, $h = 10$ cm) wird durch ein Moment von 60 000 cmkg auf Torsion beansprucht. Wie groß ist $arc\,\varepsilon$ für $G = 800\,000$ Atm.? Wie groß ist die Formänderungsarbeit für die Achse bei einer Länge von 2 m?

Gemäß S. 1109 findet man

$$arc\,\varepsilon = 0{,}000\,026, \text{ d. h. } \varepsilon \sim 6''.$$

$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} Mo \,.\, l\, arc\,\varepsilon = 156$ cmkg.

Nach Formel Nr. 423) ist $t = 180$ Atm., woraus gemäß S. 1109 wieder folgt $\mathfrak{A} = 156$ cmkg.

182. Eine gerade Drehungsfeder (vergl. S. 1527) von quadratischem Schaft nimmt eine Arbeit von 2 cmkg auf. Welche Länge muß sie erhalten für $b = h = 1$ cm, falls $k_d = 800$ Atm. und $G = 800\,000$ Atm. ist?

Man hat $V = \frac{225}{16} = 14{,}025$ ccm und demnach $l \sim 14$ cm.

183. Für ein Torsionspendel (vergl. Fig. 811) von 2 m Länge, welches aus Eisendraht von 2 mm Durchmesser besteht, ist durch Versuche für Centimeter und Kilogramm als Einheiten $Tr = 100$ bestimmt. Wie groß ist G für das Material, falls das Pendel eine Schwingungsdauer von 79″ zeigt?

Nach S. 1110 folgt

$$G \sim 805\,000 \text{ Atm.}$$

Sechste Gruppe.

Beanspruchung auf Knickung u. s. w.

184. Eine Stange aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 2 m Länge und rechteckigem Querschnitt, für den $h : b = 1 : 4$ gilt, ist nach Fall II befestigt. Welche Abmessungen muß der Querschnitt erhalten bei 3000 kg centrischer Belastung, falls $n = 10$ ist in Formel Nr. 434)?

Es ist $\mathfrak{Tr}_{min} = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{3} h^4$ und demnach

$$h = 3{,}7 \text{ cm} \quad \text{und} \quad b = 14{,}8 \text{ cm}.$$

Als Druckspannung ergiebt sich $\frac{3000}{bh} \sim 55$ Atm., d. h. sie ist zulässig.

185. Eine Lokomotivkolbenstange von 1,6 m Länge aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) hat einen Überdruck von 5 Atm. bei 36 cm Kolbendurchmesser auszuhalten. Welche Stärke muß sie erhalten bei $n = 25$?

Es ist $P = \frac{\pi}{4} \cdot 36^2 \,.\, 5 = 5090$ kg und $\mathfrak{Tr}_{min} = \mathfrak{Tr} = \frac{\pi}{64} d^4$, woraus gemäß Fall III

$$d = 6{,}4 \text{ cm}$$

folgt; die entsprechende Druckspannung beträgt $\frac{5090}{\frac{\pi}{4} d^2} \sim 158$ Atm., ist also zulässig.

186. Die Decke eines Fabrikgebäudes wird durch beiderseits verankerte 5 m hohe Säulen aus Gußeisen[1]) gebildet, welche in der Längsrichtung des Gebäudes je 4 m und senkrecht dazu je 7,5 m Abstand haben. Welche Wandstärke müssen die Säulen bei 26 cm äußerem Durchmesser erhalten, wenn die Belastung für den Quadratmeter der Bodenfläche 3000 kg beträgt, einschließlich des Gewichtes der Säulen, bei $E = 1\,000\,000$ Atm. und $n = 20$?

Es ist $P = 4 \,.\, 7{,}5 \,.\, 3000 = 90\,000$ kg und $\mathfrak{T}r_{min} = \mathfrak{T}r = \frac{\pi}{64} d_1^4 (1 - x^4)$ für $x = d_2 : d_1$, woraus folgt gemäß Fall IV

$$x \sim 0{,}84 \quad \text{und} \quad d_2 \sim 22\,\text{cm} \quad \text{und} \quad d_1 - d_2 = 4\,\text{cm}.$$

Die entsprechende Druckspannung beträgt $\frac{90000}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)} \sim 600$ kg und ist also noch zulässig.

187. Wie verhalten sich die Tragkräfte massiver (d) und hohler (d_1 und d_2) Säulen aus demselben Material bei gleicher Länge und gleichem Querschnitt?

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d^4}{d_1^4 - d_2^4} \text{ bei } d^2 = d_1^2 - d_2^2.$$

Für $d_2 : d_1 = \delta$ ist also $P_1 : P_2 = (1 - \delta^2) : (1 + \delta^2)$.

188. Eine Rundstange aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) ist nach Fall II befestigt, sie hat 7 cm Durchmesser und 3 m Länge. Wie groß ist für sie l_0 gemäß Formel Nr. 436) bei $n = 5$ und $k_2 = 700$ Atm.?

Es ist $l_0 \sim 20\,d$, während thatsächlich $l : d = 300 : 7 \sim 43$ ist, und demnach ist die Stange auf Knickung zu berechnen, wobei eine Belastung von 5240 kg als zulässig erscheint; bei Druckbeanspruchung würde die Stange 26 950 kg tragen können.

189. Für eine quadratische Hohlsäule aus Gußeisen[1]), welche nach Fall III befestigt ist, ist l_0 zu berechnen für $n = 6$ und $k_2 = 500$ Atm.

Es ist $l_0 \sim 23\,a_1 \sqrt{1 + \delta^2}$ für $a_2 : a_1 = \delta$.

Für $\delta = \frac{7}{8}$ ist z. B. $l_0 \sim 31\,a$, so daß für $l : a > 31$ auf Knickung und für $l : a < 31$ auf Druck gerechnet werden muß; für $l = 3$ m und $a = 15$ cm ist $l : a = 20$, d. h. es ist auf Druck zu rechnen, und man hat bei $k_2 = 500$ Atm. den Ansatz $P = 500\,(a_1^2 - a_2^2)$.

190. Für einen cylindrischen Stab aus Schmiedeeisen, der nach Fall I befestigt ist, ist die Knickspannung k_2' nach Formel Nr. 439) zu berechnen, falls $l : r = 40$ und $\mu = \frac{1}{10666}$ ist.

Es ist $\frac{P}{f} = \frac{k_2}{3{,}4} = k_2'$ und demnach $k_2' \sim 176$ Atm. für $k_2 = 600$ Atm.

191. Aus einer gemäß der Entwickelung auf S. 1118 entworfenen Tabelle für schmiedeeiserne Stangen mit rechteckigem Querschnitt wird 1,45 für

[1]) Vergl. Anmerkung auf S. 1558.

$l : h = 20$ als Nenner von k_2' entnommen. Welche Tragkraft entspricht dieser Angabe für $k_2 = 600$ Atm.?

Es ist $\frac{P}{f} = \frac{k_2}{1{,}45} = 414$ Atm. und demnach $P = 414 f$ in Kilogramm.

192. Bei Fall II ist für eine Stange aus Schmiedeeisen von quadratischem Querschnitt gemäß der Formel auf S. 1119 die Seite a zu berechnen für $l = 2$ m und $P = 10000$ kg, wenn $k_2 = 600$ Atm. und $\mu = \frac{1}{10666}$ ist.

Man hat $a \sim 6$ cm.

193. Gemäß S. 1119 soll bei Fall II für einen Hohlcylinder d_1 und d_2 bei $n = 1{,}5$ berechnet werden für $l = 2$ m und $P = 10000$ kg, wenn $k_2 = 600$ Atm. und $\mu = \frac{1}{10666}$ ist.

$$d_1 = 8{,}7 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d_2 = 6{,}6 \text{ cm}.$$

194 bis 196. Für die, durch Druck beanspruchten Stäbe der durch Fig. 227, 228, 229 dargestellten Binder bezw. Träger sind die Querschnitte zu bestimmen. Vergl. Aufgabe Nr. 53 bis 55 in diesem Abschnitt.

197. Eine Hohlsäule von quadratischem Querschnitt (a_1 und a_2) aus Gußeisen ($E = 1000000$ Atm.) ist bei excentrischer Druckbelastung ($a = 10$ cm) zu behandeln bei Fall II für $a_1 = 16$ cm, $a_2 = 12$ cm, $P = 20000$ kg und $l = 3$ m.

Der Formel Nr. 441) für Fall I entspricht im allgemeinen gemäß Formel Nr. 443) die Formel

$$Mo = \frac{Pa}{\cos\left(\frac{ml}{2\sqrt{\alpha}}\right)}.$$

Da Fall II vorliegt, so ist $\alpha = 1$, und man erhält für $m^2 = \frac{P}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$, da $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 3733\frac{1}{3}$ ist, hier

$\frac{ml}{2\sqrt{\alpha}} = 0{,}347\,22$ als Arcus und demnach $19^\circ\,53'\,30''$ als Winkel.

Man hat ferner $\sigma_2 = \frac{Paw}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}\cos\left(\frac{ml}{2\sqrt{\alpha}}\right)} = 455{,}8$ Atm. und $\sigma_1 = \frac{P}{f}$ $= 178{,}6$ Atm.

Für die Zugseite ist also die Zugspannung $455{,}8 - 178{,}6 = 277{,}2$ Atm. und für die Druckseite die Druckspannung $455{,}8 + 178{,}6 = 634{,}4$ Atm. anzusetzen. Die Näherungsformel Nr. 443) giebt ebenso 277,4 Atm. Zug und 634,6 Atm. Druck, liefert also etwas größere Spannungen, als thatsächlich vorhanden sind.

Sieht man von der Durchbiegung der Säule ab, so ist $\sigma_1 = \frac{P}{f}$ mit $\sigma_2 = \frac{Pa \,.\, w}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ zusammenzustellen, wobei sich $\sigma_2 = 428{,}58$ Atm. ergiebt, also ein kleiner Wert wie oben.

Für centrische Belastung gilt natürlich $\sigma_1 = 178{,}6$ Atm., da $l < l_0$ ist.

Nach den Vorschriften der Berliner Baupolizei vom 21. Februar 1887 ist $k_1 = 250$ Atm. und $k_2 = 500$ Atm., so daß nach diesen die Konstruktion als unzulässig anzusehen ist.

198. Eine Stange aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 2 m Länge und quadratischem Querschnitt (3 cm) wird excentrisch mit 600 kg gezogen. Dieser Fall ist zu behandeln für einen excentrischen Arm von 5 cm.

Nach § 178 gilt $\sigma_1 = \frac{P}{f} = \frac{600}{9} = 66^2/_3$ Atm. und $\sigma_2 = \frac{Paw}{\mathfrak{T}r}$ $= \frac{2000}{3} = 666^2/_3$ Atm., d. h. auf der Zugseite herrscht die Zugspannung $733^1/_3$ Atm. und auf der Druckseite die Druckspannung 600 Atm., die Beanspruchung ist also zulässig.

Für die größte Durchbiegung ergiebt sich gemäß Formel Nr. 447) mit $ml = 1{,}3333$ und $\mathfrak{Cos}(ml) = 2{,}0281$

$$s = 5 \,.\, 0{,}5069 = 2{,}535 \text{ cm}.$$

199. Gemäß § 180 ist die Rechnung durchzuführen für einen cylindrischen Stab aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 4 cm Durchmesser und 1 m Länge bei $P_1 = 1000$ kg und $P_2 = 50$ kg.

Nach Formel Nr. 452) ist $m_1 = 0{,}006\,308$ und $ml = 0{,}6308$ und demnach der entsprechende Winkel $36^\circ\,8'\,24''$, wonach $Mo_{max} = P_2 \,.\, 115{,}7$ ist; die Spannung erhöht also den Arm für P_2 von 100 cm auf 115,7 cm. Die Biegungsspannung ist demnach 920,7 Atm., während die Druckspannung $\sim$ 80 Atm. ist, so daß die Beanspruchung bei $k_1 = k_2 = 1000$ Atm. gerade noch zulässig erscheint. Ferner ist $s = \frac{1}{20}(115{,}7 - 100) = 0{,}785$ cm.

200. Bei einem cylindrischen Holzbalken ist $l : d = 30$ und $f = 600$ qcm bei $E = 110\,000$ Atm. und $k = 100$ Atm. Welche Vergrößerung der Tragkraft entspricht der Zugspannung $P_1 = \frac{1}{n} kf = 20\,000$ kg?

Gemäß S. 1130 entspricht die Vergrößerung dem Verhältnis

$$1{,}38 : 1.$$

Das Beispiel ist weiter gemäß § 181 durchzuarbeiten für verschiedene Werte von P_1.

201 und 202. Die §§ 182 und 183 sind durchzuarbeiten für einen cylindrischen Stab aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 4 cm Durchmesser und 1 m Länge bei $P_1 = 100$ kg und $Q = 150$ kg.

203 und 204. Die §§ 186 und 187 sind durchzuarbeiten für einen cylindrischen Stab aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) von 4 cm Durchmesser und 1 m Länge bei $P_1 = 100$ kg und $Q = 150$ kg.

205. Es ist die Beanspruchung für Fig. 1084 zu entwickeln.

Für $AB = l$ ist $BD = l - a \sin\alpha$ und demnach gilt für den Querschnitt bei D

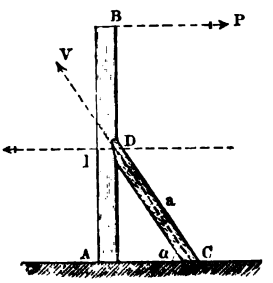
$$P(l - a\sin\alpha) = k \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{w}.$$

Bezeichnet man die Einwirkung von CD auf AB durch $[V]$, so gilt für A als Drehpunkt bei Gleichgewicht

$$Pl = V \cdot \frac{a}{2} \sin 2\alpha.$$

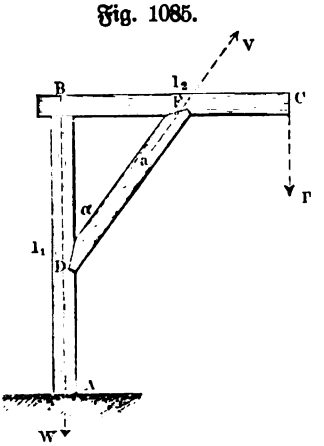
Mit $V = P \cdot \frac{2l}{a \sin 2\alpha}$ ist DC auf Knickung zu berechnen, wobei CD als nach Fall I befestigt angesehen werden kann; dabei ist Tr für CD bei gegebenen Werten von P, a, l proportional zu $\frac{1}{\sin 2\alpha}$, und hat also sein Minimum für $\sin 2\alpha = 1$ oder für $\alpha = 45^0$ (Günstigste Stützenstellung).

Fig. 1084.



Ist $AD = b$ vorgeschrieben und zugleich P und l gegeben, so ist Tr für CD proportional zu $\sin^3\alpha \cos\alpha$; das Minimum von Tr entspricht hier $tng\,\alpha = \sqrt{2}$, so daß $AC = b \,.\, cot\,\alpha = b \,.\, \sin 45^0$ ist.

Fig. 1085.



206. Es ist die Beanspruchung für Figur 1085 zu entwickeln.

Für $BC = l_2$ ist $FC = l_2 - a \sin\alpha$, und demnach gilt für den Querschnitt bei F

$$P(l_2 - a \sin\alpha) = k \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{w}.$$

Für F als Drehpunkt gilt ferner

$$P(l_2 - a \sin\alpha) = W a \sin\alpha,$$

woraus die Zugkraft $[W]$ für BD folgt.

Für B als Drehpunkt gilt

$$Pl_2 = V \cdot \frac{a}{2} \sin 2\alpha,$$

woraus $[V]$ für FD folgt.

Für AD ist der Druck P in Rechnung zu stellen, während noch Pl_2 als Biegungsmoment für AB auftritt.

Siebente Gruppe.

Anstrengung bei Fällen zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.

207 bis 216. Die Untersuchungen auf S. 1135 bis 1153 sind für folgende Querschnitte durchzuführen: Hohles Rechteck, Kreuzquerschnitt (bei Mauerpfeilern), Rechteck, beiderseits symmetrisch ausgekehlt durch Parabeln, Rechteck, beiderseits symmetrisch ausgekehlt durch Halbellipsen, Dreieck, Winkeleisen, I-Profil, T-Profil, [-Profil und Z-Profil.

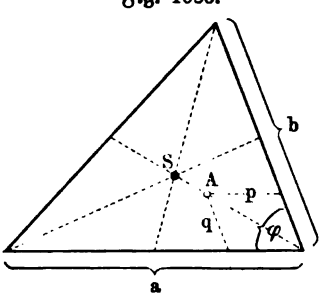
217 bis 219. Die Untersuchungen auf S. 1153 bis 1155 sind auszudehnen auf den vollen Kreis, den Halbkreis und das Dreieck.

Es ist für den Kreis $\sigma_R = 2\frac{P}{f}$, für den Halbkreis $\sigma_R = 2{,}36\frac{P}{f}$, für das Dreieck $\sigma_R = \frac{3}{8}\frac{P}{pq\sin\varphi}$ für $p = \frac{1}{4}a$ und $q = \frac{1}{6}b$ gemäß Fig. 1086.

220. Die rechteckige Grundfläche einer Mauer von der Breite 80 cm nimmt im Abstande 10 cm von der Mittellinie einen senkrechten Druck auf, welcher für 1 m Mauerlänge 8000 kg beträgt. Welche Beanspruchung entspricht diesem excentrischen Drucke?

Es ist $\sigma_1 = \frac{P}{f} = 1$ Atm. und $\sigma_2 = \frac{3}{4}$ Atm., da $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{80^2 \cdot 100}{6}$ ist. An der Druckseite herrscht also die Druckspannung 1,75 Atm., an der Zugseite die Druckspannung 0,25 Atm.

Fig. 1086.



Für einen excentrischen Arm von $13\frac{1}{3}$ cm ist $\sigma_2 = 1$ Atm., und nun wird die Spannung an der Zugseite Null; der Angriff erfolgt auf der Kerngrenze ($13\frac{1}{3} = \frac{80}{6}$). Für einen excentrischen Arm von 20 cm ist $\sigma_2 = 1{,}5$ Atm., so daß nun auf der Zugseite die Zugspannung 0,5 Atm. herrschen würde, falls Zug überhaupt übertragbar wäre. Gemäß Fig. 850 ist hier $p = 20$ cm, so daß N_A den Abstand 60 cm von R_2 hat, während in R_2 thatsächlich die Spannung $2\frac{2}{3}$ Atm. herrscht statt 2,5 Atm.

Für einen excentrischen Arm von 30 cm ist $\sigma_2 = 2{,}25$ Atm., so daß auf der Zugseite eine Zugspannung von 1,25 Atm. herrschen müßte. Hier ist $p = 10$ cm, so daß N_A den Abstand 30 cm von R_2 hat, während in R_2 thatsächlich die Spannung $5\frac{1}{3}$ Atm. herrscht statt 3,25 Atm.

221. Ein Pfeiler von 2 m Höhe aus Mauerwerk, dessen Querschnitt ein Quadrat von 1 m Seite ist, soll bei einer Belastung von 50 000 kg auf excentrischen Druck untersucht werden für $k_2 = 12$ Atm., falls 1 cbm Mauerwerk 1600 kg wiegt.

Man hat für die Grundfläche $\frac{P}{f} = \frac{50\,000 + 3200}{10\,000} = 5{,}32$ Atm.

Für 17,73 cm als excentrischen Arm hat die Biegungsspannung den Wert 5,32, während der entsprechende Arm bei Vernachlässigung des Eigengewichtes 16,67 cm wäre.

222. In einem kreisförmigen Querschnitt tritt ein Verdrehungsmoment von 20 000 cmkg auf und zugleich eine centrische Schubkraft von 3000 kg. Welchen Radius muß man dem Querschnitt geben bei Schmiedeeisen mit $t = 300$ Atm.?

Gemäß § 191 gilt für r die Gleichung

$$r^3 - \frac{40}{3\pi} \cdot r - \frac{400}{3\pi} = 0.$$

223. Es ist der Durchmesser d einer cylindrischen Welle aus Gußeisen zu berechnen, für welche das größte Biegungsmoment 1280 mkg beträgt, während sie außerdem ein Torsionsmoment von 1200 mkg zu übertragen hat, falls $k_b = 500$ Atm. und $k_d = 250$ Atm. ist.

Bei alleiniger Berücksichtigung der Biegung ist

$$12\,800 = 500 \frac{\pi}{32} d^3$$

und demnach $d = 13{,}8$ cm.

Bei alleiniger Berücksichtigung der Verdrehung folgt aus Formel Nr. 413) für $t = 250$ Atm.

$$d = 13{,}4 \text{ cm}.$$

Bei Berücksichtigung von Biegung und Verdrehung ist gemäß S. 1159 zu rechnen, und zwar ist $\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\, k_d} = 1{,}546$. Man hat dann

$$k_b \geqq \frac{32}{\pi d^3} \cdot 191\,300$$

und demnach

$$d = 15{,}74 \text{ cm}.$$

Achte Gruppe.

Fachwerke.

224. Für den Binder der Fig. 207 ist der reciproke Kräfteplan (vergl. S. 1461) zu konstruieren, unter der Voraussetzung, daß er bei A drehbar befestigt ist und bei B auf einem wagerechten Rollenlager ruht.

225. Der Binder der Fig. 207 ist unter derselben Voraussetzung, wie in Nr. 224, bei rechtsseitigem und bei linksseitigem Winddruck zu behandeln.

226. Für den Binder der Fig. 206 ist der reciproke Kräfteplan (vergl S. 1461) zu konstruieren.

Nachdem die drei Randdreiecke des linken oder rechten Endes behandelt worden sind, stößt man bei der Figur $A_2 C_2 C C_3 B_2$, welche Kern (Grundfigur) des Binders ist, auf Schwierigkeiten. Man überwindet diese durch Heranziehung der Ritterschen Methode oder durch eine besondere geometrische Überlegung.

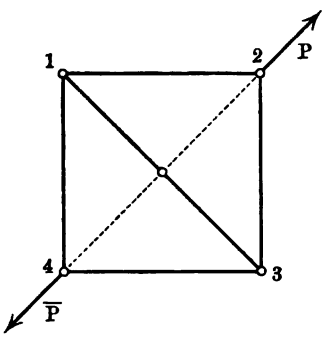
227. Gemäß Fig. 862 ist das dort dargestellte Fachwerk zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß Punkt 2 drehbar befestigt und Punkt 3 durch ein wagerechtes Rollenlager gestützt ist, wenn $\overline{12}$ die Länge 1 m hat und $P_1 = 3000$ kg, $P_2 = 5000$ kg, $P_3 = 5000$ kg, $P_4 = 6000$ kg, $P_5 = 4000$ kg und $P_6 = 5000$ kg ist.

Nachdem die nötigen Maße, entsprechend $\overline{12} = 1$ m aus der Figur entnommen sind, ist X gemäß der angegebenen Formel zu berechnen. Die Ver-

einigung von $[X]$ und $[P_1]$ liefert die Kraft, welche nach $\overline{12}$ und $\overline{16}$ zu zerlegen ist, u. s. w. In den Punkten 2 und 3 sind die Reaktionen, den Befestigungen entsprechend, zu bestimmen.

228. Nachdem für das quadratische Fachwerk der Fig. 1087 der Kräfteplan (vergl. S. 1450) für $P = \overline{P}$ gezeichnet ist, soll untersucht werden, welchen Einfluß die Einfügung eines Stabes $\overline{24}$ hat, falls die Mitten der Diagonalstäbe an der Kreuzungsstelle vernietet werden.

Fig. 1087.



Nach S. 1179 ist die Vernietung ohne Einfluß auf die Kraftverteilung, so daß man annehmen darf, daß $\overline{13}$ und $\overline{24}$ aneinander frei vorübergehen. Man findet für $\overline{13}$ den Druck $0{,}3\,P$, für $\overline{24}$ den Zug $0{,}7\,P$ und für die übrigen Stäbe den Zug $0{,}2\,P$.

229. Die Nr. 228 entsprechende Aufgabe ist für Fig. 1088 durchzuführen im Hinblick auf die Einschaltung von $\overline{24}$.

230. Gemäß Fig. 1089 sind die Stabkräfte der dargestellten Konstruktion zu bestimmen.

Welche Änderung tritt ein, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen?

Fig. 1088.

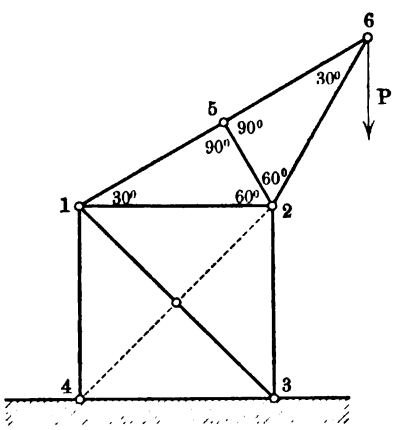
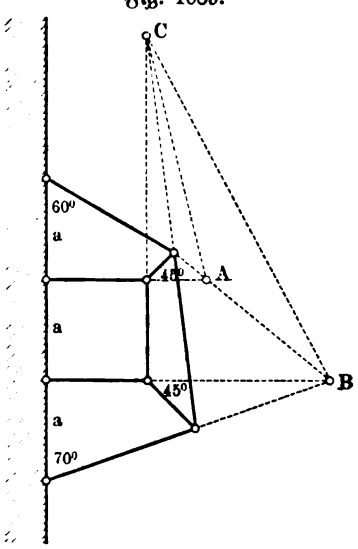


Fig. 1089.



231. Welchen Unterschied zeigen die Konstruktionen der Fig. 354, 355, 357, welche bei A drehbar befestigt sein mögen, wenn der andere Stützpunkt entweder durch ein Rollenlager gebildet ist oder gleichfalls drehbar befestigt ist?

232. Der Binder der Fig. 227, bei dessen Behandlung auf S. 405 vorausgesetzt wird, daß A oder B durch ein wagerechtes Rollenlager gebildet wird, soll berechnet werden, falls A und B beide drehbar befestigt sind.

233. Die Aufgabe Nr. 232 ist für den Binder der Fig. 228 durchzuführen, falls er nur dauernde Belastung hat.

234. Wie ändern sich die Ergebnisse von Nr. 233, wenn in den mittleren beiden Fächern der Fig. 228 noch die anderen Diagonalen eingesetzt werden?

235. Der Binder der Fig. 229 ist bei dauernder Belastung zu behandeln, falls in allen Fächern noch die anderen Diagonalen eingesetzt werden.

236. Der Binder der Fig. 229 ist bei dauernder Belastung zu behandeln, falls das Gelenk bei C fortfällt.

237. Der Binder der Fig. 229 ist bei dauernder Belastung zu behandeln, falls das Gelenk bei C fortfällt und falls in allen Fächern noch die anderen Diagonalen eingesetzt werden.

238. Für Fig. 353b ist die Senkung x von C festzustellen, falls $AB = BC = CA = 2\,\mathrm{m}$ und $P = 1000\,\mathrm{kg}$ ist für einen Querschnitt von 1 qcm bei $E = 2\,000\,000$.

Gemäß S. 1175 ist $x = \frac{2P}{fE} \cdot l = 2\,\mathrm{mm}$.

Das Ergebnis läßt sich in diesem Falle leicht unmittelbar nachprüfen. Da die Zerlegung von $[P]$ zeigt, daß AC durch eine Kraft vom Werte P gezogen wird, während CB durch eine Kraft vom Werte P gedrückt wird, so gehen AC und CB bezw. über in $l(1 + \delta)$ und $l(1 - \delta)$ für $\delta = \frac{P}{Ef}$, falls ursprünglich $AB = BC = CA = l$ ist.

Die Entfernung von C von der Horizontalen durch A beträgt nach der Veränderung der Stäbe $l(1 + \delta) \,.\, \cos CAB$, und zwar ist dabei

$$\cos CAB = \frac{l^2(1+\delta)^2 + l^2 - l^2(1-\delta)^2}{2l \,.\, l(1+\delta)} = \frac{1 + 4\delta}{2(1+\delta)}.$$

Man hat also

$$x = \frac{l}{2}(1 + 4\delta) - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \cdot 4\delta = \frac{2P}{fE} \cdot l.$$

Die Spannungen von AC und CB betragen je 1000 Atm. Zug bezw. Druck, sind also für gutes Flußeisen zulässig.

239. Welche senkrechte Durchbiegung x tritt in der Mitte des Fachwerkträgers der Fig. 1033 (mit einfachen Diagonalen) bei voller Belastung auf, wenn A drehbar befestigt und B durch ein wagerechtes Rollenlager gestützt ist, für den Fall, daß alle Stäbe die zulässige Spannung $\pm k$ erhalten?

Ist h die Höhe und l die Länge des Trägers und bilden die Streben mit den Gurten den Winkel ω, so ist gemäß § 197

$$x = \frac{k}{E}\left(\tfrac{1}{4}\frac{l}{h} + \frac{1}{\sin 2\omega} + \tfrac{1}{2}\,tng\,\omega\right) \cdot l.$$

Dabei beziehen sich die drei Glieder der Klammer bezw. auf Gurten, Streben und Ständer.

Für $\omega = 45^0$ ist demnach

$$x = \frac{k}{E}\left(\tfrac{1}{4}\frac{l}{h} + \tfrac{3}{2}\right) \cdot l,$$

und zwar ist bei acht Feldern $l = 8\,h$ zu setzen, während für $E = 2000000$ und $k = 500$, außerdem $\frac{k}{E} = \frac{1}{4000}$ ist.

Bei ausgeführten Konstruktionen pflegt man mit Rücksicht auf die relativ großen Querschnitte der Ständer und anderes das Glied $\frac{1}{2} tng\,\omega$ zu unterdrücken, so daß für $\omega = 45^0$ thatsächlich

ist. $$x \sim \frac{k}{E}\left(\tfrac{1}{4}\frac{l}{h} + 1\right) . l$$

240. Entsprechend Aufgabe Nr. 239 ist der Träger der Fig. 228 zu untersuchen bei dauernder Belastung.

241. Entsprechend Aufgabe Nr. 239 ist der Träger der Fig. 229 zu untersuchen bei dauernder Belastung.

242. Welche Seilkraft und welche Senkung zeigt ein Drahtseil von 20 mm Durchmesser, das gemäß Fig. 869 befestigt ist, bei einer Mittelbelastung von 500 kg, falls $E = 700000$ ist?

Nach S. 1181 ist

$$S \sim 4096\,\text{kg} \quad \text{und} \quad s \sim l \,.\, 0{,}061.$$

Bei 10 m Länge beträgt also die Senkung in der Mitte 61 cm. Da die Spannung ungefähr 1300 Atm. beträgt und da je nach dem Material 1500 bis 3000 Atm. zulässig sind, so ist die Konstruktion als brauchbar zu bezeichnen.

243. Ein Drahtseil, von dem der laufende Meter 2 kg wiegt, verbindet zwei in gleicher Höhe gelegene Punkte von 50 m Entfernung und zeigt dabei in der Mitte eine Senkung von 1 m. Welche größte Spannung hat das Seil?

Gemäß Fig. 1051 gilt für $y = h + 1$ und $x = 25$ der Ansatz

$$h + 1 = h \,.\, \mathfrak{Cos}\frac{25}{h},$$

d. h. man hat $\mathfrak{Cos}\frac{25}{h} = \frac{h+1}{h}$.

Um zunächst einen Näherungswert für h zu erhalten, ersetzen wir die Kettenlinie durch eine Parabel (vergl. S. 355) und berechnen für diese H mit $\gamma = q\delta = 2$ kg und $l = 25$ m für eine Pfeilhöhe 1; man findet $H = 625$ kg und demnach, falls man nun H als angenäherten Wert für die Kettenlinie ansieht,

$$c = h = \frac{H}{\gamma} = 312{,}5\,\text{m}.$$

Da $\frac{25}{h} \sim \frac{25}{312{,}5}$ und $\frac{h+1}{h} \sim \frac{313{,}5}{312{,}5}$ ist, so ist die Gleichung

$$\mathfrak{Cos}\, 0{,}08 = 1{,}0032$$

gemäß den Tafeln für die Hyperbelfunktionen zu prüfen bezw. zu verbessern. Da der gefundene Wert auf vier Dezimalen genau ist, so ist bei dieser Genauigkeit thatsächlich $h = 312{,}5$ m.

Gemäß S. 1509 ist nun $S = y \,.\, \gamma$, und demnach ist

$$S_{max} = (h + 1)\gamma = 313{,}5 \,.\, 2 = 627 \text{ kg}.$$

Die halbe Seillänge s ist durch $h\,\mathfrak{Sin}\,\frac{25}{h}$ gegeben.

244. Aufgabe Nr. 243 ist durchzurechnen für eine Senkung von 3 m.

245. Welche Spannung tritt auf, wenn das Seil der Aufgabe Nr. 243 noch eine Mittelbelastung von 500 kg aufnimmt?

Das Seil bildet zwei Bogen symmetrischer Kettenlinien, welche in der Mitte unter einem Winkel 2ε zusammenstoßen, u. s. w.

246 bis 249. Die Untersuchungen des § 200 sind anzuwenden auf die Träger der Fig. 227, 228, 229 und 1033 bei Belastung des Obergurtes durch die Last 1, unter der Voraussetzung, daß durch die Befestigung keine statische Unbestimmtheit erzeugt wird.

250. Eine oder die andere der Aufgaben Nr. 246 bis 249 ist zu behandeln für den Fall, daß die Last 1 am Untergurt angreift.

251. Der Träger der Fig. 229 ist zu behandeln nach Ausschaltung des Gelenkes bei C, wenn eine Last 1 am Obergurt angreift.

252. Es ist ein Hängewerk zu berechnen, dessen Felderteilung 4 m, 3 m, 4 m bei Hängesäulen von 2,5 m Länge beträgt, für den Fall einer gleichmäßigen Belastung von 50 000 kg seines Untergurtes.

Durch die Clapeyronschen Gleichungen (vergl. S. 1023) findet man für $l_{12} = 4$ m, $l_{23} = 3$ m, $l_{34} = 4$ m und $\gamma = \frac{50\,000}{11}$ als Momente für die mittleren Stützpunkte des Untergurtes

$$Mo = \tfrac{1}{4}\gamma \cdot \frac{l_{12}^3 + l_{23}^3}{2l_{12} + 3l_{23}} = 6083 \text{ mkg}$$

und als Stützendrucke

$$R = \frac{Mo}{l_{12}} + \tfrac{1}{2}\gamma(l_{12} + l_{23}) = 17\,430 \text{ kg}.$$

Damit sind die Drucke für die Endstützen als $\frac{1}{2}(50000 - 2R) = 7570$ kg gegeben. An den Enden wirken demnach aufwärts die Kräfte $\frac{1}{2} \,.\, 50\,000 - \frac{1}{2}(50\,000 - 2R) = R$, welche nach Strebe und Untergurt zu zerlegen sind.

Die geneigten Streben erhalten den Druck 32 877 kg, die wagerechte Strebe (Spannbalken) den Druck 27 888 kg, der Untergurt den Zug 27 888 kg, die Hängesäulen den Zug $R = 17\,430$ kg.

Für den Untergurt ist außerdem noch die Biegungsspannung in Rech-

nung zu stellen, welche dabei der gleichmäßigen Belastung entspricht mit $Mo = \frac{1}{8}\left(\frac{50000}{11} \cdot 4\right) . 4 = 9091$ mkg.

253. Aufgabe Nr. 252 ist graphostatisch zu behandeln.

254. Ein vollwandiger paraboloischer Träger, welcher Fig. 880 entspricht, ist zu behandeln unter der Voraussetzung, daß durch die Befestigung keine statische Unbestimmtheit erzeugt wird, für eine dauernde gleichmäßige Belastung und eine gleichmäßige bewegliche Belastung.

255. Die Aufgabe Nr. 254 ist durchzuführen für den Fall, daß der Träger beiderseits drehbar befestigt ist.

Neunte Gruppe.

Krumme Stäbe.

256. Gemäß Fig. 888 ist bei einem krummen Balken für eine bestimmte Stelle $\varrho = 10$ cm gegeben, und ferner $b = 3$ cm und $h = 5$ cm. Welche Spannungen treten an dieser Stelle auf?

In Bezug auf Fig. 885 ist gemäß S. 1199 gegeben $R = \varrho \cdot \frac{f}{f - A}$, so daß sich mit dem, auf S. 1205 für das Rechteck bestimmten Werte von A für $f = bh$ ergiebt $R = \frac{h}{log\,nat\,\frac{2\varrho + h}{2\varrho - h}} = \frac{5}{log\,nat\,\frac{5}{3}} = 9{,}79$ cm und $\bar{v} = \varrho - R = 0{,}21$ cm. Man hat ferner $-A = f \cdot \frac{\varrho - R}{R} = 0{,}32176$ und $+B = -A\varrho = 3{,}2176$. Für die äußerste Faser auf der Seite von M in Fig. 885 ist zu setzen $v = -2{,}5$, so daß gemäß Formel Nr. 472) die Spannung der äußersten Faser $\left(\frac{-2{,}5}{7{,}5} \cdot \frac{1}{B} + \frac{1}{150}\right) Mo = -0{,}0973\ Mo$ ist; für die andere Seite ergiebt sich ebenso mit $v = +2{,}5$ die Spannung als $\left(\frac{+2{,}5}{12{,}5} \cdot \frac{1}{B} + \frac{1}{150}\right) Mo = 0{,}0688\ Mo$.

Ist Mo der theoretischen Entwickelung entsprechend positiv, so ist die erste Seite Druckseite, sonst die zweite.

Berechnet man die Spannungen nach der Formel für den geraden Balken, so gilt für beide Seiten $\pm\sigma = \frac{6\,Mo}{bh^2} = 0{,}08\,Mo$; der Fehler beträgt demnach in Bezug auf $\pm\sigma = 0{,}08\,Mo$ für die erste Seite

$$\frac{0{,}0973 - 0{,}0800}{0{,}0800} = 0{,}216,$$

d. h. $+21{,}6$ Proz. und in Bezug auf die zweite Seite ebenso -14 Proz.

Für $\varepsilon_0 \sim 0$ fällt in Formel Nr. 472) das letzte Glied fort, und es sind dann die Spannungen bezw. $-0{,}1040\,Mo$ und $+0{,}0621\,Mo$.

Nach Formel Nr. 476) ist bei genauerer Betrachtung jede Spannung noch um $\frac{N}{f}$ zu vermehren.

257. Für Aufgabe Nr. 256 ist die Reduktion gemäß Fig. 892 vorzunehmen.

258. Anwendung Nr. 5 ist gemäß Fig. 1011 durchzuführen bei 10000 kg Belastung für $p = 5$ cm und $h = 15$ cm bei $\frac{b_2}{b_1} = \beta = \frac{p}{h+p} = \frac{1}{4}$ und $\varrho = p + w_1$.

Man findet $C = 4{,}18$ und $b_1 = 8{,}36$ cm und $b_2 = 2{,}09$ cm für $k = 1000$ Atm.

259. Ein paraboliſcher Bogenträger aus Schmiedeeiſen ($E = 2200000$ Atm.) von 1 m Länge und 0,2 m Pfeilhöhe iſt gemäß § 207 für eine Mittelbelaſtung von 4000 kg zu behandeln, falls der Querſchnitt ein Quadrat von 5 cm Seite iſt.

Gemäß S. 1217 iſt für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$ gegeben $H \sim 3750$ kg; rechnet man gemäß S. 1216 genauer mit 1,25 ſtatt 1,20, ſo iſt $H \sim 3906$ kg. Die Verbeſſerung $\frac{15}{8}\frac{\mathfrak{T}r}{h^2 f}$ hat hier den Wert 0,009 765, wodurch H in 3713,5 kg bezw. in 3868,2 kg übergeht. Da $R_1 = 2000$ kg in Fig. 896 iſt, ſo iſt $Mo = -2000 . z + 3900 . y$ für $H = 3900$ kg oder, da $y = \frac{4h}{l^2} z (l - z)$ $= 0{,}008\, z (l - z)$ iſt, auch $Mo = -2000\, z + 3900 . 0{,}008 (100 - z) . z$. Demnach liegt Mo_{max} an der Stelle $z = 17{,}95$ cm, welcher $y = 11{,}78$ cm entſpricht und beträgt $+ 10042$ cmkg. Im Scheitel iſt $Mo = -22000$ cmkg, ſo daß hier die größte Spannung von 1056 Atm. auftritt. Da die H entſprechende Druckſpannung $\frac{3900}{25} = 156$ Atm. beträgt, ſo ſind für die Druckſeite 1212 Atm. und für die Zugſeite 900 Atm. anzuſetzen. Bei gutem Flußeiſen iſt die Konſtruktion alſo gerade noch als zuläſſig zu bezeichnen.

Wird der Träger auf der einen Seite drehbar befeſtigt und auf der anderen Seite durch ein Rollenlager geſtützt, ſo iſt $H = 0$ und gemäß S. 1217 demnach $\bar{\lambda} = \frac{2}{5}\frac{P l_1 l_2 h}{E \mathfrak{T}r}$ bezw. genauer $\bar{\lambda} = \frac{1{,}25}{3}\frac{P l_1 l_2 h}{E \mathfrak{T}r}$, d. h. in dieſem Falle iſt die wagerechte Abweichung $\bar{\lambda} = 0{,}73$ cm.

Geben die Widerlager in Fig. 896 um λ nach, ſo verringert ſich $H = \frac{1{,}25}{3}\frac{P l_1 l_2 h}{n}$ um $\frac{\lambda . E \mathfrak{T}r}{n}$ für $n = \frac{8}{15} l h^2 + l \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{f}$, d. h. alſo um $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \cdot H = \frac{\lambda . 3900}{0{,}73}$; für ein Ausweichen der Widerlager um 1 mm verringert ſich alſo H um 532,45 kg.

260. Aufgabe Nr. 259 iſt durchzuführen für eine gleichmäßige Belaſtung von 4000 kg.

261. Aufgabe Nr. 259 iſt zu behandeln, falls § 208 maßgebend iſt.

262. Aufgabe Nr. 260 iſt zu behandeln, falls § 208 maßgebend iſt.

Bei Berücksichtigung von λ ist Tr in den Formeln auf S. 1221 mit Rücksicht auf Gleichung 2) zu ersetzen durch $\mathrm{Tr}\left(1 + \frac{\lambda E f}{H l}\right)$.

263. Gemäß Anwendung Nr. 10 ist ein Halbkreisgewölbe von 0,4 m Stärke zu untersuchen, dessen innerer Radius 2 m beträgt, und zwar bei einer gleichmäßigen dauernden Belastung der Horizontalen, welche als Mauerwerk (1 cbm = 1600 kg) berechnet 1 m Höhe hat. Man bestimmt zunächst das Gewicht $[G]$ der einen Gewölbehälfte für 1 m Breite und zeichnet das entsprechende Kraftdreieck für $[H]$ in der Mitte der Scheitelfuge und $[K]$ in der Mitte der Kämpferfuge. Man zerlegt ferner die Gewölbehälfte in vertikale Schichten und zeichnet die entsprechende Stützlinie mit $[H]$, welche durch die Mitte der Scheitelfuge und die Mitte der Kämpferfuge geht, u. s. w.

264. Ein Tonnengewölbe, dessen innere Leibung 12 m Spannweite und 4 m Pfeilhöhe hat, trägt dauernd eine wagerecht abgeglichene Belastung, welche im Scheitel als Betonmauerwerk (1 cbm = 2000 kg) berechnet einschließlich des Eigengewichtes 1,5 m Höhe hat, und außerdem eine bewegliche Belastung von 1 m Höhe. Die Konstruktion ist nach S. 1473 auszuführen und zu untersuchen mit der Maßgabe, daß gemäß empirischen Formeln zunächst die Scheitelstärke als 0,8 m und die Stärke am Kämpfer als 1,2 m anzunehmen ist.

Für die Gewölbelinie der inneren Leibung gelten bei vorläufiger Veranschlagung der beweglichen Belastung zu 0,5 m die Ansätze $h = 4$ m und $y_0 = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$ m, so daß $\frac{y_0 + h}{y_0} = \frac{6}{2} = 3$ ist.

Für $\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{\sqrt{H}}\right) = 3$ geben die Tafeln $\frac{x}{\sqrt{H}} = 1{,}761$, woraus für $x = \frac{12}{2}$ der Wert $\sqrt{H} = 3{,}407$ folgt, so daß die Gleichung der inneren Wölbungslinie

$$y = 2 \,.\, \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{3{,}41}\right)$$

ist.

Nachdem demgemäß die innere Wölbungslinie gezeichnet ist und nachdem ferner auch die äußere Wölbungslinie und die Mittellinie als Gewölbelinie, entsprechend den Stärken 0,8 m und 1,2 m eingetragen sind, untersucht man die Konstruktion gemäß § 209 zunächst für volle Belastung (2,5 m im Scheitel). Dabei ist bei einer mittleren Gewölbestärke von 1 m ferner $\nu \sim (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, und demnach ist die Scheitelverschiebung $\frac{1}{12}$ m und die Verschiebung an den Widerlagern $\frac{1}{6}$ m.

Schließlich ist noch eine Stützlinie für einseitige Belastung zu zeichnen, wobei gemäß empirischen Formeln als Senkung am belasteten Widerlager 0,35 m und als Hebung am freien Widerlager 0,11 m angesetzt werden mag, während als Hebung für den Scheitel $\frac{1}{12}$ m bestehen bleibt.

265. Für einen Kreisring aus Schmiedeeisen ($E = 2\,200\,000$ Atm.) von 20 cm Durchmesser, dessen Querschnitt 1 cm Durchmesser hat, ist die Untersuchung des § 210 durchzuführen, falls $K = 50$ kg ist in Fig. 905 oder in Fig. 907.

266. Gemäß Fig. 905 ist die Untersuchung für einen Ring aus Gußeisen durchzuführen, der durch zwei Schnitte eines Hohlcylinders von den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 3{,}5$ cm, senkrecht zu dessen Achse, gebildet wird, falls der Abstand der Schnitte 1 cm beträgt, für $K = 500$ kg. Für den rechteckigen Querschnitt ist hier $\varrho = r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 4{,}25$ cm und $\frac{h}{2\varrho} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}176$ und $f = 1 \,.\, 1{,}5 = 1{,}5$ qcm und ferner gemäß S. 1205 demnach $A = -0{,}015\,75$ und $B = +0{,}015\,75\, r$ und ferner $\frac{B}{fr} = 0{,}0105$ u. s. w.

267. Aufgabe Nr. 266 ist gemäß Fig. 908 für $p = 100$ Atm. durchzuführen.

268. Eine Spiralfeder bezw. eine gewundene Biegungsfeder von rechteckigem Querschnitt soll durch eine Welle, an der sie befestigt ist, zur Übertragung eines Druckes von 50 kg benutzt werden, wobei sie eine Verdrehung von 60° zeigen soll. Welche Abmessungen muß die Feder erhalten für $k_b = 6000$ Atm. und $E = 3\,000\,000$ Atm., wenn der Arm für die Übertragung des Druckes 20 cm und die Höhe der Feder 0,5 cm beträgt?

Gemäß Formel Nr. 488) oder 491) ist $\frac{\mathfrak{T}r}{w} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Wr}{k_b} = \frac{50 \,.\, 20}{6000}$ und also $b = 4$ cm. Aus Formel Nr. 489) oder 492) folgt dann ferner $l = arc\,60^0 \cdot \frac{E\mathfrak{T}r}{Wr} = arc\,60^0 \cdot \frac{Eh}{2k_b} = 130{,}9$ cm.

Liegt die Spiralfeder zwischen Kreisen mit den Radien $r_1 = 14$ cm und $r_2 = 6$ cm, so gilt angenähert $n \cdot \frac{2r_1\pi + 2r_2\pi}{2} = l$ für die Anzahl ihrer Windungen, und es ist demnach $n \sim 2$.

Hat die Biegungsfeder den mittleren Radius $R = 10$ cm, so gilt für die Anzahl ihrer Windungen angenähert $n \,.\, 2R\pi = l$, und es ist demnach auch hier $n \sim 2$.

Nach Formel Nr. 487) oder 490) ist in beiden Fällen $\mathfrak{A} = 523{,}6$ cmkg.

269. Für die cylindrische Feder einer Federwage wird Gußstahldraht vom Radius 0,25 cm verwandt, für den $G = 1\,000\,000$ Atm. und ferner $k_d = 4000$ Atm. ist. Welche Abmessungen sind zu verwenden, wenn 1 kg Belastung 1 cm der Teilung entsprechen soll bei einer Tragkraft von 25 kg?

Für den Cylinderhalbmesser folgt aus Formel Nr. 494) der Wert $r = \frac{\pi k_d \varrho^3}{2P} = 3{,}927 \sim 4$ cm und für die Anzahl der Windungen bei $s = 25$ cm und $r = 4$ cm der Wert $n = 15{,}26$.

Bei 25 kg Belastung ist $\mathfrak{A} = 312{,}5$ cmkg.

270. Eine Kegelstumpffeder für den Puffer eines Eisenbahnzuges soll für einen Druck von $P = 2500$ kg konstruiert werden und dabei eine Verkürzung von 5 cm zeigen. Welche Abmessungen erhält die Feder bei rechteckigem Querschnitt für $h : b = 10 : 1$, falls $k_d = 4000$ Atm. und falls $G = 1\,000\,000$ Atm. ist und $r_1 = 10$ cm und $r_2 = 5$ cm genommen wird?

Nach Formel Nr. 507) folgt unmittelbar $b = 1{,}41$ cm und $h = 14{,}12$ cm.

Nach Formel Nr. 503) ist ferner A für $s = 5$ cm gegeben, und zwar ist $A = 6250$ cmkg, so daß nun durch Formel Nr. 509) auch V gegeben ist. Man findet $V = 6961{,}7$ ccm und hat demgemäß die Länge der Feder $l = V : bh = 349{,}4$ cm, wonach die Anzahl der Windungen n durch $l = n(r_1 + r_2)\pi$ folgt; man findet $n = 9{,}356$.

Zehnte Gruppe.

Plattenförmige Körper.

271. Eine kreisförmige Platte aus Gußeisen ($E = 1\,000\,000$ Atm.) hat den Radius $r = 20$ cm und die Dicke $h = 1$ cm. Welche gleichmäßige Belastung ist zulässig, falls $\varphi = 1$ und $k_1 = 200$ Atm. ist? Welche Durchbiegung ist dabei in der Mitte für $\psi = 0{,}3$ vorhanden? Vergl. dazu S. 1243 und 1244.

$$p = \tfrac{1}{2} \text{ Atm.} \quad \text{und} \quad y_{max} = 0{,}024 \text{ cm.}$$

Unter übrigens gleichen Umständen ist für $r = 10$ cm und $r = 5$ cm bezw. $p = 2$ Atm. und 8 Atm. und $y_{max} = 0{,}006$ cm und $0{,}0015$ cm.

272. Der schmiedeeiserne Deckel für ein elliptisches Mannloch (in einem Dampfkessel) hat als Druckfläche eine Ellipse mit den Achsen 40 cm und 30 cm. Welcher gleichmäßige Druck erscheint zulässig, falls die Plattenstärke 1 cm beträgt, für $\varphi = 1$ und $k_1 = 1000$ Atm.? Vergl. S. 1246.

Nach der Formel v. Bachs ist $p \sim 3{,}5$ Atm., während Föppls Formel $p \sim 3$ Atm. liefert.

273. Ein Preßcylinder aus Gußeisen von 30 cm innerer Weite steht unter einem inneren Überdruck von 200 Atm. Welche Wandstärke d muß er erhalten bei $k_1 = 400$ Atm.?

Nach der angenäherten Betrachtung auf S. 1247 ist $d = 7{,}5$ cm, während gemäß S. 1253 folgt $\frac{r_1}{r_2} = 1{,}852$, und demnach ist $r_1 = 27{,}78$ cm und $d = r_1 - r_2 = 12{,}78$ cm.

274. Ein Cylinder aus bestem Stahlguß ($k_1 = 1200$ Atm.) hat die Abmessungen $r_1 = 39$ cm und $r_2 = 24$ cm. Welcher innerer Überdruck ist höchstens zulässig?

$$p \sim 500 \text{ Atm.}$$

275. Es ist nachzuweisen, daß die Formeln auf S. 1256 zu den Formeln des § 214 zurückführen, falls $r_1 - r_2$ gegenüber r_1 relativ klein ist.

276. Eine gußeiserne Hohlkugel, für welche $k_1 = 300$ Atm. und $k_2 = 600$ Atm. ist, unterliegt einem äußeren Überdruck von 400 Atm. Welche Stärke muß sie erhalten, falls $r_2 = 20$ cm ist?

Nach S. 1256 muß $k_2 > 1{,}05 \cdot 400$ und $k_1 > 0{,}9 \cdot 400$ sein. Da letztere Bedingung nicht erfüllt ist, so wird die Kugel bei noch so großen Werten von r_1 vom Hohlraum aus zerstört.

Elfte Gruppe.

Erddruck.

277. Bei einer Mauer, die Fig. 926 mit $\alpha = 80^0$ und $\beta = 20^0$ entspricht, zeigte sich infolge zu schwacher Ausführung eine Gleitfläche mit $\omega = 50^0$. Wie groß ist λ für $\varphi = 30^0$?

Nach Formel Nr. 524) ergiebt sich $tng\,\lambda$ gemäß

$$\frac{cos\,(30^0 + \lambda)}{sin\,(80^0 + \lambda)} = \frac{sin\,30^0 \,.\, cos\,60^0}{sin\,60^0 \,.\, sin\,20^0}$$

und daraus $\lambda \sim 3^0\,5'$.

278. Gemäß § 220 ist der thätige und der ruhende Erddruck zu bestimmen für $h = 2\,\mathrm{m}$ und $l = 1\,\mathrm{m}$ bei $\varphi = 40^0$, falls $\gamma = 1650\,\mathrm{kg}$ für 1 cbm ist.

Die graphische Lösung ist unmittelbar durch Fig. 929 bezw. Fig. 930 oder auch durch Fig. 935 bezw. 936 gegeben.

Bei Berechnung ist $\omega_1 = 65^0$ und $\omega_2 = 25^0$, ferner $K_1 = 717{,}55\,\mathrm{kg}$ und $K_2 = 15\,176\,\mathrm{kg}$.

Man hat

$$K_1 : K_2 = tng^2\,25 : tng^2\,65 = tng^4\,25 : 1 = 1 : cot^4\,25 = 1 : 21{,}15.$$

279. Welche Abmessungen muß für den thätigen Erddruck der Aufgabe Nr. 278 eine rechteckige Futtermauer aus Kalkstein ($\gamma' = 2000\,\mathrm{kg}$ für 1 cbm) haben, falls der Reibungskoeffizient 0,45 ist?

Für $K_1 \sim 720\,\mathrm{kg}$ gilt gemäß S. 1469 für $V = 0$ und $H = K_1$ mit Rücksicht auf das Gleiten $b = 0{,}4\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{cm}$ und mit Rücksicht auf das Kippen bei einem Drehpunkt auf der Kerngrenze $b = 0{,}85\,\mathrm{m} = 85\,\mathrm{cm}$. Für letzteren Wert ist $G = 3400\,\mathrm{kg}$, und demnach herrscht auf der Druckseite die Spannung $2 \cdot \frac{3400}{b \,.\, 1} = 4000\,\mathrm{kg}$ für 1 qm, d. h. die Spannung von 0,8 Atm., welche zulässig ist.

280. Aufgabe Nr. 278 ist gemäß Fig. 931 c durchzuführen.

281. Aufgabe Nr. 278 ist bei natürlicher Böschung ($\beta = \varphi = 40^0$) gemäß S. 1269 für $\lambda = \varphi$ durchzuführen.

282. Aufgabe Nr. 279 ist bei natürlicher Böschung ($\beta = \varphi = 40^0$) für $\lambda = \varphi$ durchzuführen.

283. Aufgabe Nr. 278 ist bei natürlicher Böschung ($\beta = \varphi = 40^0$) für $\lambda = 0$ durchzuführen.

284. Aufgabe Nr. 277 ist gemäß Formel Nr. 533) zu behandeln.

Man findet

$$\frac{cos\,(60^0 + \lambda)}{sin\,(80^0 + \lambda)} = \frac{sin\,30^0 \,.\, cos\,0^0 \,.\, cos\,80^0}{sin\,60^0 \,.\, sin\,20^0 \,.\, cos\,50^0}$$

und daraus wieder $\lambda \sim 3^0\,5'$.

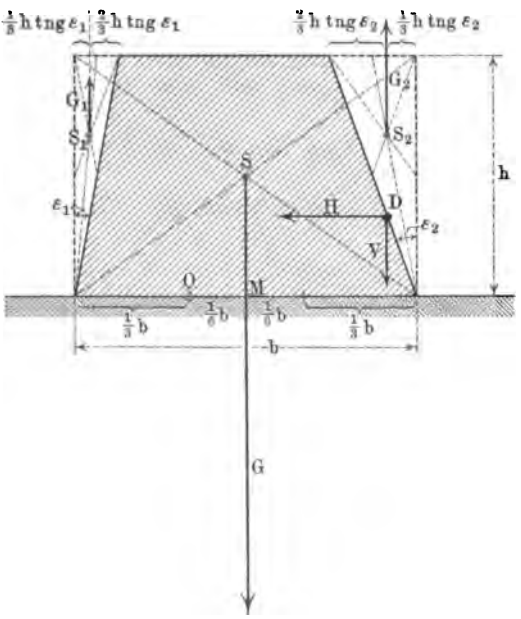
285. Eine Erdaufschüttung ($\gamma' = 1600$ für 1 cbm) von 4 m Höhe soll durch geneigte Palliſaden, für welche $\alpha = 75^0$ iſt, gemäß Fig. 933 geſtützt werden. Welcher Erddruck tritt auf für $\varphi = 30^0$?

Nach Formel Nr. 532) ergiebt ſich für $\lambda = \varphi$ zunächſt $\omega_1 = 49^0\,16'$.

Nachdem dieſer Winkel in die Zeichnung eingetragen und in dieſer ω_1 ſo verbeſſert iſt, daß $[G_1]$ ſich mit $[W_1]$ und $[W_1']$ in einem Punkte ſchneidet, iſt W_1' nach S. 1269 zu berechnen.

Statt deſſen kann man auch λ aus Formel Nr. 524) oder Formel Nr. 533) mit $\omega = 49^0\,16'$ berechnen und dieſen Wert von λ in Formel Nr. 532) eintragen, um einen verbeſſerten Wert von ω_1 zu gewinnen, u. ſ. w.

Fig. 1090.



286. Gemäß den Anſätzen oben auf S. 1268 ſind die Formeln Nr. 525) u. f. und Nr. 528) u. f. zu entwickeln.

287. Für Fig. 939 iſt der Angriffspunkt des Erddrucks zu beſtimmen.

Man teilt $B_1 A$ in n gleiche Teile durch die Teilpunkte T_1, T_2, T_3, ... T_{n-1} und beſtimmt den Erddruck für $B_1 T_1$, $B_1 T_2$, $B_1 T_3$, ... $B_1 T_{n-1}$, $B_1 A$, wendet den Momentenſatz an, u. ſ. w.

288. Gemäß Fig. 940 iſt der Erddruck bei $\alpha = 60^0$, $\beta = 20^0$, $h = 3$ m für $\varphi = 30^0$ zu beſtimmen, falls $\delta = 400$ kg für 1 qm iſt.

Man hat für $\gamma = 1600$ kg anzuſetzen $h' = 0{,}25$ m, u. ſ. w.

289. Gemäß Fig. 945 iſt der thätige Erddruck für $\varphi = 40^0$ und $\beta = 15^0$ zu beſtimmen.

290. Gemäß Fig. 947 iſt der ruhende Erddruck für $\varphi = 40^0$ und $\beta = 15^0$ zu beſtimmen.

291. Gemäß Fig. 946 iſt $\overline{W}$ als thätiger Erddruck zu beſtimmen für $\measuredangle\, \overline{M}JM = 25^0$. Vergl. dazu Fig. 945.

292. Gemäß Fig. 946 iſt $\overline{W}$ als ruhender Erddruck zu beſtimmen für $\measuredangle\, \overline{M}JM = 25^0$. Vergl. dazu Fig. 947.

293. Gemäß Fig. 1090 ſind für eine trapezförmige Futtermauer die Abmeſſungen zu beſtimmen, falls der Erddruck durch die Komponenten $[H]$ und $[V]$ in D gegeben iſt.

Bezeichnet man mit G das Gewicht der rechteckigen Mauer von der Breite b und der Höhe h, ſo iſt das Gewicht der trapezförmigen Mauer

$G - G_1 - G_2$, wo bei einem specifischen Gewicht γ' der Mauer $G = bh \,.\, l\gamma'$, $G_1 = \frac{1}{2} h^2 \, tng\, \varepsilon_1 \,.\, l\gamma'$ und $G_2 = \frac{1}{2} h^2 \, tng\, \varepsilon_2 \,.\, l\gamma'$ ist. Bei einem Reibungskoeffizienten f' ist also mit Rücksicht auf Sicherheit gegen Gleiten anzusetzen

$$f'[V + (G - G_1 - G_2)] \geqq H,$$

woraus für $l = 1$ folgt

$$\frac{b}{h} \geqq \frac{H}{f' h^2 \gamma'} + \frac{tng\, \varepsilon_1 + tng\, \varepsilon_2}{2} - \frac{V}{h^2 \gamma'}.$$

Die Sicherheit gegen Kippen fordert für O als Drehpunkt bei $MO = \frac{1}{6} b$

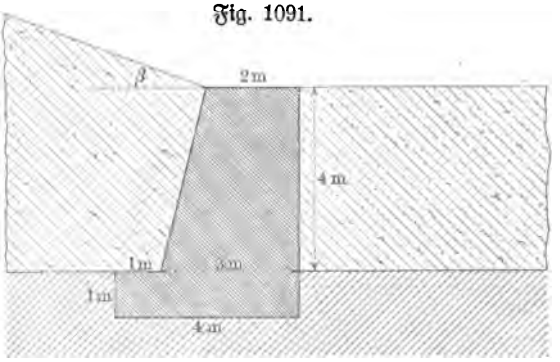
$$O = -H \,.\, \tfrac{1}{3} h + (V - G_2)(\tfrac{2}{3} b - \tfrac{1}{3} h \, tng\, \varepsilon_2) + G \,.\, \tfrac{1}{6} b + G_1 (\tfrac{1}{3} b - \tfrac{1}{3} h \, tng\, \varepsilon_1),$$

und daraus ergiebt sich wieder, daß $\frac{b}{h}$ oberhalb einer bestimmten Grenze gehalten werden muß.

Für $\varepsilon_2 = 0$ ladet die Mauer nur nach links aus, während sie für negative Werte von ε_2 nach rechts überhängt.

294. Aufgabe Nr. 293 ist durchzuführen für eine Mauer aus Kalkstein ($\gamma' = 2000$ kg) bei $b = 2$ m, $h = 4$ m, $tng\, \varepsilon_1 = 0{,}25$ und $\varepsilon_2 = 0$ und $f' = 0{,}4$, falls rechts Erde ($\gamma = 1600$ kg) in der Höhe h bei $\varphi = 30^0$ wagerecht aufgeschüttet ist.

Fig. 1091.



295. Aufg. Nr. 293 ist durchzuführen wie in Nr. 294, falls die Erdaufschüttung unter dem Winkel $\beta = 10^0$ geböscht ist.

296. Aufg. Nr. 293 ist durchzuführen, wie in Nr. 294, falls ε_2 durch $tng\, \varepsilon_2 = +0{,}125$ bestimmt ist.

297. Aufgabe Nr. 293 ist durchzuführen wie in Nr. 294, falls ε_2 durch $tng\, \varepsilon_2 = -0{,}125$ bestimmt ist.

298. Eine der vorstehenden Aufgaben ist bei abfallendem Erdreich ($\beta = -10^0$) zu behandeln.

299. Gemäß Fig. 1091 ist eine Kalksteinmauer ($\gamma' = 2000$ kg und $f' = 0{,}4$) zu behandeln, welche links frei steht und rechts Wasserdruck auszuhalten hat.

300. Gemäß Fig. 1091 ist eine Granitmauer ($\gamma = 2700$ kg und $f = 0{,}5$) zu behandeln, welche links Erde von der Böschung $\beta = 20^0$ bei $\varphi = 30^0$ trägt und rechts Wasserdruck auszuhalten hat.

Dabei ist links auch der ruhende Erddruck, welcher dem thätigen Wasserdruck entspricht, zu berücksichtigen, u. s. w.

Zwölfte Gruppe.

Temperaturspannungen.

301. Eine schmiedeeiserne ($E = 2\,000\,000$ Atm.) Stange, welche eine Druckspannung von 700 Atm. auszuhalten hat, wird um 20° C. erwärmt. Welche Spannung tritt dabei auf, falls die Dehnung $\nu = \frac{1}{80000}$ für 1° C. beträgt?

Gemäß S. 1305 ist

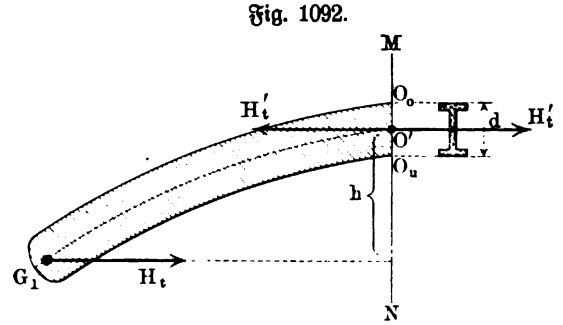
$$\varepsilon_t = \tfrac{20}{80000} \quad \text{und} \quad \sigma_t = E \,.\, \varepsilon_t = 500 \text{ Atm.},$$

so daß die Gesamtspannung 1200 Atm. beträgt.

302. Welche Formänderungsarbeit entspricht der Erwärmung der Stange in Nr. 301, falls die Spannung von 1200 Atm. noch unter der Proportionsgrenze liegt?

Gemäß der Formel $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \cdot v$ ist $\mathfrak{A} = \frac{v}{16}$ cmkg für v als Volumen der Stange bei $\sigma = 500$.

Fig. 1092.



303. Welche Spannung hat die Stange der Nr. 301 bei einer Abkühlung um 20° C.?

$700 - 500 = 200$ Atm.

304. Welche gesamte Formänderungsarbeit liegt für Nr. 301 und Nr. 303 vor?

Für $\sigma = 1200$ Atm. ist $\mathfrak{A} = 0{,}36 \,.\, v$ und für $\sigma = 200$ Atm. ist $\mathfrak{A} = 0{,}01 \,.\, v$, während für $\sigma = 700$ Atm. sich $\mathfrak{A} = 0{,}1225 \,.\, v$ ergäbe.

305. Ein Bogenträger mit zwei Gelenken wird um 40° C. erwärmt oder abgekühlt. Welche größte Spannung entspricht dem auftretenden Horizontalschub?

Bei Erwärmung liegt gemäß Fig. 1092 für MN ein excentrischer Druck $[H_t]$ vor, welcher auf der Druckseite, d. h. bei O_u, die größte Spannung hervorruft. Man hat

$$\sigma_{max} = \frac{H_t}{f} + \frac{h \,.\, H_t}{\mathfrak{Tr} : w} = \frac{H_t}{f}\left(1 + \frac{h \,.\, f \,.\, w}{\mathfrak{Tr}}\right),$$

und zwar ist dabei H_t bestimmt gemäß S. 1307.

Hat der Querschnitt das Profil I, so ist für eine Höhe d bei dünner Wand $\mathfrak{Tr} = f \cdot \frac{d^2}{4}$ und, da $w = \frac{1}{2}d$ ist, also

$$\sigma_{max} = \frac{H_t}{f}\left(1 + \frac{2h}{d}\right) \quad \text{und} \quad H_t = \tfrac{15}{32} E \,.\, f \cdot \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{vt}{1 + \tfrac{15}{32}\frac{d^2}{h^2}},$$

und demnach auch

$$\sigma_{max} = \tfrac{15}{32} E \left(2\frac{d}{h} + \frac{d^2}{h^2}\right) \cdot \frac{vt}{1 + \tfrac{15}{32}\frac{d^2}{h^2}}.$$

Für $d : h = 1 : 5$ ist also, falls $\frac{15}{32} \sim \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$\sigma_{max} = 0{,}22\, E \cdot \frac{vt}{1{,}02}.$$

Bei $E = 2\,000\,000$ Atm. und $v = \frac{1}{80000}$ folgt für $t = 40^0$ eine Druckspannung

$$\sigma_{max} = \frac{220}{1{,}02} \text{ Atm.} \sim 216 \text{ Atm.}$$

Bei Abkühlung tritt natürlich eine entsprechende Zugspannung auf.

306. Aufgabe Nr. 305 ist für einen Bogenträger ohne Gelenke gemäß § 208 durchzuführen.

Aus dem Gleichungssystem auf S. 1221 folgt für $\lambda = lvt$ und für $P = 0$

$$\pm H_t = \tfrac{45}{4} \frac{E\mathfrak{T}r}{h^2} \cdot \frac{vt}{1 + \frac{45}{4}\frac{\mathfrak{T}r}{fh^2}}.$$

Dieser Wert tritt hier ein statt des Wertes von H_t auf S. 1307.

307. In einem Fachwerk von einfacher statischer Unbestimmtheit wird ein bestimmter Stab um t^0 C. erwärmt, während die übrigen Stäbe ihre Temperatur nicht ändern. Es sind die Spannkräfte der Stäbe zu bestimmen, welche der Temperaturänderung entsprechen.

Wir betrachten den erwärmten Stab, welcher die Knoten m und n verbinden mag, als überzähligen Stab gemäß S. 1178 und berechnen die Spannkräfte H_{pq} des Fachwerkes für den Fall, daß der erwärmte Stab die Spannkraft $H_{mn} = 1$ hat. Erhält dieser durch die Erwärmung thatsächlich die Spannkraft X, so erhalten dabei die anderen Stäbe thatsächlich die Spannkräfte $H_{pq} . X$. Um X zu bestimmen, setzen wir wieder $\Sigma H_{pq} . \lambda_{pq} = 0$ für λ_{pq} als thatsächliche Verlängerungen bezw. Verkürzungen der Stäbe.

Für den Stab $\overline{mn}$ ist $H_{mn} = 1$ und $\lambda_{mn} = H_{mn} . X . \alpha_{mn} + vtl_{pq}$, während für die übrigen Stäbe $\lambda_{pq} = H_{pq} . X . \alpha_{pq}$ ist, und demnach gilt

$$\Sigma H_{pq}^2 X . \alpha_{pq} + H_{mn}^2 . X . \alpha_{mn} + H_{mn} . vtl_{pq} = 0$$

oder auch

$$X . \Sigma \alpha_{pq} . H_{pq}^2 = -H_{mn} . vtl_{pq}.$$

Man hat also, da $H_{mn} = 1$ ist,

$$X = -\frac{vtl_{pq}}{\Sigma \alpha_{pq} . H_{pq}^2},$$

wobei die Summe im Nenner auch über $H_{mn} = 1$ und α_{mn} zu erstrecken ist.

Ein beliebiger Stab pq hat ferner die Spannung

$$H_{pq} \cdot X = - H_{pq} \cdot \frac{\nu t l_{pq}}{\Sigma \alpha_{pq} \cdot H_{pq}^2}.$$

Der Ausdruck für X zeigt, daß einer Erwärmung ($t = +$) eine Druckkraft ($X = -$) und daß einer Abkühlung ($t = -$) eine Zugkraft ($X = +$) entspricht.

Das Verfahren läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß mehrere Stäbe in verschiedener Weise ihre Temperaturen ändern.

308. Aufgabe Nr. 307 ist durchzuführen für ein mehrfach unbestimmtes Fachwerk. Vergl. S. 1178 und 1179.

309. Für ein statisch unbestimmtes Fachwerk, das in allen Stäben dieselbe Temperaturänderung zeigt, sollen die entsprechenden Spannkräfte bestimmt werden.

Statt das Verfahren in Aufgabe Nr. 307 oder 308 auf alle Stäbe auszudehnen, kann man auch durch Einführung von Spannstangen von unendlich großem Querschnitt oder unendlich großem Elasticitätsmodul zum Ziele gelangen.

Bei dem Träger mit zwei Gelenken ersetzt man z. B. das eine Gelenk durch ein Rollenlager, führt dafür aber eine Spannstange von unendlich großem Querschnitt u. s. w. ein, welche G_1 und G_2 fest verbindet. Die Erwärmung des ganzen Trägers um t^0 C. entspricht dann der Abkühlung der Spannstange um t^0 C., für welche $\alpha = \frac{G_1 G_2}{f} \cdot \frac{1}{E}$ den Wert Null hat, weil hier $f = \infty$ oder $E = \infty$ ist, während ihre Längenänderung durch $- \nu t . G_1 G_2$ gegeben ist. Man behandelt nun die Spannstange gemäß Aufgabe Nr. 307.

310. Ein Telegraphendraht von 12 qmm Querschnitt, von dem der laufende Meter 0,1 kg wiegt, ist bei $+ 20^0$ C. angebracht worden; seine Spannweite beträgt 100 m, während er in der Mitte 1,5 m durchhängt. Wie groß ist seine Spannung bei $- 20^0$ C., falls $E = 2\,000\,000$ Atm. und $\nu = \frac{1}{80000}$ ist?

Faßt man bei $+ 20^0$ C. die Mittellinie des Drahtes als Parabel auf, so gilt gemäß S. 355 für den Horizontalschub $H = \frac{1}{2} \gamma \frac{l^2}{h}$, woraus für $\gamma = 0{,}1$ und $l = 50$ und $h = 1{,}5$ folgt $H = 83{,}3$ kg und $\sigma = \frac{8330}{12} \sim 694$ Atm. Ferner ist λ nach der Näherungsformel auf S. 357 gegeben durch $50 + \frac{2}{3} \frac{1{,}5^2}{50} = 50{,}03$ m.

Bei der Abkühlung um 40^0 würde sich diese Länge um $\frac{40}{80000} \cdot 50{,}03$ m $= 2{,}5015$ cm verkürzen, wenn nicht durch die Abkühlung H auf H' stiege. Dem Überschuß $H' - H = H' - 83{,}3$ entspricht eine elastische Verlängerung von λ um $\frac{5003\,(H' - 83{,}3)}{0{,}12 \cdot 2\,000\,000}$, und demnach hat die Hälfte λ' des Drahtes bei $- 20^0$ C. die Länge in Centimetern

$$5003 - 2{,}5015 + \frac{5003\,(H' - 83{,}3)}{0{,}12\,.\,2\,000\,000}.$$

Bezeichnet man die neue Pfeilhöhe durch h', so ist $H' = \frac{1}{8}\gamma\frac{l^2}{h'}$ und $\lambda' = l + \frac{2}{3}\frac{(h')^2}{l} = l + \frac{1}{6}\frac{\gamma^2 l^3}{(H')^2}$.

Setzt man die beiden Werte für λ' einander gleich, so erhält man eine kubische Gleichung für H', welche $H' \sim 126\,\mathrm{kg}$ liefert, so daß $\sigma \sim 1050$ Atm. ist. Man hat ferner $h' \sim 1\,\mathrm{m}$ und $\lambda' \sim 50{,}013\,\mathrm{m}$.

Dreizehnte Gruppe.

Bewegungsspannungen.

311. Bei welcher Beschleunigung würde eine prismatische Stange aus Blei von 1 m Länge und 16 qcm Querschnitt bei der Anordnung der Fig. 952 zerrissen werden, falls $K_1 = 125$ Atm. ist und das specifische Gewicht des Bleis zu 11,25 angesetzt wird?

Man hat $P = 16\,.\,125 = 2000\,\mathrm{kg}$, während die Masse der Stange $\frac{100\,.\,16\,.\,11{,}25}{1000}\cdot\frac{1}{9{,}81} = 1{,}835$ ist, so daß $b \sim 1090\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ beträgt. Ebenso folgt aus $\sigma_z = \frac{b}{g}\delta z$ für $z = l = 100\,\mathrm{cm}$ und $\sigma_l = 125\,000$ Gramm für 1 qcm

$$\frac{b}{g} = \frac{125\,000}{100\,.\,11{,}25} = 111{,}11 \quad \text{und} \quad b \sim 1090\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}.$$

312. Wie ändert sich das Ergebnis von Nr. 311, falls die Achse der Stange senkrecht ist?

Nach S. 1317 ist dann $+b + g$ bezw. $-b + g$ durch $1090\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ bestimmt.

313. Ein quadratischer Balken aus Holz von 10 m Länge und 400 qcm Querschnitt wird gemäß Fig. 953 mit der Beschleunigung $b = \frac{1}{4}g$ emporgezogen. Wie groß ist σ_{max}, falls das specifische Gewicht des Holzes 0,5 ist? Das Gewicht G beträgt 200 kg, während $\mathfrak{T}r : w = \frac{1}{6}\,.\,20^3$ und $\frac{b+g}{g} = \frac{5}{4}$ ist, d. h. man hat

$$\sigma_{max} = \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{200\,.\,1000}{\frac{1}{6}\,.\,20^3} = 23{,}43\ \text{Atm.}$$

Bei gleichförmigem Aufziehen ($b = 0$) wird g überwunden, so daß σ_{max} mit $\frac{b+g}{g} = 1$ zu berechnen ist, was $\sigma_{max} = 18{,}74$ Atm. giebt.

314. Ein Schiff, welches eine Geschwindigkeit von $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ hat, läuft auf den Strand und legt dabei eine Strecke von 0,5 m in gleichmäßig-geänderter Bewegung zurück. Welche Spannung hat der Fuß des cylindrischen, 15 m

hohen und 30 cm dicken Mastes auszuhalten, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,75 ist?

Der Mast entspricht der Hälfte von AB in Fig. 953, also der Strecke SA oder SB. Für die Bestimmung von b gilt $\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{2}5^2 = 0{,}5 \cdot b$, und demnach ist $b = -25\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; daraus folgt für $AS = \frac{1}{2}l = 15\,\text{m}$ gemäß S. 1318 der Wert $\sigma_{max} = 573{,}2$ Atm.

Mit Rücksicht auf die Ausbildung des Beharrungszustandes, welcher durch Schwingungen des Mastes AS um S erreicht wird, ist hier (vergl. S. 871) das Doppelte von σ_{max} als größte Spannung anzusetzen, also 1146,4 Atm.

Da K_b selbst für Eichenholz nur 600 Atm. und für Buchenholz nur 670 Atm. beträgt, so ist ein derartiges Anlaufen bei den gegebenen Konstruktionsverhältnissen gefährlich.

315. Welche Umfangsgeschwindigkeit darf ein Ring aus Schmiedeeisen bei der Anordnung der Fig. 956 erhalten, falls $k = 1000$ Atm. ist und das spezifische Gewicht 7,8 beträgt?

Nach S. 1320 ist $c^2 = g \cdot \frac{\sigma_{max}}{\delta}$, wobei für Gramm und Centimeter als Einheiten $\delta = 7{,}8$ und $\sigma_{max} = 1\,000\,000$ und $g = 981$ zu setzen ist, wobei $c = 11\,215\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 112{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ wird; bei 1 m Halbmesser hat die entsprechende Winkelgeschwindigkeit denselben Zahlenwert, sie entspricht einer Tourenzahl 1071.

316. Die Untersuchung gemäß Fig. 956 ist für eine massive Scheibe vom Radius r und der Dicke h durchzuführen [1]).

Man erhält $\sigma = \frac{1}{3}\,\frac{\delta}{g} \cdot r^2\gamma^2$.

Man gewinnt das Ergebnis auch folgendermaßen. Für eine Hälfte, welche durch eine Achsenebene bestimmt wird, ist die Centrifugalkraft $m \cdot s_0 \cdot \gamma^2$, falls m die Masse der halben Scheibe und s_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse bezeichnet. Ist σ die mittlere Spannung für die Achsenebenen, so ist $\sigma \cdot 2rh = ms_0\gamma^2$, woraus mit $m = \frac{r^2\pi h\delta}{2g}$ und $s_0 = \frac{4r}{3\pi}$ wieder der obige Wert von σ folgt. Vergl. auch S. 799.

317. Auf einen Mühlstein vom Radius r und der Dicke h ist ein Ring aus Schmiedeeisen aufgezogen. Welche Spannung hat der Ring auszuhalten, wenn man zur Sicherheit annimmt, daß er allein den Centrifugalkräften Widerstand leistet?

Hat der Ring den Querschnitt f, so ist gemäß Nr. 316 zunächst $\sigma \cdot 2f = \frac{2}{3}\,\frac{r^3h\delta_1\gamma^2}{g}$, falls δ_1 das spezifische Gewicht des Steines bezeichnet,

[1]) Vergl. auch Grübler, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, 1897 u. 1899.

woraus $\sigma = \frac{1}{3}\frac{r^3 h \delta_1 \gamma^2}{fg}$ folgt. Zu dieser Spannung kommt noch gemäß S. 1320 die Spannung $\frac{r^2\delta\gamma^2}{g}$, falls δ das specifische Gewicht des Eisens ist, und demnach ist die gesamte Spannung

$$\bar{\sigma} = \frac{r^2\gamma^2}{g}\left(\delta + \tfrac{1}{3}\delta_1 \frac{rh}{f}\right).$$

Für $\bar{\sigma} = k_1$ folgt daraus f, d. h. der erforderliche Querschnitt des Ringes bezw. auch die Summe der Querschnitte, falls mehrere Ringe angewendet werden.

318. Bei welcher Winkelgeschwindigkeit wird die Bleistange der Nr. 311 gemäß der Anordnung der Fig. 957 zerrissen?

Nach S. 1321 ist

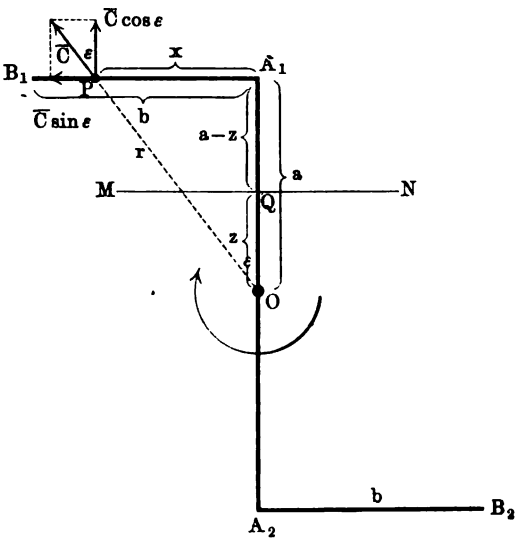
$$c^2 = 2g \cdot \frac{\sigma_{max}}{\delta},$$

wobei für Gramm und Centimeter als Einheiten $\delta = 11{,}25$, $\sigma_{max} = 125000$ und $g = 981$ zu setzen ist; man erhält

$$c = 4669 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 46{,}69 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

und es hat die entsprechende Winkelgeschwindigkeit denselben Zahlenwert, die Tourenzahl ist 446.

Fig. 1093.



319. Es sind die Spannungen für die gleichförmige Drehung einer Stange mit Armen gemäß Fig. 1093 zu bestimmen.

Die axiale Beanspruchung von A_1A_2 ist gemäß Fig. 957 zu beurteilen.

Für einen Punkt P des Armes A_1B_1 zerlegt sich $[\overline{C}]$ in $[\overline{C}\cos\varepsilon]$ und $[\overline{C}\sin\varepsilon]$. Bezeichnet man ein Massenteilchen bei P durch μ, so ist $\overline{C} = \mu\gamma^2 r$ und demnach ist $\overline{C}\cos\varepsilon = \mu\gamma^2 r \cdot \frac{a}{r} = \mu\gamma^2 a$ und $\overline{C}\sin\varepsilon = \mu\gamma^2 r \cdot \frac{x}{r} = \mu\gamma^2 x$.

Demnach ist die axiale Beanspruchung von A_1B_1 gleichfalls gemäß Fig. 957 zu beurteilen.

Da $\overline{C}\cos\varepsilon = \mu\gamma^2 a$ für alle Punkte P von A_1B_1 denselben Wert hat, so ist A_1B_1 aufzufassen als ein gleichmäßig belasteter Freiträger mit Befestigung bei A_1, und es ist $Mo_{max} = \frac{1}{2}b \,.\, \Sigma\mu\gamma^2 a = \frac{1}{2}abm\gamma^2$ für A_1, falls die Masse von A_1B_1 durch m bezeichnet wird.

Für Q ist gemäß dem Schnitt MN anzusetzen $Mo = +\Sigma x \overline{C} \cos\varepsilon - \Sigma(a-z)\overline{C}\sin\varepsilon$, d. h. man hat $Mo = a\gamma^2\Sigma\mu x - (a-z)\gamma^2\Sigma\mu x = z\gamma^2\Sigma\mu x$. Da nach dem Massenmomentensatze $\Sigma\mu x = m\cdot\frac{b}{2}$ ist, so hat man schließlich $Mo = \frac{1}{2}bzm\gamma^2$, d. h. OA_1 entspricht einem bei A_1 befestigten Freiträger, der in O die Belastung $\frac{1}{2}bm\gamma^2$ trägt.

Vierzehnte Gruppe.

Stöße von Körpern.

320. Ein unelastischer Körper von 12,5 kg Gewicht bewegt sich mit $6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich ein anderer unelastischer Körper von 24 kg Gewicht bewegen, wenn beide Körper bei geradem centralen Stoß zur Ruhe kommen sollen?

$$3{,}125\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

321. Welche gemeinsame Geschwindigkeit zeigen zwei unelastische Körper von gleicher Bewegungsrichtung nach einem geraden centralen Stoß, falls Gewicht und Geschwindigkeit durch 20 kg und $5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bezw. 15 kg und $9\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gegeben sind.

$$6^5/_7\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

322. Welche gemeinsame Geschwindigkeit zeigen die Körper der Aufgabe Nr. 321, falls ihre Bewegungsrichtungen einander entgegengesetzt sind?

$1\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in der Richtung des Körpers von 15 kg Gewicht.

323. Die Geschwindigkeit von $0{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ eines unelastischen Körpers von 37,5 kg Gewicht soll durch den geraden centralen Stoß eines anderen unelastischen Körpers von 30 kg auf $1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erhöht werden. Welche Geschwindigkeit muß man dem zweiten Körper geben?

$$2{,}85\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

324. Zwei unelastische Körper, welche sich in gleicher Richtung bezw. mit $8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $12\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bewegen, stoßen sich geradlinig-central und erhalten dabei die gemeinsame Geschwindigkeit $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Welches Gewicht hat der stoßende Körper, wenn der andere 10 kg wiegt?

10 kg.

325. Zwei vollkommen elastische Kugeln von 6 kg und 15 kg Gewicht kommen bezw. mit den Geschwindigkeiten $5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in entgegengesetzter Richtung zu einem geraden und centralen Stoß. Welche Geschwindigkeiten haben sie nach dem Stoß?

Für $c_1 = +5$ und $c_2 = -2{,}6$ findet man $v_1 = -5{,}86$ und $v_2 = +1{,}74$.

326. Zwei vollkommen elastische Kugeln von gleichem Gewicht kommen bezw. mit den Geschwindigkeiten $8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $3\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in entgegengesetzter Richtung zu einem geraden und centralen Stoß. Welche Geschwindigkeiten haben sie nach dem Stoß?

Für $c_1 = +8$ und $c_2 = -3$ findet man $v_1 = -3$ und $v_2 = +8$.

327. Zwei vollkommen elastische Kugeln von gleichem Gewicht, von denen die eine $4\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit hat, während die andere ruht, kommen zu einem geraden und centralen Stoß. Welche Geschwindigkeiten haben sie nach dem Stoß?

Für $c_1 = +4$ und $c_2 = 0$ findet man $v_1 = 0$ und $v_2 = +4$.

328. Eine vollkommen elastische Kugel von der Masse m_1 bewegt sich mit der Geschwindigkeit c_1 auf der Centralen zweier ruhenden Kugeln aus vollkommen elastischem Material von den Massen m_2 und m_3. Unter welchen Umständen ist die Geschwindigkeit von m_3 ein Maximum, falls m_1 und m_3 feste Werte haben?

Die Kugel 2 erhält durch die Kugel 1 die Geschwindigkeit $2\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,c_1$ und erteilt der Kugel 3 die Geschwindigkeit $2^2\,\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}\cdot c_1$. Soll diese Geschwindigkeit ein Maximum sein, so muß

$$\frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}{m_2} = m_2 + \frac{m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3$$

ein Minimum sein. Fügt man $2\sqrt{m_1 m_3}$ negativ und positiv hinzu, so muß auch

$$m_2 - 2\sqrt{m_1 m_3} + \frac{m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3 + 2\sqrt{m_1 m_3}$$
$$= \frac{(m_2 - \sqrt{m_1 m_3})^2}{m_2} + m_1 + m_3 + 2\sqrt{m_1 m_3}$$

ein Minimum sein; da m_2 eine positive Größe von endlichem Wert ist, so tritt das Minimum für $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ ein, d. h. für $m_1 : m_2 = m_2 : m_3$.

329. Unter welchen Umständen tritt, falls gemäß Aufgabe Nr. 328 eine Kugel von der Masse m_1 auf eine Reihe von Kugeln von den Massen $m_2 \ldots m_n$ stößt, das Maximum der Geschwindigkeit für die Kugel von der Masse m_n auf?

$$m_1 : m_2 = m_2 : m_3 = \ldots m_{n-1} : m_n.$$

330. Zwei Züge, deren Gewichte 250 t und 275 t sind, haben bezw. die Geschwindigkeiten 6,6 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Welche Arbeit entspricht der Zerstörung, wenn der zweite Zug den ersten einholt, vorausgesetzt, daß die Formeln des geraden Centralstoßes für unelastische Körper anwendbar sind?

77,16 *mt*.

331. Welcher Arbeitsverlust ist in Rechnung zu stellen, wenn bei einer Maschine in jeder Minute 15 gerade Centralstöße zwischen zwei unelastischen Körpern von den Gewichten 600 kg und 500 kg bezw. mit den Geschwindigkeiten 5 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und 2 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erfolgen?

$$V = 31{,}3\,\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}.$$

332. Bei einer Ramme fällt der Bär, der ein Gewicht von 350 kg hat, 1,6 m frei herab. Während der letzten Hitze von 20 Schlägen ist der Pfahl, dessen Gewicht 250 kg beträgt, 0,105 m eingedrungen. Welchen Widerstand leistet das Erdreich?

Nach der angenäherten Formel (vergl. S. 1533)

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 g)\,h \sim Ws$$

ergiebt sich, da $s = \frac{0{,}105}{20}$ ist, $W = 62\,223$ kg, und demnach ist die Tragkraft bei zehnfacher Sicherheit mit 6222 kg anzusetzen.

Die Rechnung ist nach den genaueren Formeln (vergl. S. 1532) für W und h_0 zu kontrollieren.

333. Wie tief (x) darf ein Pfahl von 225 kg Gewicht bei der letzten Hitze von 15 Schlägen eindringen, wenn der Bär bei einer Fallhöhe von 3 m das Gewicht von 300 kg hat und der Widerstand des Erdreiches bei zehnfacher Sicherheit 10 000 kg betragen soll?

Mit $W = 100\,000$ giebt die Näherungsformel (vergl. S. 1533) zunächst $s \sim 0{,}005$ m $= 5$ mm, und demnach ist $x = 15 \,.\, 5$ mm $= 7{,}5$ cm.

334. Bei einer gewöhnlichen Zugramme rechnet man auf 50 kg Bärgewicht je drei Arbeiter, falls der Bär bei einer sechsstündigen täglichen Arbeitszeit mit einer mittleren Geschwindigkeit von 0,209 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gehoben werden soll. Wieviel Pfähle (x) können täglich eingerammt werden, wenn ein Bär von 500 kg mit einer Fallhöhe von 1,6 m zur Verfügung steht und dabei ein Pfahl beim Rammen 1200 Schläge erfordert?

Ein Pfahl braucht 1200 . 500 . 1,6 Arbeit in Meterkilogramm, während 30 Arbeiter bei einem mittleren Zuge von $\frac{50}{3} = 16{,}67$ kg und einer mittleren Geschwindigkeit von 0,209 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ täglich 30 . (16,67 . 0,209) . (6 . 60 . 60) in Meterkilogramm an Arbeit leisten.

Man hat demnach $x = 2{,}4$.

335. Ein Dampfhammer, welcher 8000 kg wiegt, hat eine Fallhöhe von 2 m, während der Amboß einschließlich des Schmiedestückes 60 000 kg wiegt. Welche Verteilung der Arbeit findet statt?

Die Energie des Hammers beträgt 16 000 mkg, der Verlust im Hinblick auf die nützliche Arbeit 1882 mkg und die Schmiedearbeit 14 118 mkg.

336. Zwei Kugeln aus Stahl, für welche $q = 0{,}309$ ist, kommen bei entgegengesetzter Richtung bezw. mit den Geschwindigkeiten $25\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $8{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu einem geraden Centralstoß. Die erste Kugel, welche 15 kg wiegt, hat nach dem Stoß die Geschwindigkeit $6{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in ihrer ursprünglichen Richtung. Welches Gewicht hat die zweite Kugel? Welche Geschwindigkeit zeigt sie nach dem Stoß?

$$8{,}2\,\text{kg} \quad \text{und} \quad v_2 = 25{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{bei Richtungswechsel.}$$

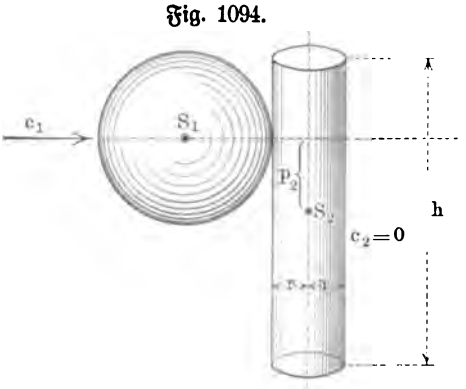
337. Zwei Körper aus Stahl von den Gewichten 100 kg und 60 kg haben bezw. die Geschwindigkeiten $5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $12\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Wie groß ist für $q = 0{,}309$ der Arbeitsverlust, falls sich die Körper bei gleicher Bewegungsrichtung central stoßen?

$$V = 65\,\text{mkg}.$$

338. Gemäß Fig. 965 soll der Stoß eines Hammers aus Schmiedeeisen vom specifischen Gewicht 7,8 gegen eine ruhende ($c_2 = 0$) Platte aus Blei untersucht werden. Für den Hammer ist $f_1 = 20$ qcm, $l_1 = 10$ cm, $E_1 = 2\,000\,000$ Atm. und $c_1 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, für die Bleiplatte $f_2 = 10$ qcm, $l_2 = 2$ cm, $E_2 = 50\,000$ Atm.

Man hat $K_1 = \frac{0{,}25}{1\,000\,000}$ und $K_2 = \frac{4}{1\,000\,000}$ und für die Hammermasse $\frac{10\,.\,20\,.\,7{,}8}{1000} \cdot \frac{1}{981} = 0{,}00159$. Damit ergiebt sich für $c_2 = 0$ und $m_2 = \infty$ zunächst $P_{max} = 7738$ kg und dann $\lambda_1 = PK_1 = 0{,}0193$ mm und $\lambda_2 = PK_2 = 0{,}3095$ mm usw.

Fig. 1094.



Die Geschwindigkeit des zurückgehenden Hammers bestimmt man angenähert, indem man das Eisen als vollkommen elastisch, das Blei als vollkommen unelastisch ansieht.

339. Gemäß § 254 ist der Stoß einer eisernen Kugel von 5 kg Gewicht und $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

Geschwindigkeit gegen einen ruhenden Cylinder aus Holz vom specifischen Gewicht 0,5 zu behandeln, wenn Fig. 1094 (a. v. S.) gilt mit $h = 1\,\mathrm{m}$, $r = 0{,}125\,\mathrm{m}$ und $p_2 = 0{,}25\,\mathrm{m}$.

Nach S. 684 ist für den Kreiscylinder $\varrho_2^2 = \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{4}r^2 = 0{,}087239$ und also $\mathfrak{T}r_2 = m_2 . 0{,}087239$ und $\mu_2 = m_2 . 0{,}5826$, während ferner noch $m_2 = r^2\pi h \,.\, 500 \cdot \frac{1}{g} = 2{,}502$ ist. Man erhält nun mit $\mu_2 = 1{,}4575$ zunächst $c = 2{,}591\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ und dann die Winkelgeschwindigkeit $4{,}326\,\frac{1}{\mathrm{sec}}$ und die Verschiebungsgeschwindigkeit $1{,}5095\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

340. Eine dünne prismatische Stange von der Länge l dreht sich um eine Achse, welche die Stabachse in einem ihrer Endpunkte senkrecht schneidet. Wo liegt 1. der Mittelpunkt des Stoßes und 2. der Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit?

1. Auf der Achse der Stange im Abstande $\frac{2}{3}l$ von der Drehungsachse.

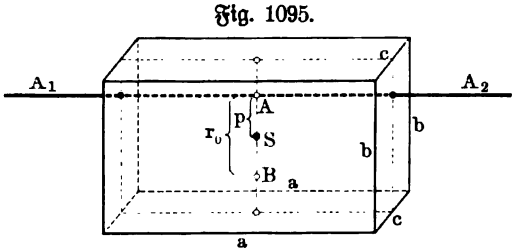
2. Auf der Achse der Stange im Abstande $l\sqrt{\frac{m_2}{3\,m_1}}$ von der Drehungsachse, falls die Stange von der Masse m_2 einen ruhenden Körper von der Masse m_1 trifft.

341. Wo liegt der Mittelpunkt des Stoßes bei der prismatischen Platte der Fig. 1095?

Es ist $r_0 = \frac{p^2 + \frac{1}{12}(b^2 + c^2)}{p}$.

Für $p = \frac{1}{2}b$ und $c = 0$ erhält man wieder das Ergebnis der vorigen Aufgabe.

Fig. 1095.



Der Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit hat von der Achse den Abstand

$$\sqrt{[p^2 + \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2)]\,\frac{m_2}{m_1}},$$

falls die ruhende Platte von der Masse m_2 durch einen Körper von der Masse m_1 gestoßen wird. Erfolgt der Stoß im Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit, so ist die Reaktion auf die Achse für eine Kraft P gegeben als

$$P\left(1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + \frac{1}{12}(b^2 + c^2)}}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right).$$

342. Ein ballistisches Pendel, welches 2000 kg wiegt und für welches $s = 1{,}9\,\mathrm{m}$ ist, wird durch ein Geschoß von 5 kg Gewicht in der Entfernung 2,2 m von der Drehungsachse getroffen und erhält dadurch einen Ausschlag von 16° bei 15 Doppelschwingungen in der Minute. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Geschosses?

Gemäß S. 1530 folgt

$$c = 600{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

343. Wie ändert sich das Ergebnis der Aufgabe Nr. 342, wenn der Schwingungspunkt des Pendels getroffen wird? Wo liegt der Stoßpunkt der größten Geschwindigkeit für das Pendel?

Aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt $l = 3{,}98$, und demnach ist statt 2,2 zu setzen 3,98; damit ergiebt sich

$$c \sim 332\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Für die Bestimmung des Stoßpunktes hat man $\sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}}$ zu bilden, wobei $\mathfrak{Tr}_2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 m_2 s g$ ist; man findet $\sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_2}{m_1}} \sim 55\,\text{m}$.

344. Eine Daumenwelle mit dem Trägheitsmoment 200 treibt einen Hammer, der in Bezug auf seine Achse das Trägheitsmoment 800 hat, mit einer Winkelgeschwindigkeit 2. Welche Beziehungen sind zu beachten, falls die Arme für Welle und Hammer bezw. 0,5 und 1 m sind und vollkommen unelastische Materialien vorausgesetzt werden?

Nach dem Stoße sind die Winkelgeschwindigkeiten von Welle und Hammer bezw. 1 und 0,5, während für jeden Stoß angenähert 200 mkg als Arbeitsverlust anzusetzen ist.

345. Gemäß Fig. 976 ist $c_1 = 26\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $c_2 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und ferner $\alpha_1 = 15^0$ und $\alpha_2 = 45^0$. Mit welchen Geschwindigkeiten und nach welchen Richtungen bewegen sich die Körper nach dem schiefen Centralstoß, falls sie bezw. Gewichte von 10 kg und 6 kg haben und als vollkommen unelastisch angesehen werden?

$$v_1 = v_2 = 18{,}35\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ und ferner } V_1 = 19{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ und } V_2 = 19{,}66\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Mit der Normalen der Berührungsebene bilden die Bewegungen nach dem Stoß bezw. die Winkel $\beta_1 = 20^0\,8'\,30''$ und $\beta_2 = 21^0\,4'\,20''$.

346. Gemäß Fig. 976 ist $c_1 = 13\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $c_2 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und ferner $\alpha_1 = 60^0$ und $\alpha_2 = 165^0$. Mit welchen Geschwindigkeiten und nach welchen Richtungen bewegen sich die Körper nach dem schiefen Stoße, wenn sie aus Elfenbein ($q = 0{,}79$) sind und bezw. die Gewichte 0,625 kg und 0,35 kg haben?

Man hat in Bezug auf die Richtung BX

$$v_1 = -1{,}19\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ und } v_2 = +8{,}89\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

und ferner $V_1 = 11{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $V_2 = 9\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $\beta_1 = 96^0\,1'\,50''$ und $\beta_2 = 8^0\,17'$.

347. Das Seil einer Welle faßt plötzlich eine ruhende Fördertonne von 1500 kg Gewicht und zerreißt dabei. Welche Geschwindigkeit hatte es mindestens, falls die Masse der Welle bei Reduktion auf die Stoßstelle $\frac{40\,000\,\text{kg}}{g}$ beträgt und falls das Seil ein Volumen von 20 000 ccm hat bei $\frac{1}{2}\frac{K^2}{E} = 20$ für 1 kg und 1 cm als Einheit.

Gemäß der Betrachtung zu Fig. 983 gilt

$$20 \,.\, 20\,000 = \tfrac{1}{2} c_1^2 \cdot \frac{40\,000 \,.\, 1500}{40\,000 + 1500} \cdot \frac{1}{g},$$

und demnach ist $c_1 = 736{,}76\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \sim 7{,}37\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

348. Ein cylindrisches Geschoß aus Schmiedeeisen vom Radius r cm und der Länge l cm, für welches $l : r = 4 : 1$ ist, trifft eine schmiedeeiserne Panzerplatte mit einer Geschwindigkeit von $400\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Bei welcher Dicke x hält die Panzerplatte den Schuß gerade aus, falls die Scherfestigkeit $T = 3500$ Atm. gesetzt wird?

Die Scherfläche ist ein Cylindermantel $2r\pi \,.\, x$, welchem die Kraft $T \,.\, 2r\pi x$ in Kilogrammen entspricht; ihre Überwindung fordert auf dem Wege x cm die Arbeit $T \,.\, 2r\pi x^2$ in Centimeterkilogramm. Die Energie des Geschosses ist, falls das specifische Gewicht des Eisens 7,7 beträgt, in Gramm gegeben als

$$\tfrac{1}{2}\frac{(r^2\pi l) \,.\, 7{,}7}{g} \cdot 400^2.$$

Demnach gilt für 1 kg und 1 m als Einheit

$$\tfrac{1}{2}\frac{(r^2\pi l) \,.\, 7{,}7}{1000\,g} \cdot 400^2 = \frac{T \,.\, 2r\pi x^2}{100}$$

und also $x^2 = 0{,}896\,rl = 3{,}584\,r^2$ oder $x \sim 2r$.

Man hat demgemäß die Dicke der Platte dem Durchmesser des Geschosses gleich zu machen.

349. Ein quadratischer Stab von 5 cm Seite aus Schmiedeeisen ($E = 2\,000\,000$ Atm.) ist als Zweistützenträger von 4 m Länge verwandt. Welche Fallhöhe x darf eine Last von 100 kg für die Mitte des Trägers haben, wenn 75 Proz. der aktuellen Energie des Falles auf den Balken übergehen bei $k = 1000$ Atm.?

Die Energie des Falles beträgt $100 \,.\, x$, und demnach entspricht die Arbeit der Formänderung $\frac{3}{4} \,.\, 100 \,.\, x$.

Würde diese Arbeit durch eine ruhende Mittelbelastung P hervorgerufen,

so wäre sie $\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ für $\frac{1}{4}Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w}$, d. h. $\frac{1}{6} \cdot \frac{k^2}{E} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}\,l}{w^2}$. Man hat also

$$\tfrac{3}{4} \cdot 100 \cdot x = \tfrac{1}{6}\frac{k^2}{E} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}\,l}{w^2}$$

und demnach $x = 3{,}7$ cm.

Rechnet man das Sinken der Belastung (100 kg) infolge der Biegung des Balkens um $\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$ für $\frac{1}{4}Pl = k \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{w}$, d. h. um $\frac{1}{12}\frac{kl^2}{Ew} = 2{,}67$ cm, in die übertragene Arbeit ein, so beträgt die Fallstrecke der Last $x' + 2{,}67$, und es ist demnach $\frac{3}{4}\,100\,(x' + 2{,}67) = \frac{1}{6}\frac{k^2}{E}\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}\,l}{w^2}$, woraus $x' \sim 1$ cm folgt.

350. Eine Dreiecksfeder (vergl. S. 1523) soll den Stoß einer Masse, welche 100 kg entspricht und 2 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit hat, aufnehmen. Welches Volumen hat die Feder für $E = 2\,200\,000$ Atm. und $k_b = 600$ Atm.?

Die Arbeit $\mathfrak{A}$ entspricht der aktuellen Energie $\frac{1}{2}\frac{100}{g} \cdot 2^2 \sim 20$ mkg $= 2000$ cmkg, und demnach ist

$$V = \frac{6\,\mathfrak{A} \cdot E}{k_b^2} = 73\,333 \text{ ccm}.$$

351. Eine Welle trägt ein Schwungrad, dessen Masse für einen mittleren Kreis entsprechend 600 kg bei einer Geschwindigkeit 2 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ angesetzt wird. Welches Volumen muß die Welle mit Rücksicht auf ihre Stoppung erhalten bei $G = 800\,000$ Atm. und $k_d = 400$ Atm.?

Die Arbeit $\mathfrak{A}$ entspricht der aktuellen Energie $\frac{1}{2}\frac{600}{g} \cdot 2^2 \sim 120$ mkg $\sim 12\,000$ cmkg, und demnach ist

$$V = \frac{4\,\mathfrak{A} \cdot G}{k_d^2} = 240\,000 \text{ ccm}.$$

352. Gemäß S. 1358 u. f. ist eine hölzerne Radwelle bei einer Aufschlaggeschwindigkeit von 0,5 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für acht rechteckige Arme ($b' = \frac{3}{4}h$) von 2 m Länge zu berechnen, falls die in Rechnung zu stellende Länge der Welle 4 m beträgt und falls die auf die Stoßstelle reduzierten Massen von Rad und Hammer bezw. 80 000 kg und 10 000 kg entsprechen bei $k_b = 100$ Atm. und $k_d = 10$ Atm. und bei $E = 100\,000$ Atm. und $G = 40\,000$ Atm.

Faßt man die acht Arme von der Breite b' als einen Arm von der Breite $b = 8\,b'$ auf, so gilt zunächst gemäß S. 1359 für r als Wellenhalbmesser

$$10 \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^3 = 100 \cdot \frac{bh^2}{6} = 100 \cdot \frac{8\,b'h^2}{6} = 100 \cdot \frac{8 \cdot \frac{3}{4}h^3}{6},$$

d. h. es ist $r = 1{,}853\,h$.

Es ist ferner $V = r^2\pi l = 4316{,}5\,h^2$ und $V' = 1200\,h^2$ in Kubikcentimetern und demnach die Arbeit

$$\tfrac{1}{4}\frac{k_d^2}{G}\cdot V + \tfrac{1}{18}\frac{k_b^2}{E}\cdot V' = 2{,}6972\,h^2 + 6{,}\bar{6}\ldots h^2 = 9{,}3639\,h^2$$

in Kilogrammcentimetern.

Da diese Arbeit anderseits als Energie den Wert 11326 hat, so ist $h = 34{,}78$ cm und $b = 26{,}08$ cm, während $r = 64{,}45$ cm ist.

353. Gemäß Anwendung Nr. 30 ist ein Hammerwerk zu berechnen, welches aus einer Daumenwelle und drei Schwanzhämmern besteht.

Ein Hammer soll in der Minute 300 Schläge machen und während einer Umdrehung der Welle zwölfmal ($m = 12$) gehoben werden. Der Halbmesser r_1 des Daumenteilrisses sei 0,78 m, die Entfernung r_2 des Schwanzendes von der Drehachse des Hammers sei 0,63 m, die Entfernung derselben Achse von der Mitte des Hammerkopfes sei 1,57 m, und die ganze Länge des Hammerstieles sei 2,35 m. Der Hammer sei aus Gußeisen und wiege 25 kg; der Stiel des Hammers bestehe aus Eichenholz, habe rechteckigen Querschnitt mit den Seiten 0,157 m und 0,209 m. Der Beschlag am Schwanze sei von der Drehachse 0,47 m entfernt und wiege 2,5 kg.

Nimmt man das specifische Gewicht des Eichenholzes zu 0,72, so erhält man als Gewicht des vorderen Stielendes von 1,72 m Länge

$$1{,}57\,.\,2{,}09\,.\,17{,}2\,.\,0{,}72 = 41\,\text{kg}$$

und als Gewicht des hinteren Stielendes von 0,63 m Länge

$$1{,}57\,.\,2{,}09\,.\,6{,}3\,.\,0{,}72 = 15\,\text{kg}.$$

Das statische Moment des Hammers ist

$$Gs = 41\,.\,0{,}86 + 25\,.\,1{,}57 - 15\,.\,0{,}315 - 2{,}5\,.\,0{,}47,$$

und demnach ist also $\dfrac{Gs}{r_2} = 109$ kg.

Zur Berechnung von μ_2 bestimmen wir das Trägheitsmoment des Hammers.

Das Trägheitsmoment des vorderen Stielendes ist

$$\frac{1}{g}\{\tfrac{1}{12}\,.\,41\,(1{,}72^2 + 0{,}209^2) + 41\,.\,0{,}86^2\} = \frac{40{,}57}{g},$$

das Trägheitsmoment des hinteren Stielendes ist

$$\frac{1}{g}\{\tfrac{1}{12}\,.\,15\,(0{,}63^2 + 0{,}209^2) + 15\,.\,0{,}315^2\} = \frac{2{,}04}{g},$$

das Trägheitsmoment des Hammerkopfes ist angenähert

$$\frac{1}{g}\cdot 25\,.\,1{,}57^2 = \frac{61{,}62}{g},$$

und das Trägheitsmoment des Beschlags am Schwanze

$$\frac{1}{g} \cdot 2{,}5 \,.\, 0{,}47^2 = \frac{0{,}552}{g}.$$

Hiernach erhält man

$$\mu_2 = \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2} = \frac{40{,}57 + 2{,}04 + 61{,}62 + 0{,}552}{g \,.\, 0{,}63^2} = \frac{264}{g}.$$

Da der Hammer 300 Schläge in der Minute machen soll und da auf jede Umdrehung der Welle 12 Schläge kommen, so ist die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute 25. Demnach ist die normale Winkelgeschwindigkeit

$$\gamma = 0{,}1047 \,.\, 25 = 2{,}6175.$$

Ist der Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{1}{20}$ und legt der Daumen während des Hebens und während des Leerganges denselben Weg zurück, so daß also $\alpha = 2$ ist, so gilt gemäß der Schlußformel von Anwendung Nr. 30)

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi r_1 \,.\, s \,.\, G}{r_2 (r_1 \gamma)^2} = 53{,}4$$

und

$$\tfrac{1}{2} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \mu_2 = 134{,}5.$$

Demnach ist die auf den Daumenangriffspunkt reduzierte Masse μ_1 der Daumenwelle nebst Schwungrad

$$\mu_1 = 188.$$

Rechnet man auf jeden der drei Hämmer 5 P.S., so hat die Welle bei 25 Touren 15 P.S. zu übertragen.

Besteht die Welle aus Eichenholz, so ist deren Durchmesser $d \sim 29\,\mathrm{cm}$ zu nehmen. Bei einer Länge von 5 m ist ihr Trägheitsmoment $\frac{1}{2} m \left(\frac{d}{2}\right)^2$, und demnach wird ihre, auf den Daumenangriffspunkt reduzierte Masse $\mu = 0{,}42$. Auf jeden der Hämmer ist hiervon ein Drittel zu rechnen, also 0,14, so daß für den Schwungring eines jeden Hammers, der zugleich als Daumenring benutzt wird, die reduzierte Masse $188 - 0{,}14 = 187{,}86$ ist.

Das Gewicht A des Schwungringes ist durch die auf S. 793 entwickelte Formel $\mathfrak{T}r = 1{,}1 \frac{A}{g} R^2$ für $R = r_1 = 0{,}78\,\mathrm{m}$ bestimmt, wobei $\frac{\mathfrak{T}r}{R^2} = 187{,}86$ zu setzen ist.

Man hat demnach $A = 1675\,\mathrm{kg}$.

354. Es ist der Wirkungsgrad eines Wasserrades zu bestimmen, auf welches bei einem Gefälle von 3 m in der Sekunde 0,62 cbm Wasser fließen, falls nur 2,2 m von dem Gefälle ausgenutzt werden können und falls das Wasser beim Abfließen noch $3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ Geschwindigkeit hat, während $125 \frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{sec}}$ durch die Reibungswiderstände verbraucht werden.

Die rohe Arbeitsstärke ist 1860 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$, es werden aber nur 1364 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ ausgenutzt, und es gehen außerdem durch die Reibung 125 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ und 285 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ mit dem abfließenden Wasser verloren. Demnach beträgt die Nutzarbeit 954 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$, und es ist

$$\eta = \frac{954}{1860} = 0{,}51 = 51 \text{ Proz.}$$

Schlußbemerkung.

Außer den in der Vorrede erwähnten Büchern haben mir im Verlauf der Arbeit besonders noch folgende Werke gute Dienste geleistet:

Grashof, Die Festigkeitslehre.
Grashof, Theoretische Maschinenlehre.
„Hütte", Des Ingenieurs Taschenbuch.
Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.
Kriemler, Aus der Festigkeitslehre u. s. w.
Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung.
Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre.
v. Ott, Grundzüge der graphischen Statik.
Reuleaux, Kinematik.
Weisbach-Herrmann, Theoretische Mechanik.
Weisbach's „Ingenieur".

Für die Anwendungen und Übungen wurden außerdem noch gelegentlich zu Rate gezogen:

Claußen, Statik und Festigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Baukonstruktionen.
Graf, Anwendungen der Festigkeitslehre auf den Maschinenbau.
Hintz, Die Baustatik.
Kleyers Encyklopädie.
Lauenstein, Leitfaden der Mechanik.
Zech-Cranz, Aufgaben aus der theoretischen Mechanik.

Braunschweig, im August 1903.

Alex. Wernicke.

Zusammenstellung einiger häufig vorkommender Bezeichnungen.

Längen sind im allgemeinen durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, im besondern durch l, als Höhen durch h, als Radien durch r, als Durchmesser durch d u. s. w.

Gelegentlich kommen auch bei Vergleichen die großen lateinischen Buchstaben zur Verwendung, z. B. r und R, d und D u. s. w.; der Krümmungsradius wird im allgemeinen durch ϱ, bei konstantem Wert durch r oder R bezeichnet.

Flächen sind meist durch f oder F bezeichnet.

Rauminhalte (Volumina) werden im allgemeinen durch v oder V bezeichnet.

Für Winkel sind meist die kleinen griechischen Buchstaben eingeführt, z. B. α, β, γ.

Besonderheiten werden durch Marken (Indices) angegeben, so bedeutet z. B. r_m den Radius der mittleren Schraubenlinie, α_m deren Steigung u. s. w.

Funktionen werden durch $f(x)$, $\varphi(x)$ u. s. w. bezeichnet, ihre ersten Ableitungen durch $f'(x)$, $\varphi'(x)$ u. s. w., ihre zweiten Ableitungen durch $f''(x)$, $\varphi''(x)$ u. s. w.

Neben dem gewöhnlichen Sinus, Kosinus u. s. w., der sich auf den Kreis bezieht, kommen gelegentlich auch die entsprechenden, auf die Hyperbelfläche bezogenen Funktionen vor, welche im Gegensatze zu $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. als $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$ u. s. w. bezeichnet werden.

* *
*

Stellung eines Punktes auf seiner Bahn . . . s.
Bahnstück oder Weg . . . w.
Stellung eines Zeitpunktes innerhalb der Zeit . . . t.
Zeitabschnitt oder Dauer . . . τ.
Stellung eines Punktes zur Zeit t auf seine Bahn . . . s_t.
Zeitelement . . . τ.
Konstante Zeitdauer, z. B. Umlaufszeit oder Schwingungsdauer . . . T.
Tourenzahl (in der Minute) . . . n oder u.
Konstante Geschwindigkeit (lineare) . . . c.
Veränderliche Geschwindigkeit (lineare) . . . v.
Geschwindigkeit (lineare) zur Zeit t . . . v_t.
Konstante Beschleunigung (lineare) . . . b.

Veränderliche Beschleunigung (lineare) . . . j.

Beschleunigung (lineare) zur Zeit t . . . j_t.

Winkelweg oder Arcusweg . . . σ.

Konstante Winkelgeschwindigkeit oder Arcusgeschwindigkeit . . . γ oder auch ω.

Veränderliche Winkelgeschwindigkeit oder Arcusgeschwindigkeit . . . φ.

Konstante Winkelbeschleunigung oder Arcusbeschleunigung . . . β.

Veränderliche Winkelbeschleunigung oder Arcusbeschleunigung . . . ι.

Flächenwege, Flächengeschwindigkeiten u. s. w. werden durch die entsprechenden großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, also z. B. eine konstante Flächengeschwindigkeit durch C.

Sollen die entsprechenden Größen als Richtungsgrößen (Vektoren) gekennzeichnet werden, so werden sie durch $[c]$ oder $[j]$ bezeichnet, d. h. z. B. c bedeutet die Maßzahl von $[c]$. So bedeutet auch $[AB]$ die Verlegung (Dislokation) eines Punktes, welcher sich erst in A und dann in B befindet.

Normalbeschleunigung (lineare) . . . j_N.

Tangentialbeschleunigung (lineare) . . . j_T.

Gesamtbeschleunigung (lineare) . . . j_G.

Beschleunigung der Führung . . . j_f.

Beschleunigung, relativ zur Führung . . . j_r.

Beschleunigung der Drehung nach Coriolis . . . j_d.

* *
*

Die Lage eines Punktes P von den Koordinaten $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ wird kurz bezeichnet durch $P = (2; 3; 4)$.

Die Komponenten eines Vektors V nach den Achsen heißen V_x, V_y, V_z oder auch $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$. Im besondern sind die Koordinaten eines Punktes P von der Stellung $OP = s$ bezeichnet durch $s_x = s^{(x)} = x$, $s_y = s^{(y)} = y$, $s_z = s^{(z)} = z$, so daß x, y, z die Komponenten der Verlegung $[OP]$ sind; ebenso heißen die Komponenten einer Geschwindigkeit $[v]$ nach den Achsen v_x, v_y, v_z oder auch $v^{(x)}$, $v^{(y)}$, $v^{(z)}$ u. s. w.

Geschwindigkeit und Beschleunigung (linear) in Richtung eines Radiusvektor heißen $[v_r]$ und $[j_r]$.

* *
*

Kräfte heißen K bezw. K_1, K_2, . . ., ihre Komponenten nach den Achsen K_x, K_y, K_z oder $K^{(x)}$, $K^{(y)}$, $K^{(z)}$ u. s. w., die algebraische Summe der Kraftkomponenten nach den Achsen X, Y, Z.

Statt K tritt gelegentlich auch der Buchstabe P oder Q ein, für äußere und innere Kräfte die Buchstaben A und J, für Kräfte, welche einen Zwang darstellen, der Buchstabe Z, für Resultanten, Reaktionen und Reibungen der Buchstabe R, für Widerstände der Buchstabe W, für Stabkräfte der Buchstabe S, für Normalkräfte der Buchstabe N, für Horizontalkräfte bezw. Vertikalkräfte die Buchstaben H und V u. s. w.

Normalkraft . . . K_N.

Tangentialkraft ... K_T.
Gewicht ... G oder Q.
Kraftmoment ... Mo.
Moment der Kraft K ... M_K.
Masse ... m oder M.
Massenelement ... μ.
Specifisches Gewicht ... γ oder δ.
Bewegungsgröße ... B.
Moment der Bewegungsgröße ... $Mo_{(B)}$.
Energie ... E.
Potential ... U.
Arbeit ... A oder A.
Wirkungsgrad ... η.
Verhältnismäßiger Arbeitsverlust ... V.
Trägheitsmoment ... Tr, Trägheitsmomente für die Achsen X, Y, Z ... Tr_x, Tr_y, Tr_z.
Achsiales Trägheitsmoment ... Tr, polares Trägheitsmoment ... Tr_0.
Deviationsmoment oder Centrifugalmoment ... D, für die Achse X, Y, Z ... D_x, D_y, D_z.
Reibungskoeffizient ... f.
Reibungskoeffizient für Zapfenreibung ... f_z.
Reibungskoeffizient für rollende Reibung ... f_r.
Reibungswinkel ... φ, für Keilnuten u. s. w. ... ψ.
Arbeitswert der Wärmeeinheit ... A.
Specifische Wärme für konstantes Volumen ... s_v, für konstante Spannung ... s_p.
Ausdehnungskoeffizient der Wärme ... ν, für Gase ... α.
Temperatur nach Celsius ... t, absolute Temperatur ... T.

* *
*

Querschnitt ... f oder F.
Normalspannung ... σ, in Richtung der Achsen X, Y, Z ... σ_x, σ_y, σ_z.
Tangentialspannung ... τ, Paare, senkrecht zu den Achsen X, Y, Z ... τ_x, τ_y, τ_z.
Beliebige Spannung ... p.
Verlängerung für die Länge l ... λ.
Dehnung ... ε.
Schiebung ... ϑ.
Elasticitätsmodul für Zug oder Druck ... E.
Elasticitätsmodul für Schub ... G.
Verhältnis der Querdehnung zur Längsdehnung ... m.
Spannung an der Proportionsgrenze ... σ_p, an der Elasticitätsgrenze ... σ_e, an der Fließgrenze σ_f u. s. w.
Konstruktionsspannung oder zulässige Spannung für Zug und Druck ... k, für Zug ... k_1, für Druck ... k_2.

Konstruktionsspannung oder zulässige Spannung für Schub ... t oder k_s.

Konstruktionsspannung oder zulässige Spannung für Biegung k_b.

Konstruktionsspannung oder zulässige Spannung für Verdrehung ... t oder k_d.

Die entsprechenden Bruchspannungen (Festigkeitsmoduln) werden durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet, z. B. K_1, K_2.

Abstand der Faser im Querschnitt, welche von der Mittellinie am weitesten entfernt ist ... w, zugehörige Dehnung ... ε_w und Spannung ... σ_w, Querschnittszahl $\frac{\mathfrak{T}r}{w}$.

Krümmungsradius der Biegungslinie ... ϱ.

Sachregister.

A.

Ableitung von Funktionen 58, 65, 73 u. f. w.
Abſciſſen 30 u. f., 103 u. f.
Abſolute Elaſticität und Feſtigkeit oder Zugelaſticität u. ſ. w. 850, 859 u. f.
— und relative Lage, Lagenänderung, Bewegung u. ſ. w. 3 u. f.
— Temperatur 1370 u. f.
Abweichung oder Deviation bei Bewegungen 93 u. f.
— öſtliche beim freien Fall 297.
Achſen, feſte 637 u. f.
— freie 388, 688 u. f.
— für Koordinaten 30 u. f.
— und Wellen 1494.
Achſendrehung oder Rotation, ſ. Drehung.
Achſe, neutrale oder Nullinie im Querſchnitt 896 u. f.
Achſenmoment oder Achſenlot für Bewegungsgrößen 688.
— — — für ein Kräftepaar 332 u. f.
Achſenwiderſtände 638.
Aktion und Reaktion, ſ. Paarwirkung.
Aktuelle Energie, ſ. Energie.
Addition, geometriſche oder graphiſche 27.
Äquivalente der Arbeit und der Wärme 1373.
Äußere und innere Kräfte, 13, 232, 248 u. f., 316 u. f., 342 u. f., 693 u. f., 812 u. f., 1287 u. f.
Aggregatzuſtände 1376.
d'Alembertſs Princip 19, 344, 362, 638, 693, 813, 858 u. f., 1315 u. f.
Anfangsgeſchwindigkeit 60 u. f.
Angriffspunkt des Erddrucks 1261 u. f.
Angriffspunkte von Kräften 24, 231, 315 u. f.
Anſtrengung des Materials im allgemeinen 846.
— für zuſammengeſetzte Elaſticität und Feſtigkeit 1135.
— im gebogenen Balken 1052.
Antipol und Antipolare 1140 u. f.
Antrieb einer Kraft 243, 695 u. f.
Anziehung der Maſſen 275 u. f., 380 u. f., 1540.
Arbeit einer Kraft 243, 251.
— bei Formänderungen, ſ. Formänderungsarbeit.
— der Reibung 530.
— — — Schwerkräfte (Gewichte) 442.
— — — Stabilität 478.
— des Stoßes 1350 u. f.
— und Energie 243, 702, 1325 u. f., 1361 u. f.
Arbeitsfeſtigkeit 857.
— =leiſtung von Menſchen und Tieren 308, 1404; von Maſchinen 1398.
— =ſatz für Vektoren 36.
— — Kräfte 317 u. f., 327 u. f.
— =ſtärke 247, 256 u. f., 271, 1402 u. f.
— =verluſt bezw. Energieverluſt 1325 u. f., 1361 u. f.
— =vermögen bezw. potentielle Energie 243, 252, 280, 380, 702, 1361 u. f.
— =wert der Wärmeeinheit 1373.
Arcusbeſchleunigung oder Winkelbeſchleunigung 64 u. f., 254 u. f.
— =geſchwindigkeit oder Winkelgeſchwindigkeit 47, 60; Parallelogrammſatz 130.
— =weg oder Winkelweg 43.
Armierte Träger 1450.
Atmoſphäre, techniſche oder neue 816.
Atwoodſche Fallmaſchine 358.
Auflagerdruck 362 u. f., 469 u. f.
Ausdehnungskoeffizient der Gaſe 1369.

B.

Bach-Schüles Formel 839.
Bachs Formeln für ebene Platten 1242 u. f.
Bahn eines Punktes 44.
Balken, gerader im allgemeinen 849.
— gerade, als Träger im allgemeinen 890 u. f.
— — — Freiträger 939 u. f., 981 u. f., 1001 u. f.
— — — Zweistützenträger 948 u. f., 981 u. f., 1001 u. f.
— — — einseitig-eingespannte Träger 955 u. f., 981 u. f., 1001 u. f.
— — — beiderseitig-eingespannte Träger 964 u. f., 981 u. f., 1001 u. f.
— — — gespannte Balken 1125 u. f.
— — bei rechnerischer und graphostatischer Behandlung 362 u. f., 367 u. f., 370 u. f.
— — mit beweglichen Belastungen 372, 1032 u. f.
— — von gleicher Spannung (Sicherheit), s. Formen gleicher Spannung.
— krumme 1194 u. f.
Ballistik 166 u. f.
Ballistisches Pendel 1530.
Bausteine, elastisches Verhalten 1310.
Befestigungen bei technischen Konstruktionen 478 u. f.
— von Körpern in Punkten 469 u. f.
Befestigungsarten, einfache 899.
— -reaktionen 18, 348, 467 u. f.; Beispiele dazu 507 u. f.
Beharrungsprincip oder Trägheitsprincip 6, 76 u. f.
— zustand einer Maschine 1414.
Belastung, bewegliche bei Balken 372, 1032 u. f.; bei Fachwerken 1181.
— der Balken, gerade 892; schiefe 1060.
Belastungsebene 891.
— -fläche bezw. Belastungslinie 370, 501 u. f., 919 u. f.
— -scheide 1039.
Bernoullische Annahme für Biegung 891, 896 u. f., 1195.
Beschleunigte Bewegungen von Fuhrwerken 780, Radwellen 746, Schrauben 745.
Beschleunigung als Vektor 87.
— der gleichmäßig-geänderten Bewegung 61.
— des freien Falles 152.
—, durchschnittliche 60.
Beschleunigung in einem Zeitpunkte 65.
— und Kraft 8 u. f., 231 u. f.
Beständige Größen oder Konstanten 21.
Bewegliche Belastungen bei Balken 372, 1032 u. f., bei Fachwerken 1181.
Bewegung, absolute und relative 4.
— eines materiellen Systems 692 u. f., 703 u. f.
— — Punktes 44, in erster Annäherung 66 u. f., 96 u. f.; in zweiter Annäherung 66 u. f., 96 u. f.
— — Stabes 742 u. f.
— — starren Körpers 40, 114, 720 u. f.
— — Zuges bei Luftwiderstand 749 u. f.
— gleichförmige 44, gleichmäßig-geänderte 61 u. f.
— unter Zwang 258 u. f.
Bewegungen, Grundmethode 103, Projektionsmethode 103 u. f., Polarmethode 105 u. f.
Bewegungsdreieck 40.
— -energie, s. Energie.
— -gleichungen, Bedeutung der Konstanten 75.
— phoronomische 66 u. f.; dynamische 241 u. f.
— -größe 242, 635 u. f.
— — und Kraftantrieb 247, 695.
— -lehre, s. Phoronomie und Kinetik.
— -parallelogramm 15, 78 u. f.
— -zustand eines starren Körpers 635, 688 u. f.
Bewegung und Ruhe im allgemeinen 1 u. f.
Biegung bei Berücksichtigung des Schubes 1056 u. f.
— durch Stöße 1354.
Biegungsachse 895.
— -arbeit 1071 u. f.
— -elasticität und Festigkeit 850, 890 u. f.
— -federn, gerade 1522 u. f.; krumme 1234.
— -linie oder elastische Linie 890 u. f.; als Seilkurve 982 u. f.; durch Schub beeinflußt 1056 u. f.
— -moment 897 u. f.
— -spannung 897 u. f.
Blattfedern 1524.
Böschung, natürliche und künstliche 1257.
Bogenträger mit drei Gelenken 406, 524.
— — zwei Gelenken 1213 u. f.
— ohne Gelenke 1217 u. f.
Boyle-Mariottes Satz 1368.

Brachyſtrochrone 287 u. f.
Bremsdynamometer 599 u. f., 1410.
Bremſen 604 u. f.
Bremsgurt 601.
Bruchſpannung 852.
Brückenträger 377, 1476.
Brückenwage 490.

C.

Cardanos Führung 192.
Caſtiglianos Sätze 1076 u. f.
Centralachſe eines Kräfteſyſtems 330 u. f., 335 u. f.
— für Bewegungen 118.
Centralbewegung 112, 280 u. f.
— =ellipſe 649 u. f.
— =ellipſoid 647 u. f., 691 u. f.
— =ſtoß 1325 u. f.
Centrifugalbahn 285.
— =kraft 259 u. f., 388, 640 u. f., 781 u. f., 1336, 1494, 1505.
— — als Zuſatzkraft d. Relativbewegung 266.
— =kräfte von Körpern 640 u. f., 781 u. f., 1336 u. f.
— =moment oder Deviationsmoment 388, 640 u. f., 656 u. f.
Centripetalbeſchleunigung 92.
— kraft 259 u. f., 388, 640 u. f.
Clapeyrons Gleichung für durchgehende Träger 1023.
Clapeyrons Satz 1297.
Coriolis' Satz für Bewegungen 136.
Culmanns Centralellipſe 660, 1142.
Culmanns graphoſtatiſche Konſtruktion 324 u. f.
Cykloide 189, 287 u. f.
Cykloidenpendel 287.
Cylinder (Röhren) 1226 u. f., 1248 u. f., 1522.

D.

Dachbinder, graphoſtatiſch behandelt 375, 1459 u. f.
— nach Ritters Methode behandelt 362 u. f.
Dachkonſtruktionen, ſ. Fachwerke und auch 1457 u. f.
Dehnung als Formänderung 827.
Dehnungszahl 840.
Deviation (Abweichung) von Bewegungen 93 u. f.
Deviationsmoment oder Centrifugalmoment 388, 640 u. f., 656.
Dichtigkeit 9, 442.
— der Erde 1540 u. f.
Differential oder Element 20, 55 u. f., 74, 232.
Differentialflaſchenzug 591.
— =haſpel 403.
— =ſchraube 627.
Dimenſion der Spannung 817.
— im allgemeinen 22, 270.
Dimenſionen der dynamiſchen Größe 269.
— — phoronomiſchen Größe 75.
Dimenſionierung nach der Feſtigkeitsgleichung und nach der Formänderungsgleichung 899 u. f., 940 u. f., u. ſ. w.
Dislokation oder Verlegung 16, 83.
Drehpunkt 37, 253, 316, 710; desgl. als Pol 115 u. f.
Drehungen, endliche 120; elementare 127.
Drehung, gleichförmige u. ſ. w. 46 u. f.
— im allgemeinen 39 u. f.
— ſtarrer Körper um Achſen in dynamiſcher Hinſicht 637.
— — — um Punkte oder Schwenkungen 710.
Drehungsamplitude 115.
— =elaſticität und Feſtigkeit 1092 u. f.
— =federn, gerade 1527; krumme 1235.
— =moment 37, 253, 316.
— =paar 123, 128.
— =ſtrecke 115.
Drehwage 1540.
Dreiſtützenträger 1018 u. f.
Druck bei Stößen 1350.
— excentriſcher 1120 u. f., 1135 u. f.
— und Zug als Kräfte 7 u. f.
Druckelaſticität und Feſtigkeit 850, 859 u. f.
— =linien 502.
— =ſpannungen im allgemeinen 818.
Durchbiegung 934 u. f.
Durchgehende Träger 1021 u. f.
Durchſchnittsbeſchleunigung 60.
— =geſchwindigkeit 48.
Dynamik des ſtarren Körpers 315 u. f.
— elaſtiſch-feſter Körper 811 u. f.
— im allgemeinen 6, 16.
Dynamiſche Bewegungsgleichungen 241 f.
— Größen für ein Atom 241 u. f.; für materielle Körper 249 u. f.
— Grundgleichung für materielle Körper 231, 249; für ſtarre Körper 233; für deren Verſchiebungen 250; für deren Drehungen 253.
— — im allgemeinen 18, 228 u. f.

Dynamische Stabilität als Arbeitsstabilität 478.
Dynamisches Centrum 231, 237, 409 u. f.
Dynamometer 17.
Dynamometrische Wage von Hachette 1411.

E.

Ebenengesetz für Spannungen 896.
Effektivkräfte 232, 248, 344, 637 u. f., 692 u. f.
— bei Achsendrehungen 386 u. f.
Eindeutigkeit 16, 1425.
Einflußlinien bei Balken 1033 u. f.; bei Fachwerken 1181 u. f.
Einheiten, phoronomische 75; dynamische 269.
Einheitskreis 42.
— =punkte 42.
Einrammen von Pfählen 1531.
Einspannung 900 u. f., 955 u. f., 964 u. f.
Einwirkung, gegenseitige 11.
Eisenbahnzug bei Luftwiderstand 749 u. f.
Elasticitätsgrad 857.
— =grenze 812, 856.
— =modul für Schub 840 u. f.; Bestimmung 1056, 1110.
— — Zug und Druck 840 u. f.; Bestimmung 869, 1056.
— Gleichung zwischen E und G 842.
Elasticität und Festigkeit im allgemeinen 812; desgl. Arten 849 u. f.; einfache 859 u. f.; zusammengesetzte 1135 u. f.
Elastische Grundgleichungen 837 u. f., 1286 u. f., 1291, 1300.
— Linie oder Biegungslinie 890.
— Schwingungen 869, 885 u. f. w.
Element, f. Differential.
Ellipsenzeichner 195.
Ellipsoid 686.
Energie oder aktuelle Energie 243, 1364 u. f.
— potentielle oder Energie der Lage 243, 1364 u. f.
— und Arbeit 243, 702, 1325 u. f., 1361 u. f.
Energieverlust bei Stößen 1327 u. f.
Erddruck bei graphostatischer Behandlung 1272 u. f.
— im allgemeinen 1257 u. f.; aktiver und passiver 1258 u. f.; bei wagerechter Oberfläche 1263 u. f.; bei Oberflächenbelastung 1277 u. f.
Erdmasse 1540.
Erdreaktion 12, 467 u. f.
Ergänzungskräfte der Relativbewegung 264 u. f.
Eulers Gleichungen für Schwenkungen 713.
Eulers Knickformel 1113.
Evolvente und Evolute 290.
Excentrischer Druck und Zug 1120 u. f.
— Stoß 1331 u. f.

F.

Fachwerke im allgemeinen 1162.
— nachgiebige 1165, 1179 u. f.
— statisch-bestimmte u. f. w. 1168 u. f.; statisch-unbestimmte u. f. w. 1176 u. f.
Fäden, elastische 1310, 1353.
Fahrpläne 211.
— =stuhl 1512.
Fallbewegung und Mondbewegung 155.
Fall, freier 152 u. f., 161 u. f.; östliche Abweichung 297.
Federn mit gerader Mittellinie 1522 u. f.; mit krummer Mittellinie 1232 u. f.
Federschwingungen 1528.
— =wage 17.
Fehlstellen in Stäben 871.
Festigkeit, f. Elasticität.
Festigkeitsgleichung bei Verdrehung 1095 f.
— für Biegung gerader Stäbe 890, 897, 926, 969.
— — — krummer Stäbe 1198 u. f.
— =modul oder Bruchspannung 852.
Festpunkte oder Fixpunkte eines Querschnittes 658, 1578.
Flächenbeschleunigung 111.
— =geschwindigkeit 109.
— =kräfte 813.
Flaschenzüge 352, 400 u. f., 590 u. f.
Fließgrenze oder Streckgrenze 843.
Formänderung im allgemeinen 811; für einen Körperpunkt 833, 1289 u. f.
Formänderungsarbeit für Zug und Druck 865, 874; für Schub 883, 885; für Biegung 1071 u. f.; für Verdrehung 1107.
— im allgemeinen 852, 888, 1294 u. f.
— deren Minimum 1076 u. f., 1298.
Formänderungsellipsoid 834.
— =gleichung bei Verdrehung gerader Stäbe 1095 u. f.
— für Biegung gerader Stäbe 890 u. f., 897, 926, 969.
— — — krummer Stäbe 1200 u. f.
Formen gleicher Festigkeit oder gleicher Spannung für Zug und Druck 862; für Biegung 971 u. f.
Foucaults Pendel 196.

Freie Achsen 388, 688 u. f.
Freiträger, f. Balken.
Friktion, f. Reibung.
Führungen 258 u. f.
Führungsbahnen für Gewichte 506.
Fuhrwerke 614, 780.
Funktionen 22, 55 u. f.
Fußplatten 1430.
Futtermauern 1466 u. f.

G.

Galilei 6 u. f., 165, 1426.
Gase, kinetische Theorie 1365.
Gauß' Princip des kleinsten Zwanges 733.
Gay-Lussacs Satz für Gase 1369.
Gefährliche Querschnitte 370, 861 u. f., 919 u. f.
Gegenkräfte 234, 319.
Gelenkträger oder Gerbersche Träger 1477 u. f.
Gelenkverbindungen 497, 1434.
Gemeinsam tragende Balken 1447.
Geometrische Bewegungslehre, f. Phoronomie.
— oder graphische Addition 27.
Gerade Belastung bei Biegung 892 u. f.
Geradengesetz oder Geradliniengesetz 896.
Geschoßbahn 166 u. f.
Geschosse, Energie 284, 803.
Geschwindigkeit als Vektor 77.
— durchschnittliche 48.
— in einem Zeitpunkte 55.
Geschwindigkeitshöhe 168, 1406.
Geschwindigkeit, virtuelle 492.
Gesamtbeschleunigung 90 u. f.; als Vektor 92.
Gespannte Balken 1125 u. f.
Gesprengte Balken 1448.
Gestänge 1551 u. f.
Getriebe 1380 u. f.
Gewicht als Schwerzug oder Schwerdruck 230.
— specifisches 443.
Gewölbe 501, 582 u. f.; als elastisches Gebilde 1222 u. f., 1473 u. f.
Gewölbelinie 355.
Gleichförmige Bewegung 44 u. f.
Gleichgewicht der Kräfte 318 u. f., 1287 u. f.
Gleichgewichtsarten 469.
— -bedingungen für starre Körper 318, 325 u. f., 339 u. f.; für ein materielles System 1287 u. f.
Gleichgewichtsneigung für Fuhrwerke 617.
Gleichmäßig geänderte Bewegung 61 u. f., 242 u. f.
Gleitende Reibung 531 u. f.
Gleiten und Rollen 725 u. f., 773 u. f.
Glocken, Reaktion bei Schwingungen 390.
Graphostatik 324 u. f.
Grashofs Knickformel 1115.
Gravitationskonstante 279, 1540 u. f.
Grenzbetrachtungen 20, 56 u. f.
— -punkt des Stoßes 1323.
Größen 20 u. f., 75 u. f., 269 u. f.
Grundbegriffe der Mechanik 6 u. f.
— -einheiten der Mechanik 16, 1422.
— -gleichungen, elastische 837 u. f., 1286 u. f.
Güteverhältnis als Wirkungsgrad 564, 1401.
Guldinsche oder Pappussche Sätze 415.
Gußeisen, elastisches Verhalten 1314, 1495 u. f.

H.

Hängebrücken 354.
Hängewerke 1450.
Haken und Ösen 1443.
Hamiltons Hodograph 77 u. f., 88 u. f., 102, 159.
Hammerbetriebe 1535 u. f.
Hauptachsen 388, 647.
— -dehnungen 835.
— -spannungen 823.
— -trägheitsmomente 644 u. f., 901 u. f.
Hebel 494, 592.
— und Rollen 592.
Hebelwage 17, 229, 495 u. f., 592.
Heterogen 412, 835.
Heterotrop 836, 844, 1308 u. f.
Hirns Reibungswage 599.
Hodograph 77 u. f., 88 u. f., 102, 159.
Homogeneität der Gleichungen 22, 45.
— der Stoffe 412, 835.
Hookes Gesetz 838 u. f.
Hohlcylinder 1226 u. f., 1248 u. f.
Hohlkugeln 1254 u. f.
Huf oder Klauen 455.
Huyghens 8 u. f., 157.
Hydraulischer Flügel 1409.
Hyperbelfunktionen 1124 u. f.
Hyperboloid 457, 687.

I.

Imponderabilien 15.
Impuls 635.

Indifferentes oder unbestimmtes Gleichgewicht 470.
Indikator 1407, 1412.
Indizierte Spannung 1407.
Inflexions- oder Wendepunkt 920.
Innere und äußere Kräfte 13, 232, 248 u. f., 316 u. f., 342 u. f., 812 u. f., 1287 u. f.
Interferenz der Wellen 181 u. f.
Integral oder Stammfunktion 58, 73 u. f., 232.
Isochronismus 290.
Isotropie 836 u. f.

K.

Kammzapfen 1502.
Kanone 803.
Kegelpendel 178.
Keile 569, 1432 u. f.
Keilketten 580, 624.
— -lager 545.
— -nute 541.
— -presse 625.
— -räder 603.
Keplers Gesetze 156, 157, 275 u. f.
Kern des Querschnittes 1136 u. f.
Kette, kinematische 1381 u. f.
Kettenbrücke 354 u. f.
— -linie, gemeine 355 u. f., 447, 1508 u. f.
— -rollen 587.
— zum Heben von Lasten 1511 u. f.
Kinematik im Sinne Reuleaux' 1380 u. f.
— s. Phoronomie.
Kinetik des starren Körpers 635 u. f.
— elastisch-fester Körper 1315.
— und Statik 18, 315, 349, 1378.
Kinetische Energie, s. Energie.
— Theorie der Gase 1367 u. f.
— und statische Kraft 10, 345 u. f.; desgl. Spannnng 261, 1315 u. f.
Kippachsen 474 u. f.
— -arbeit 478.
Knickung 852, 1111 u. f.
Kniehebel 302.
Knoten 273.
Körper 2 u. f.; starre 315 u. f.; elastisch-feste 811 u. f.; materielle 692 u. f., 1361 u. f.
Kohäsion 344, 812 u. f.
— bei Schüttmassen 1257.
Kolben und deren Stangen 1512.
Komponenten 24 u. f., 81 u. f.
Konstante Kräfte 243, 249.
Konstante oder beständige Größe 21.
Konstruktionsspannung oder zulässige Spannung im allgemeinen 852 u. f.
Kontinuierliche Träger s. durchgehende Träger.
Koordinaten 3, 30 u. f., 103 u. f.
Kopfplatten 1430.
Kraft als Periode von Stößen 102, 1365.
— im allgemeinen 7, 9 u. f., 228 u. f.
— lebendige, s. Energie.
— und Beschleunigung 231.
— — Masse 17, 228 u. f.
Kraftantrieb 243, 251.
— und Bewegungsgröße 247, 695.
Krafteck oder Kräftepolygon 324.
— -linie bei Kraftecken 326.
— im Querschnitt 1064.
— -moment 254, für eine Achse 316.
— -rolle oder lose Rolle 351.
— -tetraeder 337.
Kräfte an einem Punkte 315.
— angreifende 233, 315 u. f., 901; als Massenkräfte und Oberflächenkräfte 11; als statische und kinetische Kräfte 10, 345 u. f.; als äußere und innere Kräfte 13, 232, 248 u. f., 316 u. f., 342 u. f., 693 u. f., 812 u. f., 1287 u. f.
— fingierte bei Relativbewegung 264 u. f.
— mit zerstreuten Angriffspunkten 318 u. f.
Kräftepaare in der Ebene 254, 321 u. f.; im Raume 331 u. f.
Kräfte, parallele 340, 409 u. f.
Kräftepläne 370; reciproke 1459.
— -satz als Satz der drei Kräfte 30, 331.
Kran 407.
Kreisel 782.
Krümmungshalbmesser 90 u. f., 894 u. f., 1196 u. f.
— -kreis 90 u. f.
Krumme Balken 1194 u. f.
Künstliche und natürliche Böschung 1257.
Kurbelarme 1514 u. f.
— -bewegung 203.
— -getriebe nebst Schwungrad 754 u. f., 1513 u. f.
— -schleife 223.

L.

Labiles oder unsicheres Gleichgewicht 469.
Längsdehnung 827 u. f.
— -schwingungen 869.
Lagenänderung 3, 49 u. f., 114 u. f., 829 u. f.

Lage, relative und absolute 3 u. f.
Lager 1503.
Lagerreibung bei Drucken senkrecht zur Achse 543; parallel zur Achse 552 u. f. w.
Lands Trägheitskreis 916.
Lands Widerstandsfläche 1070, 1148 u. f.
Last und Kraft 564, 1403.
Lebendige Kraft, s. Energie.
Leder, elastisches Verhalten 1310.
Leonardos Führung 195.
Leistung belebter Wesen 308, von Maschinen 1398 u. f.
Leitrolle oder feste Rolle 350.
Linearbeschleunigung bezw. -geschwindigkeit, s. Beschleunigung u. s. w.
Lineare Abweichung bei Biegung 933 u. f.
Linkssystem 338.
Lochen 1555.
Logarithmische Linie 355.
Luftwiderstand 164, 749.

M.

Manometer 1410.
Mariotte-Boyles Satz für Gase 1368.
Maschinen 1378 u. f., 1382 u. f.; Gang der Maschinen 1413; Berechnung 1487 u. f.
Massenanziehung 11, 1540.
— -ausgleich bei Schiffsmaschinen 771.
— -fläche u. s. w. 699 u. f.
— -kräfte und Oberflächenkräfte 11.
— -mittelpunkt 237, 250 u. f., 694 u. f.
— -momente 238 u. f.
Masse 9 u. f.
— und Kraft 17.
Maßsysteme der Physik und Technik 17, 269 u. f., 443.
Maxwells Satz 1081 u. f.
Mayers, R., Theorie der Wärme 1376.
Materialkonstanten für Zug und Druck 877; Schub 889; Biegung 1091; Verdrehung 1110.
Materie 8 u. f.
Materielle Körper als Systeme 228 u. f.
Materieller Punkt 3, 18, 231 u. f., 258 u. f., 692 u. f.
Mauerwerk 1153, 1466 u. f.
Maximum und Minimum 899, 927.
Mechanik im allgemeinen 1 u. f.; Einteilung 5 u. f., 16 u. f.
Mechanismus 1381.
Messungen an Maschinen 1408.
Methoden für die Behandlung von Bewegungen 103 u. f.
Mittelbeschleunigung 93.
— -bewegung im allgemeinen 81.
— nach Coriolis 136.
— -geschwindigkeit 81.
Mittelkraft oder Resultante 231.
— -kraftlinie als Art des Seilecks 326.
— — im Gewölbe 583.
— -punkt der Masse 237, 250 u. f., 694 u. f.
— — des Stoßes 1334 u. f.
— — eines Kraftsystems 329, 337.
— — für Parallelkräfte 241.
— -vektor oder Resultante 24 u. f.
— -schicht im Balken 895.
Mobile Belastung, siehe bewegliche Belastung.
Modelle 1420.
Modul, s. Konstante.
Mohrs graphostatische Methoden 913.
— Behandlung des Fachwerks 1174.
Moleküle 3.
Momente 35, 316 u. f. w.
Momentankraft 635.
Momentensatz für Kräfte 317 u. f., 327 u. f.
— — — Vektoren 35, 36.
— -fläche u. Momentenlinie 370, 919 u. f.
Mondbahn 155.
Mühlsteine 799, 1606.

N.

Nachwirkung, elastische 856.
Natürliche und künstliche Böschung 1257.
Naviers Satz über Spannungen 896; desgl. Knickformel 1116.
Nebenarbeit 1398.
Neutrale Achse u. s. w. 896.
Newton 8 u. f., 157, 1426.
Newtons Centralbewegung 160.
Newtons Gesetz 160, 275 u. f.
Niete 1434 u. f.
Niveauflächen 252, 283.
Normalbeschleunigung 88.
— der Planetenbewegung 156.
Normalfall der Praxis bei Biegung gerader Balken 890; desgl. krummer Balken 1194, 1207.
— -kraft 1201.
— -spannung 817.
— -widerstand 531 u. f.
Nullachse oder Nullinie 896, 1064.
Nullsystem 338.
Nutzarbeit 1398.
Nutzeffekt oder Wirkungsgrad 564, 1401.

O.

Obelisk 452.
Oberflächenkräfte und Massenkräfte 11.
Ökonomie 5 u. f.
Ordinaten 30 u. f., 103 u. f.
Ort 38.
Oscillation, f. Schwingung.

P.

Paare, kinematische 1382 u. f.
Paarwirkung 12, 234 u. f., 731.
Pappus-Guldinsche Sätze 415.
Parabel als Seilkurve 354 u. f.
Parabelträger 355, 1191.
Paraboliſche Bewegung 84, 96.
Paraboloid 456.
Parallelepipedon der Vektoren 27.
Parallelkräfte 340.
Parallelogramm der Bewegungen 79 u. f.; für Winkelgeſchwindigkeiten 131.
— — Kräfte 231.
— — Vektoren 25.
— -princip 14, 78 u. f., 731.
Pendel, balliſtiſches 1530.
— mathematiſches 176 u. f.; phyſiſches 737 u. f.; Cykloidenpendel 287.
— -verſuch von Foucault 196.
Periode einer Maſchine 1413.
Pfähle, Einrammen 1531.
Pfeiler 1472, 1476.
Pfeilhöhe 355.
Pferdekraft und Pferdeſtärke 248.
Phoronomie im allgemeinen 6, 16 u. f.
Phoronomiſche Behandlung v. Kurven 188.
— Größen, graphiſcher Zuſammenhang 69; rechneriſcher Zuſammenhang 73.
Planetenbewegung 157.
Planimeter 70.
Platten als Verbindungsſtücke 1429, 1432.
— ebene 1241 u. f.
— -förmige Körper 1241 u. f.
Pochſtempel (Stampfe) 542, 1533.
Poinſots Drehungstheorie 720.
Poiſſons ſogenannte Konſtante 831.
Polarmethode für Bewegungen 105 u. f.
Polbahnen 133.
Pol des Seilecks und Polſtrahlen 324 u. f.
— für Drehungen 115 u. f.
Poncelets Verzahnung 609.
Potenzflaſchenzug oder Rollenzug 352.
Potential 252 u. f., 470.
— des freien Falles 280 u. f.
Potential von Kugeln 380 u. f.
Preſſen 302, 625 u. f.
Princip der Beharrung oder Trägheit 6, 76 u. f., 731.
— — Erhaltung der Energie 1361 u. f.
— — Maſſe 10, 731.
— — Paarwirkung (Aktion und Reaktion) 12, 234 u. f., 731.
— — ſchnellſten Ankunft 290, 735.
— — Übereinanderlagerung (Superpoſition) für Dehnungen und Spannungen 836 u. f., 936 u. f.
— — Unabhängigkeit oder Übereinanderlagerung (Superpoſition) der Bewegungen 14.
— des Parallelogramms 14, 78 u. f., 731.
— von d'Alembert 19, 235, 344, 731.
— — Gauß 733 u. f.
Principien der Mechanik im allgemeinen 6 u. f., 16 u. f., 731 u. f.
Prismatiſche Balken 849.
Projektionsmethode für Bewegungen 103.
Pronys Zaum 599.
Proportionsgrenze 843.

Q.

Quadratrix oder Kurve des Hippias 190.
Querdehnung 829.
— -kraft oder Transverſalkraft 371, 874, 1200 u. f.
— -ſchnitt, gefährlicher 370, 861 u. f.
— -ſchnitte, reduzierte 1047, 1206.
— -ſchnittsänderung 871.
— -ſchnittszahl oder -modul 901.
— -ſchwingungen 1071.
Querträger 1016, 1039.
Quetſchgrenze 843.
— -walzen 595.

R.

Radialturbine 295, 805.
Radwelle 360, 596.
Räder 1491.
Rammbär oder Rammklotz 1531.
Rankines Knickformel 1116.
Reaktionen 18, 234, 467 u. f.
v. Rebhanns Behandlung des Erddrucks 1272 u. f.
Rechneriſche Behandlung 5.
Rechtsſyſtem 338.
Reduktion der Querſchnitte 1047, 1206.
— träger Maſſen 257, 637.
— von Kräften, f. Zurückführung.

Regulatoren 1396.
Reibung am Seil 555.
— an Zapfen 543.
— im allgemeinen 18, 468, 528 u. f.; gleitende 531 u. f.; rollende 562 u. f.
Reibungsarbeit 530.
— =cylinder und Reibungskreis 551 u. f.
— =kegel 535.
— =koeffizient 531 u. f.
— =moment 544; bei Rollbewegungen 562.
— =hülsen und Reibungsringe 568.
— =räder und Reibungsrollen 601.
— =wage von Hirn 599.
— winkel 533.
Reine Bewegungslehre, f. Phoronomie.
Relativbewegungen 138 u. f., 265 u. f.; desgl. deren Kräfte 265, 703.
Relative Elasticität und Festigkeit, f. Biegungselasticität u. f. w.
— und absolute Lage, Lagenänderung, Bewegung u. f. w. 3 u. f.
Resultante, siehe Mittelvektor, Mittelkraft u. f. w.
Reuleaux' Verzahnung 609.
Reversionspendel 738.
Richtungsgrößen als Vektoren 16, 23 u. f., 76 u. f.
Riemenscheiben 204, 558, 631.
Riemen= und Seilbetriebe 558, 1504 u. f.
Riemen zum Heben von Lasten 1511 u. f.
Ringe als krumme Balken 1226 u. f.
Ritters Methode für Kräfte 362.
Ritters, W., Spannungskonstruktion für Querschnitte 1150.
Röhren 1226 u. f., 1248 u. f., 1522.
Roharbeit und Rohenergie 1404.
Rollbewegung 562 u. f.
Rolle, feste 350; lose 351.
Rollen der Polbahnen 133.
— =lager 478, 1089, 1504.
— und Gleiten 725 u. f., 773 u. f.
Rollenzug 352.
Rotation, f. Drehung.
Rückwirkende Elasticität und Festigkeit, f. Druckelasticität u. f. w.
Ruhe, relative und absolute 4.
— und Bewegung 1 u. f.

S.

Saiten, Schwingungen 1300.
Säulen 1584.
Scalaren 23.
Schallwellen 1302.
Scheiben (Räder) 1491.
Scheinbare Bewegung, f. Relativbewegung.
Scherelasticität u. f. w., f. Schubelasticität.
Schiebung als Bewegung, f. Verschiebung.
— — Formänderung 827 u. f.
Schiebungszahl 840.
Schief abgeschnittene Prismen 415, 453.
Schiefe Belastung bei Biegung 1060 u. f.
— Ebene in phoronomischer Hinsicht 165; in dynamischer Hinsicht 540.
Schiffsmaschinen 771.
— =modell 1424.
Schneedruck 1462.
Schornsteine, f. Mauern, 1466.
Schrauben 571 u. f.; Berechnung 1440.
— =bewegung, beschleunigte 745 u. f.
— =federn 1234.
— =keilpresse 626.
— =linie 119, 186, 445, 571.
— — (mittlere) 445, 572.
— =presse 527, 579.
Schraubung 186.
Schub bei Zug und Druck 824.
— =elasticität und Festigkeit 879 u. f.
— durch Stöße 1354.
— im gebogenen Balken 1041 u. f.
— =kraft 370, 880.
— =spannungen im allgemeinen 818; Paare 819 u. f., 880; am Rande eines Querschnittes 881.
— =stangen 766, 1518 u. f.
Schüle=Bachsche Formel 839.
Schüttmassen als elastische Körper 1278.
— im allgemeinen 1257 u. f.
Schwarz' Knickformel 1116.
Schwenkungen oder Punktdrehungen 19, 710.
Schwerkraft als Gewicht (Schwerdruck oder Schwerzug) 230.
— =punkt im allgemeinen 18, 348, 409 u. f.
— — in geometrischer Hinsicht 411 u. f., 415; in dynamischer Hinsicht 442.
— =punktsbestimmungen für Querschnitte im besondern 458 u. f., 912 u. f.
— — — Linien 419 u. f.; Flächen 424 u. f.; Körper 433 u. f.; Beispiele dazu 444 u. f.
— in rechnerischer Behandlung 414, 436 u. f.; in graphischer Behandlung 417, 912 u. f.
Schwingungen auf gerader Linie 172; auf krummer Linie 176.
— bei Belastung im allgemeinen 284.

Schwingungen bei Zug und Druck 869; bei Schub 885; bei Biegung 1071 u. f.; bei Verdrehung 1109 u. f.
— elliptische 179.
Schwingungsfestigkeit 857.
Schwungkraft, s. Centrifugalkraft.
— =kugelregulator 292, 767.
— =rad 754 u. f., 792 u. f.
Seilbetriebe 557, 1504 u. f.
Seile 349.
— zum Heben von Lasten 1511 u. f.
Seileck oder Seilpolygon 324 u. f.
— =kurve 352 u. f.; als Integrator 999 u. f.
— =reibung 555.
— =rolle 587.
— =steifigkeit 560.
Seitenbeschleunigung 93.
— =bewegung 81.
— =geschwindigkeit 81.
— =kraft oder Komponente 24 u. f.
— =vektor oder Komponente 24 u. f.
Selbsthemmung oder Selbstsperrung 565.
Sicherheit der Konstruktionen 853.
Sicherheitsgrad 853, 857.
Simpsons Regel 70, 436.
Spannkräfte als Stabkräfte im Fachwerk 1168.
Spannungen bewegter elastisch-fester Körper 1315 u. f.
— im allgemeinen 813 u. f.; reduzierte 848.
— statische und kinetische 261.
Spannungsellipsoid 822.
— =energie oder potentielle Energie 252, 1364.
— =fläche des Querschnittes 1152.
— =zustände, Einteilung 823 u. f.; Charakteristik 874, 888.
Spannweite 355.
Sphärisches Dreieck 452.
Spirale des Archimedes 106, 188.
Spiralfedern, ebene 1232; gewundene 1234.
Spitzzapfen 555.
Sprengwerke 1450.
Spurzapfen 552 u. f.
Stab, s. Balken.
— =kräfte im Fachwerk 1168.
Stabiles (sicheres) Gleichgewicht 469.
Stabilität der Drehungsachsen 723.
Stabilitätsarbeit 478.
— =moment 476.
Stampfen (Pochstempel) 542.
Stangenverbindungen 497 u. f.
Starre Körper, Bewegung 34 u. f., 114 u. f.; ebene Bewegung 133 u. f.; sphärische Bewegung 133 u. f.; Schwenkung 117 u. f.
— — im allgemeinen 2, 233 u. f.
Statik des starren Körpers 467 u. f.
Statik elastisch-fester Körper 859 u. f.
— und Kinetik 18, 315, 349, 1378.
Statische Momente als Kraftmomente 254, 316.
— Unbestimmtheit 473, 955, 964.
Steifigkeit von Seilen und Ketten 560.
Stellungsgleichung für Bewegungen 49 f.
Stetigkeit 21.
Stoß bei Drehungen 1341.
— Einteilung 1324 u. f.; gerader centraler 1325; excentrischer 1331; schiefer 1343.
— im allgemeinen 1323, 1358.
Stoßfestigkeit 853, 857, 1350 u. f.
— =linie 1324.
— =mittelpunkt 1334.
— =punkt der größten Geschwindigkeit 1342.
— — im allgemeinen 1324.
— =wirkung 1350 u. f.
— =reibung 1344.
— =verlust 1323 u. f.
— =ziffer 1329 u. f.
Stöße innerhalb einer Maschine 1528 u. f.
Streckgrenze oder Fließgrenze 843.
Stützlinie 580 u. f.
— =punkt 469 u. f.
Symmetrie 239 u. f.

T.

Tachometer 1409.
Tangentialbeschleunigung 90 u. f.
— =geschwindigkeit 78.
— =kraft 241.
— =spannung 817.
Tautochrone 290.
Technik 5 u. f.
Technische Mechanik 5 u. f., 15, 16 u. f., 20, 1427.
Temperatur, absolute 1370.
— =spannungen 1304 u. f.
Thürbewegung 516.
Torsion, s. Verdrehung bezw. Drehung.
Torsionspendel oder Drehwage 1109, 1540.
Träge Massen, Reduktion 647.
Träger, s. Balken.
Trägheitsarm oder Trägheitsradius 647.
— =ellipse 651 u. f.
— =ellipsoid 647 u. f.

Trägheitshauptpunkte 916 u. f.
— =kraft 640.
— =kreis nach Land 916 u. f.
— =momente 255, 640, 644 u. f.; in graphischer Behandlung 912 u. f.
Trägheitsmoment für Linien 670 u. f.; für Flächen 673 u. f.; für Körper 682 u. f.
— — Querschnitte im besondern 897, 901 u. f.
Tragfestigkeit 857.
— =kraft 861.
Translation, f. Verschiebung.
Transversalkraft oder Querkraft 371, 874.
— =schwingungen 1071.

U.

Übersetzungsverhältnis b. Zahnrädern usw. 204.
Umkehrpunkte bei Bewegungen 2.
Umlaufszeit 46.
Unbelastete (kraftfreie) Stangen 482.
Unendlich=kleine und unendlich=große Größen 20.
Ungenauigkeiten der Biegungstheorie 1086 u. f.
Ungleichförmige Bewegung 48.
Ungleichförmigkeitsgrad (Schwankung) einer Maschine 754 u. f.
Ungleichmäßig=geänderte Bewegung 65 u. f.
Unterlagsplatten 1429.
— =stützungsfläche bezw. =punkte 473, 476, 900.
Unveränderliche Körper, f. starre Körper.
Unvollkommen=elastische Körper 857.
Urbewegung 76 u. f.
Ursprungsfestigkeit 857.

V.

Variabeln oder veränderliche Größen 21.
Vektorenlehre 23 u. f.
Vektoren, Satz der drei Vektoren 30; Momentensatz 35 u. f; Arbeitssatz 36 u. f.
Veränderliche Größen oder Variabeln 21.
Verbolzungen 1439.
Verdrehung durch Stöße 1358.
Verdrehungselasticität und Festigkeit 1092 u. f.
Verdrehungswinkel 1107.
Verjüngte Träger 862 u. f., 971 u. f.
Verkürzung und Verlängerung, elastische 827.
Verlegung (Dislokation) 16, 83.
Verrückungen, virtuelle 247, 327, 346.
Verschiebung eines starren Körpers in dynamischer Hinsicht 636.
— gleichförmige 46.
— im allgemeinen 40 u. f., 636 u. f.
Verschiebung und Drehung 40 u. f., 114.
Verschiebungssysteme 85.
Vertikalkraft und Moment bei geraden Balken 919 u. f.; bei krummen Balken 1194 u. f.
Verzahnung, cylindrische, 150, 607, 1487; konische 150, 607.
Verzögerung als Beschleunigung von negativem Wert 64.
Virtuelle Verrückungen, Princip 482 u. f., 492, 543.
Vollkommen=elastische Körper u. f. w. 857.
Vollwandige Träger 1188 u. f.

W.

Wage 494 u. f.
Wälzen, f. Rollbewegung.
Wärme, specifische 1372.
— und Arbeit 1372.
Wasserdruck 1270, 1285.
Wechselwirkung, f. Paarwirkung.
Wellenbewegung 180 u. f., 1300 u. f.
Wellen, longitudinale 1302; transversale 1303.
— und Achsen 1494.
Wellrad 360, 596.
Wendepunkt oder Inflexionspunkt 920.
Widerstand 528 u. f.
Widerstandsfläche von Land 1148.
— =moment der Querschnitte, f. Querschnittszahl.
Wiege 493 u. f., 741 u. f.
Winddruck 1463 u. f.
Winkelabweichung bei Biegung 932 u. f.
— =änderung als Formänderung (Schiebung) 827 u. f.
— =beschleunigung oder Arcusbeschleunigung 65, 255.
— =geschwindigkeit oder Arcusgeschwindigkeit 47.
— =weg oder Arcusweg 43.
Winklers Satz für Gewölbe 1224.
Wippe 493.
Wirkungsgrad oder Güteverhältnis 564, 1401.
—, thermischer, elektrischer u. f. w. 1407 u. f.
Wirkung und Gegenwirkung, f. Paarwirkung.

Woltmans hydraulischer Flügel 1409.
Wurf, vertikaler 64, 161; schiefer 166 u. f.

X.

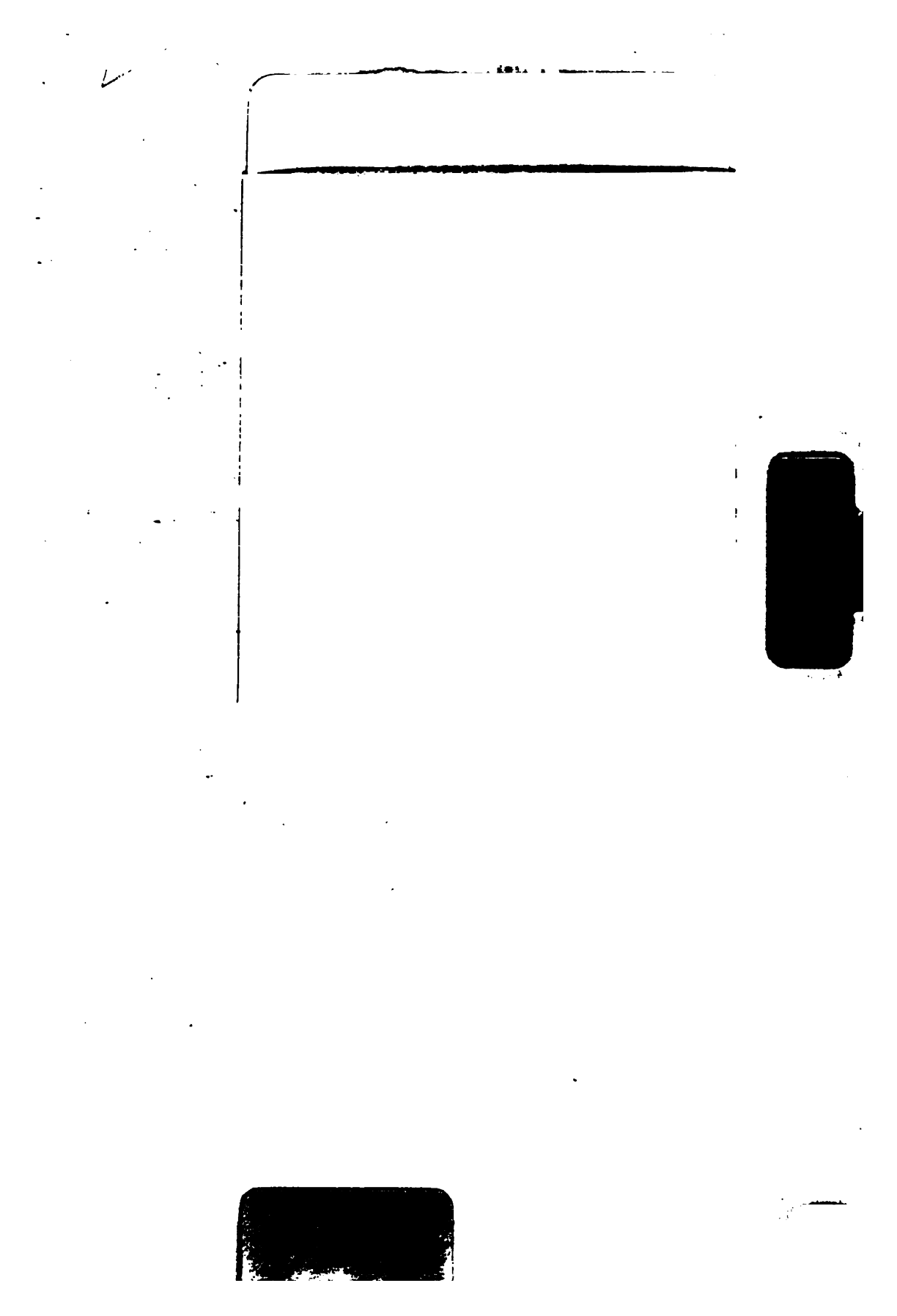
X-Achse 30 u. f.

Y.

Y-Achse 30 u. f.

Z.

Z-Achse 32 u. f.
Zahnräder 204, 607 u. f.
Zähne 1487 u. f.
Zapfen 543 u. f., 1499 u. f.
— -reibung 544 u. f.
Zeichnerische oder graphische Behandlung 5.
Zerlegung und Zusammensetzung von Vektoren 24 u. f.; von Bewegungen 78 u. f.; von Kräften 231 u. f., 315 u. f.; von Kräftepaaren 319 u. f.
Zug durch Stöße 870, 1350.
— -elasticität und Festigkeit 859 u. f.
Zug, excentrischer 1122.
— -spannung im allgemeinen 817.
Zulässige Spannung oder Konstruktionsspannung im allgemeinen 852 u. f.; Gleichung zwischen k und t 855.
Zurückführung (Reduktion) eines Kräftesystems 330, 338, 346.
— eines Systems von Bewegungsgrößen 688 u. f.
Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit 849, 858, 1111 u. f., 1135 u. f.
Zustandsgleichung der Gase 1370.
Zwangbewegung eines Atoms 232.
— — Körpers erster Art 258; zweiter Art 262.
Zweistützenträger, s. Balken.

89080441587

B89080441587A